PRVI KOLOKVIJ IZ VJEROJATNOSTI

Zadatak 1. [4 boda + 6 bodova]

a) Definirajte vjerojatnosni prostor te konstruirajte vjerojatnosni prostor za slučajni pokus istovremenog bacanja dvaju pravilnih novčića.

b) Pretpostavimo da su X i Y nezavisne slučajne varijable takve da su slučajne varijable X i $X - Y$ također nezavisne. Korištenjem svojstava uvjetnog očekivanja pokažite da je tada X degenirarana slučajna varijabla.

Zadatak 2. [5 bodova + 5 bodova]
U referadu Odjela za matematiku u toku jednog radnog dana nezavisno ulaze studenti svih pet godina studija. Pretpostavimo da studenti prve godine ulaze najviše i da je očekivani broj njihovih ulazaka prirodan broj n_1. Nadalje, pretpostavimo da se očekivani broj n_k, $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, ulazaka studenata k-tih godina u referadu proporcionalno smanjuje u odnosu na očekivani broj ulazaka studenata prve godine, i to s koeficijentom proporcionalnosti $1/k$.

a) Odredite distribuciju slučajnog vektora kojim modeliramo broj ulazaka studenata pojedinih studijskih godina u referadu u toku jednog radnog dana. Odredite vjerojatnost da se u jednom radnom danu realizira jednak broj ulazaka studenata sa svih studijskih godina.

b) Ako je za sutra zakazano testiranje indeksa za sve studente prve, druge i treće godine studija, tada će sutra u referadu ući svi studenti tih godina (dakle, svih N_1 studenata prve godine, svih N_2 studnata druge godine i svih N_3 studenata treće godine). Uz prethodno dane informacije, odredite distribuciju slučajnog vektora kojim modeliramo sutrašnji broj ulazaka studenata četvrte i pete godine studija u referadu. Odredite vjerojatnost da u opisanim uvjetima u referadu bude više ulazaka studenata pete nego studenata četvrte godine.

Zadatak 3. [3 boda + 7 bodova]
Neka je $\mathbb{X} = (X, Y, Z)$ neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f_{\mathbb{X}}(x, y, z) = \begin{cases} (y - z)e^{-x} & , \ 0 \le z \le y \le x < \infty \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases} .$$

a) Odredite kojoj parametarskoj familiji distribucija pripada distribucija slučajne varijable Z.

b) Odredite funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable Z uvjetovane na dane vrijednosti $X = x$ i $Y = y$.

Zadatak 4. [10 bodova]
Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable i neka obje imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$. Pokažite da su $X + Y$ i $\dfrac{X}{Y}$ nezavisne slučajne varijable.

Zadatak 5. [10 bodova]
Slučajnom varijablom X modeliran je dnevni broj ulazaka studenata Odjela za matematiku u referadu, a slučajnom varijablom Y broj ulazaka pri kojima student koji je ušao u referadu zatraži nekakvu potvrdu. Pretpostavimo da je X Poissonova slučajna varijabla s parametrom λ te da su uvjetno očekivanje i uvjetna varijanca slučajne varijable Y uz danu vrijednost $X = x$

$$E[Y|X = x] = \frac{3}{4}x, \quad \mathrm{Var}(Y|X = x) = \frac{7}{16}x^2.$$

Izračunajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y. Što zaključujete o njihovoj zavisnosti? Obrazložite svoj odgovor.

Nenad Šuvak