



Broj indeksa _____
Ime i prezime _____

Upute

Vijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 40 bodova. Korištenje bilo kakvih pomoćnih materijala nije dozvoljeno. Svi studenti, bez obzira na ostvareni broj bodova, imaju pravo pristupiti drugom kolokviju.

Zadatak 1 (2 boda + 2 boda).

- Neka je $\mathbb{X} = (X, Y)$ slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Definirajte jednu uvjetnu funkciju distribucije slučajnog vektora \mathbb{X} .
- Definirajte uvjetno očekivanje slučajne varijable X uz danu slučajnu varijablu Y te iskažite i interpretirajte teorem o dvostrukom očekivanju.

Zadatak 2 (4 boda + 4 boda). Zadane su nezavisne slučajne varijable $X \sim \mathcal{P}(a)$ i $Y \sim \mathcal{P}(b)$, $a, b > 0$. Odredite distribucije sljedećih slučajnih varijabli:

- $X + Y$
- X uvjetno na $\{X + Y = n\}$.

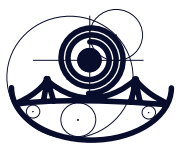
Zadatak 3 (8 bodova). Slučajni vektor $\mathbb{X} = (X, Y)$ ima funkciju gustoće

$$f_{\mathbb{X}}(x, y) = (x + y) \cdot \mathbf{I}_{[0,1] \times [0,1]}(x, y).$$

Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $X - Y$.

Zadatak 4 (10 bodova). Rudar je zarobljen u rudniku i vidi troja vrata. Prva vrata vode u tunel koji će ga, nakon očekivano dva sata hoda, dovesti na površinu i spasiti će se. Druga i treća vrata vode u kružne tunele koji ga, redom nakon očekivano tri i pet sati hoda, vraćaju na isto mjesto s kojega je krenuo. Ako svaki puta slučajno odabire vrata, koliko će očekivano vremena proći dok se ne spasi?

Zadatak 5 (10 bodova). Srećko je godišnji odmor odlučio provesti vozajući se hrvatskom obalom. Kako je pomalo "lak na gasu", stalno se susreće s policijskim patrolama koje ga zaustavljaju - pri svakom zaustavljanju vjerojatnosti da će platiti kaznu 500 kuna i 1000 kuna jednake su. Međutim, osim što je "lak na gasu", Srećko je i "brz na jeziku", pa mu pri svakom zaustavljanju, zbog neprimjerenih komentara na račun policije, patrola s vjerojatnošću $p \in \langle 0, 1 \rangle$ oduzima vozačku dozvolu. Odredite distribuciju ukupnog iznosa plaćenih kazni do oduzimanja Srećkove vozačke dozvole.



Broj indeksa _____
Ime i prezime _____

Upute

Vrijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 40 bodova. Korištenje bilo kakvih pomoćnih materijala nije dozvoljeno. Svi studenti, bez obzira na ostvareni broj bodova, imaju pravo pristupiti drugom kolokviju.

Zadatak 6 (2 boda + 2 boda).

- Neka je $\mathbb{X} = (X, Y)$ neprekidan slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Definirajte jednu uvjetnu funkciju gustoće slučajnog vektora \mathbb{X} .
- Definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti cjelobrojne slučajne varijable X te objasnite kako pomoću nje možemo rekonstruirati distribuciju od X .

Zadatak 7 (8 bodova). Zadane su slučajna varijabla $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, i slučajna varijabla Y čija je distribucija uvjetno na $\{X = x\}$ zadana na sljedeći način:

$$P(Y = y | X = x) = \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda}, \quad y \in \{x, x+1, x+2, \dots\}.$$

Odredite distribuciju slučajne varijable X uvjetno na $\{Y = y\}$.

Zadatak 8 (8 bodova). Za nezavisne slučajne varijable $X \sim \mathcal{U}(0, 4)$ i $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ odredite funkciju distribucije slučajne varijable $X + Y$.

Zadatak 9 (10 bodova). Ptica iz krletke ima tri izlaza i želi pobjeći van iz stana u kojem se nalazi krletka. Prvi izlaz ju, nakon očekivano dva zamaha krilima, vodi do otvorenog prozora, tj. van u slobodu. Drugi i treći izlaz iz krletke vode u druge prostorije stana odakle, redom nakon očekivano tri i pet zamaha krilima, ptica biva uhvaćena i vraćena u krletku. Ako svaki puta ptica slučajno odabire izlaz iz krletke, koliko će očekivano puta zamahnuti krilima prije nego što se spasi?

Zadatak 10 (10 bodova). Srećko je godišnji odmor odlučio provesti vozajući se hrvatskom obalom. Kako je pomalo "lak na gasu", stalno se susreće s policijskim patrolama koje ga zaustavljaju - pri svakom zaustavljanju vjerojatnosti da će platiti kaznu 500 kuna i 1000 kuna jednake su. Međutim, osim što je "lak na gasu", Srećko je i "brz na jeziku", pa mu pri svakom zaustavljanju, zbog neprimjerenih komentara na račun policije, patrola s vjerojatnošću $p \in \langle 0, 1 \rangle$ oduzima vozačku dozvolu. Odredite očekivani ukupni iznos plaćenih kazni do oduzimanja Srećkove vozačke dozvole.