DRUGI KOLOKVIJ IZ VJEROJATNOSTI

Zadatak 1. [2 boda + 2 boda + 2 boda + 2 boda + 2 boda]

a) Definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti te navedite rezultat koji omogućuje izračunavanje momenata cjelobrojnih slučajnih varijabli korištenjem te funkcije.

b) Kada kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli X? Mora li slučajna varijabla X biti definirana na tom istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$? Obrazložite svoj odgovor.

c) Iskažite i interpretirajte jaki zakon velikih brojeva.

d) Kada kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli X? Mora li slučajna varijabla X biti definirana na tom istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$? Obrazložite svoj odgovor.

e) Iskažite i interpretirajte centralni granični teorem za nizove nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli.

Zadatak 2. [6 bodova + 4 boda]

Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\, x^{\frac{k}{2}-1}\, e^{-x/2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

ima χ^2 distribuciju s $k \in \mathbb{N}$ stupnjeva slobode (tj. $\chi^2(k)$ distribuciju), gdje je $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija definirana na sljedeći način:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \quad x > 0.$$

a) Odredite karakterističnu funkciju $\chi^2(k)$ distribucije.

b) Pomoću karakteristične funkcije odredite matematičko očekivanje i varijancu $\chi^2(k)$ distribucije.

Zadatak 3. [10 bodova]

Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s $\chi^2(k)$ distribucijom, $k \in \mathbb{N}$. Odredite P-limes (konvergencija po vjerojatnosti) niza slučajnih varijabli $\left(\sin\left(\overline{X}_n\right)\cos\left(\overline{X}_n\right),\, n \in \mathbb{N}\right)$, gdje je $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Zadatak 4. [10 bodova]

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s očekivanjem nula, varijancama

$$\mathrm{Var}(X_n) = e^{-2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

i kovarijancama

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = e^{-(i+j)}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli $\left(\overline{X}_n,\, n \in \mathbb{N}\right)$.

Zadatak 5. [10 bodova]

Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s $\chi^2(1)$ distribucijom. Aproksimirajte vjerojatnost da se slučajna varijabla s $\chi^2(n)$ distribucijom realizira realnim brojem većim od svog očekivanja.

Nenad Šuvak