DRUGI KOLOKVIJ IZ VJEROJATNOSTI

Zadatak 1. [2 boda + 5 bodova + 5 bodova]

a) Definirajte karakterističnu funkciju slučajne varijable X.

b) Pokažite da za karakterističnu funkciju φ slučajne varijable X vrijedi

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \sqrt{2(1 - Re\,\varphi(h))}.$$

(Uputa: prema Cuchy-Schwartzovoj nejednakosti je $(E[X \cdot Y])^2 \leq E[X^2] \cdot E[Y^2]$.)

c) Pokažite da ako za neki $h \neq 0$ vrijedi $\varphi(h) = 1$, tada je karakteristična funkcija φ periodična s periodom h.

Zadatak 2. [3 boda + 3 boda + 3 boda + 3 boda + 3 boda]

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli sa funkcijama gustoće

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{\sqrt{2}} e^{-\frac{n}{\sqrt{2}}x} & , \quad x \in [0, \infty\rangle \\ 0 & , \quad x \in \langle -\infty, 0\rangle. \end{cases}$$

a) Odredite karakterističnu funkciju slučajne varijable X_n.

b) Pomoću kriterija temeljenog na konvergenciji nizova vrijednosti karakterističnih funkcija ispitajte konvergenciju niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$ po distribuciji. Što zaključujete o konvergenciji po vjerojatnosti ovog niza slučajnih varijabli?

c) Ispitajte kovergenciju po distribuciji i konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli $(aX_n + b, n \in \mathbb{N})$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

d) Ispitajte kovergenciju po distribuciji i konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli $(X_n(aX_n + b), n \in \mathbb{N})$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

e) Kada kažemo da niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergira u srednje kvadratnom smislu prema slučajnoj varijabli X? Mora li slučajna varijabla X biti definirana na tom istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$? S obzirom na rezultat zadatka b) ispitajte konvergenciju niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$ u srednje kvadratnom smislu.

Zadatak 3. [2 boda + 8 bodova]

a) Iskažite i interpretirajte slabi zakon velikih brojeva za niz ne nužno nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

b) Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s očekivanjem nula, varijancama $\mathrm{Var}(X_n) = e^{-k}$ za neki $k \in \mathbb{N}$ i kovarijancama

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = e^{-(i+j)}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli $\left(\overline{X}_n,\, n \in \mathbb{N}\right)$.

Zadatak 4. [5 bodova + 8 bodova]

Broj pješaka koji prijeđu pješački prijelaz u toku jedne minute modeliramo Poissonovom distribucijom s očekivanjem osam. Ako u toku jednog sata pješački prijelaz prijeđe barem 450 pješaka, na tom će pješačkom prijelazu biti postavljen semafor.

a) Iskažite i interpretirajte centralni granični teorem za niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli te pomoću tog rezultata aproksimirajte vjerojatnost postavljanja semafora na promatranom pješačkom prijelazu.

b) Koliko vremena treba proći da bismo mogli tvrditi da je s vjerojatnošću 0.95 preko pješačkog prijelaza prešlo barem 500 ljudi? (Napomena: za funkciju distribucije $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ standardne normalne distribucije je $F_{\mathcal{N}(0,1)}(1.645) \approx 0.95$).

Nenad Šuvak