Broj indeksa ____________________
Ime i prezime ____________________

Upute

Vijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 40 bodova. Korištenje bilo kakvih pomoćnih materijala nije dozvoljeno.

Zadatak 1 (2 boda + 2 boda).

a) Definirajte konvergenciju gotovo sigurno, konvergenciju po vjerojatnosti, konvergenciju u srednjem reda p $(1 \leq p < \infty)$ i konvergenciju po distribuciji.

b) Iskažite i interpretirajte centralni granični teorem za nizove nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

Zadatak 2 (3 boda + 3 boda + 3 boda). Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-x/2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ima χ^2 distribuciju s $n > 0$ stupnjeva slobode, gdje je $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija definirana na sljedeći način:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \quad x > 0.$$

a) Odredite karakterističnu funkciju slučajne varijable X.

b) Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

c) Ispitajte konvergenciju po distribuciji niza nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ jednako distribuiranih kao slučajna varijabla X.

Zadatak 3 (9 bodova). Ispitajte sve četiri vrste konvergencije prema jedinici niza slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ s funkcijama distribucije

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \langle -\infty, 1 - 1/n \rangle \\ \dfrac{1}{2}\,(nx - n - 1) & , \quad x \in [1 - 1/n, 1 + 1/n] \\ 1 & , \quad x \in \langle 1 + 1/n, \infty \rangle\,. \end{cases}$$

Zadatak 4 (9 bodova). Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s očekivanjem nula, varijancama $\mathrm{Var}(X_n) = e^{-k}$ za neki $k \in \mathbb{N}$ i kovarijancama

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = e^{-(i+j)}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli $\left(\overline{X}_n,\, n \in \mathbb{N}\right)$.

Zadatak 5 (9 bodova). Turist dolazi u Las Vegas i odlučuje igrati kockarsku igru, takvu da u svakoj partiji ulaže 1 dolar, te ako dobije, osvaja 2 dolara i vraća mu se ulog od 1 dolara, a ako izgubi partiju gubi 1 uloženi dolar. Poznato je da je vjerojatnost dobitka u ovoj igri $1/4$. Naš je turist, vođen kockarskom groznicom, odigrao čak 240 partija. Kolika je vjerojatnost da turist nije na gubitku?

NŠ