Kolokvij 2

21.1.2019.

Broj indeksa ____________________
Ime i prezime ____________________

Upute

Vijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 50 bodova. Korištenje bilo kakvih pomoćnih materijala nije dozvoljeno.

Zadatak 1 (3 boda + 2 boda).

a) Iskažite i interpretirajte jaki zakon velikih brojeva za nizove nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

b) Definirajte konvergenciju po distribuciji i iskažite teorem koji povezuje taj tip konvergencije niza $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ s konvegencijom vrijednosti pripadnog niza karakterističnih funkcija $(\varphi_{X_n}(t),\ n \in \mathbb{N})$, za svaki $t \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2 (4 boda + 4 boda + 4 boda). Karakteristične funkcije nezavisnih slučajnih varijabli X i Y definirane su na sljedeći način:

$$h_X(t) = e^{2eit-2}, \qquad h_Y(t) = \left(\frac{3e^{it}+1}{4}\right)^{10}.$$

Izračunajte $P(X+Y=2)$, $P(XY=0)$ i $E(XY)$.

Zadatak 3 (10 bodova). Distribucije slučajnih varijabli iz niza $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ zadane su sljedećim funkcijama gustoće:

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & ,\ 0 < x < 1 \\ 0 & ,\ \text{inače} \end{cases}.$$

Neka je $Y_n = nX_n$. Pokažite da niz slučajnih varijabli $(Y_n,\ n \in \mathbb{N})$ po distribuciji konvergira prema jediničnoj eksponencijalnoj distribuciji.

Zadatak 4 (5 bodova + 5 bodova). Provjerite vrijedi li za niz slučajnih varijabli $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$, gdje je $X_n \sim \mathcal{E}(\sqrt{n})$, slabi zakon velikih brojeva. Što možete reći o konvergenciji po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli $(X_n e^{-X_n},\ n \in \mathbb{N})$?

Zadatak 5 (6 bodova + 7 bodova). Broj ljudi koji uđu u jednu robnu kuću u toku jedne minute modeliramo $\mathcal{P}(6)$ distribucijom.

a) Kolika je vjerojatnost da u toku dva sata u robnu kuću uđe bar 700 ljudi?

b) Koliko vremena treba proći da bismo s vjerojatnošću barem 0.95 mogli reći da je u robnu kuću ušlo bar 700 ljudi?

NŠ