Zadatak 1 (30). *Neka funkcija $f \in \mathbb{R}^n$ zadovoljava uvjet*

$$m\|y\|^2 \leq (f''(x)y, y) \leq M\|y\|^2, \quad M > m > 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

i neka se parametri duljine koraka α_k biraju iz uvjeta $f(x) - f(x_k) \leq \varepsilon\alpha(\nabla f(x_k), p_k)$. Dokažite da za niz defiran sa $x_{k+1} = x_k - \alpha_k[f''(x_k)]^{-1}\nabla f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, vrijedi

$$\|\nabla f(x_k)\|^2 \leq \tfrac{M^2}{m\varepsilon\alpha_k}\left(f(x_k) - f(x_{k+1})\right).$$

Zadatak 2 (30). *Pretpostavimo da je $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da $F(x^*) = 0$ i neka je $F'(x)$ Lipschitz neprekidna sa Lipschitzovom konstantom γ za sve x iz kugle oko x^* polumjera r $(K(x^*, r))$. Također neka je $F'(x^*)$ regularna, pri čemu je $\|F'(x^*)^{-1}\| \leq \beta$. Dokažite da, ako je $\|x_0 - x^*\| \leq \min\{r, 1/(2\beta\gamma)\}$, tada za niz definiran sa $x_{i+1} = x_i - F'(x_i)^{-1}F(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$ vrijedi:*

$$\|F'(x)^{-1}\| \leq 2\beta, \qquad \forall x \in K(x^*, \tilde{r}), \quad \tilde{r} = \min\{\, r, \frac{1}{2\beta\gamma}\}.$$

Zadatak 3 (20). *Iskažite teorem u kojem je dana Sherman-Morrison-Woodbury formula za računanje inverza. Koristeći teorem provjerite postoji li inverz matrice $A = (B + uv^T)$, te ako postoji izračunajte ga. Zadano je*

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4 (30). *Pretpostavimo da je $F'(x)$ Lipschitz neprekidna sa Lipschitzovom konstantom γ za sve x iz okoline $\mathcal{O}$ oko x^* i neka je $F'(x^*)$ regularna, takva da ako postoji $\delta > 0$ takvo da $\|B_i - F'(x_i)\| \leq \delta$, tada za sve x_i takve da je $\|x_i - x^*\| \leq \delta$ vrijedi $\|B_i^{-1}\| \leq 2\|F'(x^*)^{-1}\|$. Dokažite da za niz definiran sa $x_{i+1} = x_i - B_i^{-1}F(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$ vrijedi:*

$$\|x_{i+1} - x^*\| \leq 2\|F'(x^*)^{-1}\| \Big(\gamma\|x_i - x^*\|/2 + \|B_i - F'(x_i)\| \Big) \|x_i - x^*\|.$$

Zadatak 5 (20). *Neka je $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica i neka su $c, p, y \in \mathbb{R}^n$ takvi da je $(c, p) \neq 0$. Dokažite: Matrica*

$$\bar{B} = B + \frac{(y - Bp)c^T + c(y - Bp)^T}{c^T p} - \frac{(y - Bp)^T p}{(c^T p)^2} cc^T$$

je pozitivno definitna matrica ako i samo ako je $\det \bar{B} > 0$.

Zadatak 6 (20). *Pokažite da ako $x^\star$ nedegenerirana stacionarna toka i ako pretpostavimo da $\mathcal{A}(x^\star)$ nije prazan. Tada postoji σ takav da vrijedi*

$$\nabla f(x^\star)^T(x - x^\star) = \nabla f(x^\star)^T \mathcal{P}_{\mathcal{A}(x^\star)}(x - x^\star) \geq \sigma\|\mathcal{P}_{\mathcal{A}(x^\star)}(x - x^\star)\|$$

za sve $x \in \Omega$.

Zadatak 7 (20). *Dokažite da ako f zadovoljava Lipschitzov uvjet $\|f''(x) - f''(y)\| \leq \lambda\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ i neka je $x^\star$ rjeenje problema $\min_{x\in\Omega} f(x)$. Tada je reducirani Hessijan $f''_R(x^*)$ pozitivno semidefinitna matrica.*