

Pismeni ispit iz Numeričke matematike/Numeričke analize

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) Uz koje uvjete na podatke (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ postoji jedinstveni interpolacijski polinom n -tog stupnja?

(b) Napišite formulu za ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma u točki $\bar{x} \in [x_0, x_n]$.

(c) Odredite interpolacijski polinom koji prolazi točkama $T_0 = (-2, 24)$, $T_1 = (-1, -2)$, $T_2 = (0, -2)$, $T_3 = (1, 12)$, $T_4 = (2, 25)$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) Iskažite teorem o konvergenciji Newtonove metode tangenti.

(b) Separirajte nultočku funkcije $f(x) = x^5 + x + 1$ i provjerite zadovoljava li funkcija uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode tangenti na dobivenom intervalu. Ukoliko zadovoljava uvjete, odredite aproksimaciju nultočke koristeći Newtonovu metodu tangenti.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Definirajte L_p normu funkcije. Za koji p možemo definirati skalarni produkt? Zapišite kako se on definira.

(b) Nađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ na prostoru svih polinoma stupnja ≤ 2 uz težinsku funkciju $\omega \equiv 1$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) Kako se definira problem najmanjih kvadrata? Napišite sustav normalnih jednadžbi i eksplicitno iskažite njegovo rješenje.

(b) Odredite parametre model-funkcije $f(x; a_1, a_2) = a_1(x^2 + 2) + a_2x^3$ tako da u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže točkama $T_1 = (-2, 2)$, $T_2 = (1, -3)$, $T_3 = (3, 0)$, $T_4 = (5, 2)$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Napišite generaliziranu Simpsonovu formulu i odgovarajuću pogrešku aproksimacije.

(b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[-3, -0.5]$ tako da primjenom generalizirane Simpsonove formule dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_{-3}^{-0.5} (x^2 e^x) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.005$?

(c) Primjenom generalizirane Simpsonove formule izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_{-3}^{-0.5} (x^2 e^x) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.005$.