Eksponencijalni rast

1 Uvod

Pojavom pandemije `COVID-19` u medijima se često koristi termin *eksponencijalni rast.* Pri tome često se ovaj pojam povezuje s pričom o *šahovskoj ploči* ili pričom o *širenju glasina* (vidi *Šikin blog* `https://sikic.wordpress.com/` od 9. 9. 2020.). Problem eksponencijalnog rasta je znatno složeniji.

Pokušat ću kratko opisati ovaj problem i njegovo značenje. Pri tome koristit ću aktualne termine vezane uz ovu pandemiju.

2 Eksponencijalni model neograničenog rasta

Problem eksponencijalnog rasta pojavio se u 19. stoljeću i najčešće se veže uz ime engleskog demografa Thomasa Roberta Malthusa (1776–1834) pa se u literaturi pojavljuje pod nazivom *Malthusova teorija neograničenog rasta*:

> *Porast broja zaraženih osoba dana t proporcionalan je broju već zaraženih osoba $y(t)$ do tog dana, tj.*
> $$y'(t) = c\,y(t). \tag{1}$$

Primijetite da ovdje veličina $y(t)$ predstavlja kumulativni broj zaraženih osoba do dana t.

Rješenje diferencijalne jednadžbe (1) je eksponencijalna model-funkcija

$$y(t) = b\,e^{c\,t}, \tag{2}$$

gdje je $b \in \mathbb{R}$ integracijska konstanta. Stopa rasta na dan t jednaka je $s(t) := \frac{y'(t)}{y(t)} = c$. Zato broj $c > 0$ nazivamo *prosječna dnevna stopa rasta* i najčešće ga izražavamo u % ili u ‰. Slično, u slučaju $c < 0$, govorili bismo o prosječnoj dnevnoj stopi pada.

Parametri $b, c \in \mathbb{R}$ u modelu određuju se na temelju podataka $y_1, \ldots, y_n$, gdje je $y_i = y(t_i)$ kumulativni broj zaraženih osoba do dana t_i. Uz primjenu metode najmanjih kvadrata rješavanjem problema

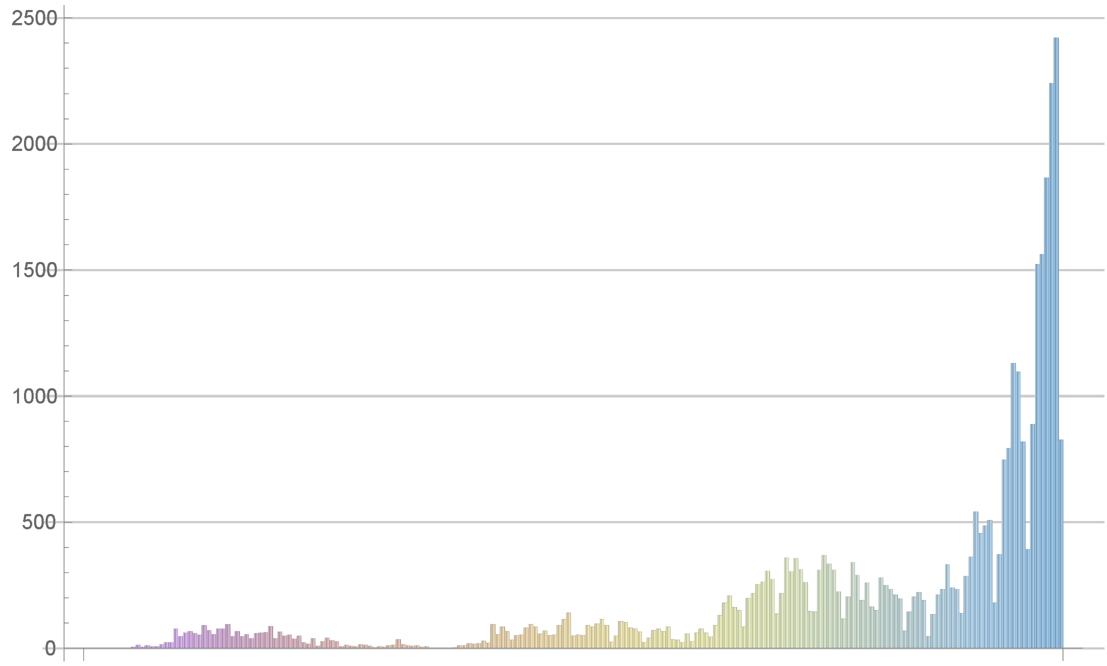
$$\operatorname*{argmin}_{b,c\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (b\,e^{c\,t_i} - y_i)^2, \tag{3}$$

dobivamo procijenjene parametre b i c. Za svaki skup podataka, za koji je koeficijent smjera odgovarajućeg linearnog trenda veći od nule, postoji rješenje problema (3) i može se odrediti odgovarajuća stopa rasta.

Nelinearni problem najmanjih kvadrata (3) ne može se elementarno riješiti, već se nekim iterativnim postupkom (primjerice Newtonovom metodom minimizacije) traži približno rješenje. U programskom sustavu *Mathematica* za to postoje moduli: `FindMinimum[]`, `NMinimize[]`, `NonlinearModelFit[]`.

2.1 Kumulativni podaci broja zaraženih osoba u Hrvatskoj

Promatramo dnevne podatke o broju zaraženih osoba u Hrvatskoj od 25. 2. 2020.



Slika 1: Dnevni podaci o broju zaraženih osoba u Hrvatskoj od 25. 2. 2020.

Primjerice za podatke o kumulativnom broju zaraženih osoba u Hrvatskoj od 25. 2. 2020 do 22. 3. 2020 (prva nakupina na slici 1) promatrajmo podatke za prvih 20 dana:

$\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 19, 32, 38, 49, 57, 65, 81, 105, 128, 206\}$.

Rješavanjem problema (3) dobivamo $b = 1.16345$, $c = 0.254319$. To znači da je u ovom periodu prosječna dnevna stopa rasta zaraženih osoba $\approx 25\%$.

Za podatke o kumulativnom broju zaraženih osoba u Hrvatskoj od 13. 6. 2020 do 2. 7. 2020 (druga nakupina na slici 1) promatrajmo podatke za prvih 20 dana:

$\{2, 3, 5, 6, 9, 20, 31, 50, 68, 87, 117, 139, 234, 290, 375, 442, 476, 528, 582, 663\}$.

Rješavanjem problema (3) dobivamo $b = 20.9716$, $c = 0.177311$. To znači da je u ovom periodu prosječna dnevna stopa rasta zaraženih osoba $\approx 18\%$.

Za podatke o kumulativnom broju zaraženih osoba u Hrvatskoj od 27. 7. 2020 do 15. 8. 2020 (treća nakupina na slici 1) promatrajmo podatke za prvih 20 dana:

$\{24, 65, 136, 213, 280, 366, 402, 436, 460, 518, 546, 608, 685, 746, 791, 882, 1012, 1192, 1400, 1562\}$.

Rješavanjem problema (3) dobivamo $b = 141.65$, $c = 0.119045$. To znači da je u ovom periodu prosječna dnevna stopa rasta zaraženih osoba $\approx 12\%$.

Za podatke o kumulativnom broju zaraženih osoba u Hrvatskoj od 28. 9. 2020 do 17. 10. 2020 (četvrta nakupina na slici 1) promatrajmo podatke za prvih 20 dana:

$\{135, 348, 582, 915, 1156, 1390, 1528, 1815, 2178, 2720, 3177, 3663, 4171, 4352, 4724, 5472, 6265, 7396, 8492, 9311\}$.

Rješavanjem problema (3) dobivamo $b = 643.714$, $c = 0.134979$. To znači da je u ovom periodu prosječna dnevna stopa rasta zaraženih osoba $\approx 13\%$.

Treba spomenuti da za rješavanje problema (3) postoje razne dosjetke koje se često koriste u praksi (naročito u ekonomiji). Spomenimo neke:

(a) Temeljem ideje diskretizacije modela (2) promatra se niz kvocijenata $\frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n-1}}$. Kao prosječna stopa rasta proglašava se geometrijska sredina ovih podataka

$$c_G = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}. \tag{4}$$

Odmah su vidljivi nedostaci ovog pristupa.

(b) Umjesto model-funkcije (2) promatra se linearizirana model-funkcija

$$\ln y = \ln b + ct, \tag{5}$$

pa se problem može transformirati u linearni problem najmanjih kvadrata

$$\underset{\beta, c \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} (\beta + c\, t_i - \tilde{y}_i)^2, \qquad \beta = \ln b, \quad \tilde{y}_i = \ln y_i \tag{6}$$

Rezultati dobiveni na ovaj način puno su prihvatljiviji, ali i oni imaju značajne nedostatke.

2.2 Udvostručenje populacije

Pretpostavimo da je veličina populacije y u trnutku $t = 0$ jednaka y_0. Iz toga dobivamo $b = y_0$, a model-funkcija postaje

$$y(t) = y_0\, e^{ct}. \tag{7}$$

Sada postavljamo pitanje: „za koje vrijeme t_2 će se populacija udvostručiti, tj. koliko je vrijeme udvostručenja?"

$$2y_0 = y_0\, e^{ct_2} \quad \Longrightarrow \quad 2 = e^c t_2 \quad \Longrightarrow \quad ct_2 = \ln 2 \approx 0.7,$$

iz čega slijedi

$$(100\, c) t_2 \approx 70. \tag{8}$$

Tako primjerice za prvu nakupinu podataka imamo

$$c = .25 = 25\% \quad \Longrightarrow \quad 25\, t_2 \approx 70 \quad \Longrightarrow \quad t_2 \approx 2.8$$

To znači da se broj zaraženih osoba udvostručivao otprilike svaki trći dan.

Za posljednju, četvrtu nakupinu je $c = .13 = 13\%$ pa iz $13\, t_2 \approx 70$ dobivamo $t_2 \approx 5.4$. To znači da se broj zaraženih osoba udvostručivao otprilike svaki peti dan. Evo još nekoliko primjera:

Vrsta	Opis	k	t_2
T fag	Virus	300	3.3 minute
Escherichia coli	Bakterija	58.7	17 minuta
Paramecium caudatum	Papučica	1.59	10.5 sati
Rattus norvegicus	Sivi štakor	0.0148	46.8 dana
Bos taurus	Europsko kratkonogo govedo	0.001	1.9 godina
Nothofagus fusca	Novozelandska crvena bukva	0.000075	25.3 godina

Primjer 1. *Zbog pretpostavke o eksponencijalnom rastu populacije i sporo rastuća populacija može narasti na proizvoljno velike vrijednosti. Primjerice, stado goveda koje se udvostručuje svake dvije godine, doseže sljedeće veličine*

Godina	0	2	4	10	50	100	200
Veličina stada	50	100	200	1600	$1.67 \cdot 10^9$	$5.62 \cdot 10^{16}$	$6.33 \cdot 10^{31}$

To bi stado za 200 *godina postalo znatno teže od Zemlje* ($6 \cdot 10^{24}$ *kg)!*

Primjer 2. *Potrošnja resursa se udvostručava u konstantnim vremenskim intervalima. Ilustracije radi, pretpostavimo da potrošnja nekog resursa raste po godišnjoj stopi od* 7 %. *Tada iz pravila* (8) *slijedi da se potrošnja udvostručava svakih* 10 *godinana. Osim toga, u sljedećih* 10 *godina potrošit ćemo više resursa nego li tijekom cijele prethodne povijesti. To je lako shvatiti ako se pažljivije pogleda niz*

$$N_0, 2N_0, 4N_0, 8N_0, 16N_0, 32N_0, \ldots$$

i zatim uoči da je svaki član tog niza manji od zbroja svih prethodnih članova niza.

3 Dopuna

Davno je uočena nerealnost Malthusove teorije neograničenog rasta, a u ozbiljnim znanstvenim istraživanjima ova teorija davno je napuštena.

U svojim radovima između 1838. i 1847. belgijski matematičar Pierre François Verhulst (1804–1849) predložio je popravljeni model

$$y'(t) = c\, y(t)(A - y(t)), \quad c > 0, \tag{9}$$

gdje je A broj stanovnika koji promatramo. Ovaj model riječima možemo iskazati kao:

> *Porast broja zaraženih osoba dana t proporcionalan je broju već zaraženih osoba $y(t)$ do tog dana i broju još nezaraženih osoba.*

Rješenje diferencijalne jednadžbe (9) je poznata *dvoparametarska logistička funkcija*

$$y(t) = \frac{A}{1 + b\, e^{-ct}}, \quad b, c > 0, \tag{10}$$

čiji se parametri b, c određuju rješavanjem nelinearnog problema najmanjih kvadrata

$$\underset{b,c\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{A}{1+b\, e^{-ct}} - y_i\right)^2. \tag{11}$$

Prosječna dnevna stopa rasta $s(t) := \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{b\, c\, e^{-ct}}{1+b\, e^{-ct}}$ u slučaju velike vrijednosti parametra b (a baš to se u našim primjerima događa) za $t = 0$ podudara se s vrijednošću parametra c iz eksponencijalnog modela, a nakon toga monotono opada do nule.

Može se promatrati i troparametarski logistički model

$$y(t) = \frac{a}{1 + b\,e^{-ct}}, \quad a, b, c > 0, \tag{12}$$

gdje se i razina zasićenja uzima kao traženi parametar.

Zbog svoje jednostavnosti logistički model doživio je brojne primjene, ali i brojne korekcije kao što su Generalizirani logistički model (Richards' model (1959)), Gompertzov model (Benjamin Gompertz (1779–1865)), itd.