

# Procjena karakterističnih točaka broja zaraženih - drugi krug 44 dana (14.06.2020 - 27.07.2020)

## 1 Uvod: podaci i matematički modeli

Data	13.6	14.6	15.6	16.6	17.6	18.6	19.6	20.6	21.6	22.6	23.6	24.6	25.6	26.6	27.6	28.6	29.6	30.6	1.7	2.7
	3.7	4.7	5.7	6.7	7.7	8.7	9.7	10.7	11.7	12.7	13.7	14.7	15.7	16.7	17.7	18.7	19.7	20.7	21.7	22.7
	23.7	24.7	25.7	26.7	27.7															
$t_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45															
Dnevno	2	1	2	1	3	11	11	19	18	19	30	22	95	56	85	67	34	52	54	81
no	96	86	57	69	52	53	91	116	140	50	53	52	92	86	98	116	92	25	49	108
	104	81	77	65	24															
Kumu	2	3	5	6	9	20	31	50	68	87	117	139	234	290	375	442	476	528	582	663
lat.	759	845	902	971	1023	1076	1167	1283	1423	1473	1526	1578	1670	1756	1854	1970	2062	2087	2136	2244
	2348	2429	2506	2571	2595															

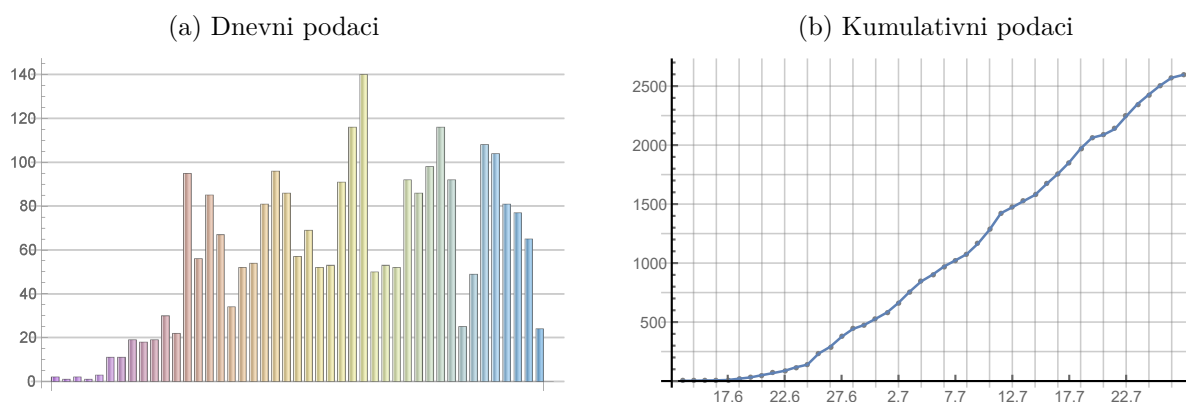


Figure 1: Podaci o broju zaraženih (1. dan odgovara 14-6-2020)

### 1.0.1 Dnevni podaci

Dnevni podaci fitovat će se pomoću Gaussove model-funkcije [2]

$$f(t; b, c, d) = b e^{-c(t-d)^2}, \quad b, c, d > 0, \quad (1)$$

čije su važne točke

- $I = (t_I, f(t_I))$ ,  $t_I = \frac{-\sqrt{2}+2d\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}$  – točka infleksije,
- $M = (d, f(d))$  – točka maksimuma.

Točka infleksije  $I$  predstavlja stanje zaraze u kojoj prestaje progresivni rast i počinje degressivni rast zaraženih. Posebno je važan trenutak  $t_I$  u kome se to postiže.

Točka maksimuma  $M$  predstavlja vrhunac zaraze, a postiže se u trenutku  $t = d$ .

## 1.0.2 Kumulativni podaci

Kumulativni podaci fitovat će se pomoću Logističke model-funkcije [1] i Gompertzove model-funkcije [? ]

### Logistička model-funkcija

$$f(t; a, b, c) = \frac{a}{1 + b e^{-ct}}, \quad a, b, c > 0, \quad (2)$$

rješenje je diferencijalne jednačbe (matematičkog modela)

$$y' = cy(a - y), \quad a, c > 0. \quad (3)$$

Točka infleksije i faze rasta definirane su prema [3].

- $I = (\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2})$  – točka infleksije,
- $y = a$  – gornja asimptota,
- Faze rasta: Pojavljivanje:  $\langle 0, t_B \rangle$ , Intenzivni rast:  $\langle t_B, t_C \rangle$ , Usporavanje:  $\langle t_C, \infty \rangle$

$$t_B = \frac{1}{c} \ln \left( \frac{b}{2 + \sqrt{3}} \right), \quad t_C = \frac{1}{c} \ln \left( \frac{b}{2 - \sqrt{3}} \right)$$

Gornja asimptota (razina zasićenja)  $A$  predstavlja predvidivo maksimalni broj zaraženih.

### Gompertzova model-funkcija

$$f(t; a, b, c) = e^{a - b e^{-ct}}, \quad a, b, c > 0, \quad (4)$$

rješenje je diferencijalne jednačbe (matematičkog modela)

$$y' = cy \ln \left( \frac{e^a}{y} \right), \quad c > 0, a \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Točka infleksije i faze rasta definirane su prema [3].

- $I = (\frac{\ln b}{c}, e^{a-1})$  – točka infleksije,
- $y = e^a$  – gornja asimptota,
- Faze rasta: Pojavljivanje:  $\langle 0, t_B \rangle$ , Intenzivni rast:  $\langle t_B, t_C \rangle$ , Usporavanje:  $\langle t_C, \infty \rangle$

$$t_B = \frac{1}{c} \ln \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} b \right), \quad t_C = \frac{1}{c} \ln \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} b \right)$$

Parametri model-funkcija, točka infleksije i gornja asimptota određuju se na osnovi podataka  $(t_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , gdje su  $t_i$  trenuci (dani), a  $y_i$  broj zaraženih na dan  $t_i$  (ili kumulativni broj zaraženih do tog dana). Parametri se određuju rješavanjem nelinearnog problema najmanjih kvadrata [4]

$$\operatorname{argmin}_{a, b, c \in \mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^r (y_i - f(t_i; a, b, c))^2. \quad (6)$$

Ovaj problem možemo riješiti primjenom *Mathematica*-modula `NonlinearModelFit` [5].

## References

- [1] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Solution of the least squares problem for logistic function*, J. Comput. Appl. Math., **156**(2003) 159–177.
- [2] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Least squares fitting Gaussian type curve*, Appl. Math. Comput., **167**(2005) 286–298.
- [3] R. SCITOVSKI, *Problemi najmanjih kvadrata. Financijska matematika*, Ekonomski fakultet, Elektrotehnički fakultet, Sveučilište u Osijeku, 1993.
- [4] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, <http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541>.
- [5] I. WOLFRAM RESEARCH, *Mathematica*, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2016, version 11.0 edition.

## 2 Stanje 16. dana (28-6-2020)

### 2.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

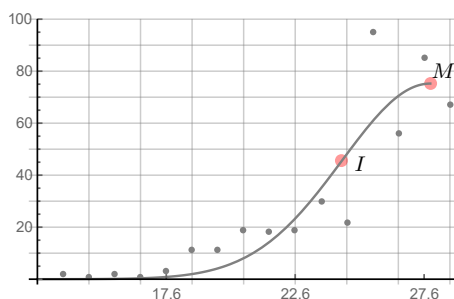


Figure 2: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (12, 46) \approx (24-6-2020, 46)$ ,  $M = (16, 76) \approx (28-6-2020, 76)$

### 2.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

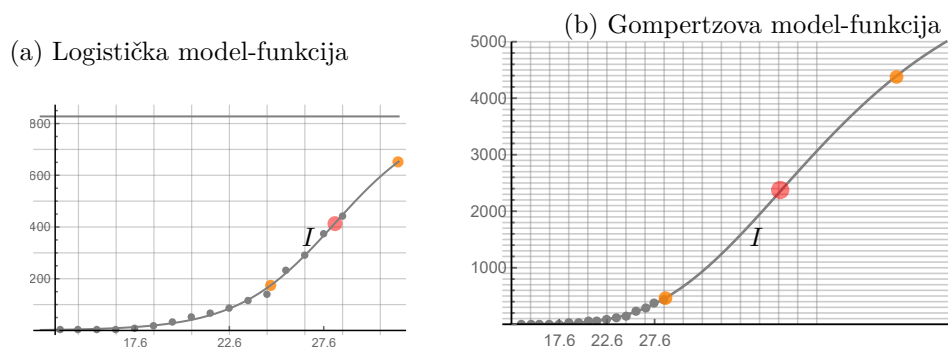


Figure 3: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (16, 414) \approx (28-6-2020, 414)$ ,  $A = 828$

**Gompertzova:**  $I = (29, 2364) \approx (11-7-2020, 2364)$ ,  $A = 6425$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	13.6	- 25.6	13.6	- 29.6
Intenzivni rast	25.6	- 1.7	29.6	- 23.7
Usporavanje	1.7	-	23.7	-

Table 1: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

### 3 Stanje 17. dana (29-6-2020)

#### 3.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

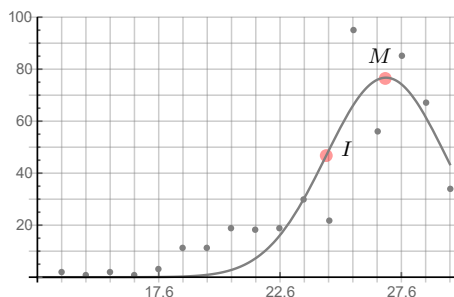


Figure 4: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (12, 47) \approx (24-6-2020, 47)$ ,  $M = (15, 77) \approx (27-6-2020, 77)$

#### 3.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

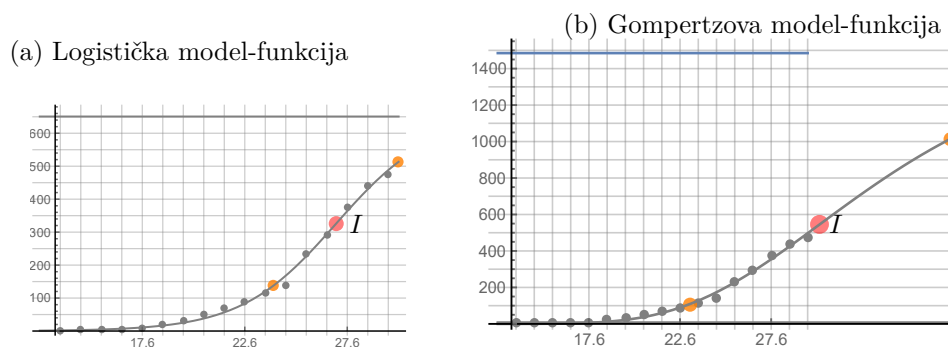


Figure 5: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (15, 326) \approx (27-6-2020, 326)$ ,  $A = 651$

**Gompertzova:**  $I = (18, 547) \approx (30-6-2020, 547)$ ,  $A = 1486$

Faza	Logistički model	Gompertzov model
Pojavljivanje	13.6 - 24.6	13.6 - 23.6
Intenzivni rast	24.6 - 30.6	23.6 - 7.7
Usporavanje	30.6 -	7.7 -

Table 2: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

## 4 Stanje 19. dana (1-7-2020)

### 4.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

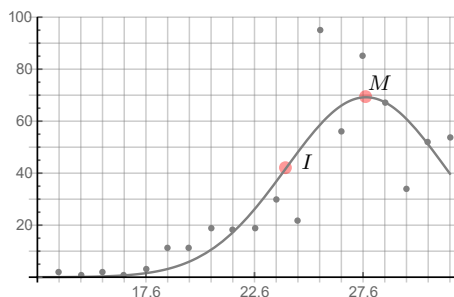


Figure 6: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (12, 42) \approx (24-6-2020, 42)$ ,  $M = (16, 70) \approx (28-6-2020, 70)$

### 4.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

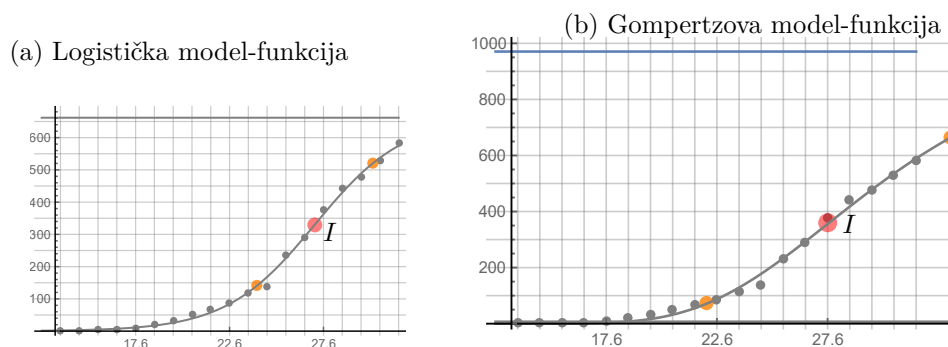


Figure 7: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (15, 331) \approx (28-6-2020, 331)$ ,  $A = 662$

**Gompertzova:**  $I = (16, 358) \approx (28-6-2020, 358)$ ,  $A = 971$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	13.6	- 24.6	13.6	- 22.6
Intenzivni rast	24.6	- 30.6	22.6	- 3.7
Usporavanje	30.6	-	3.7	-

Table 3: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

## 5 Stanje 25. dana (7-7-2020)

### 5.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

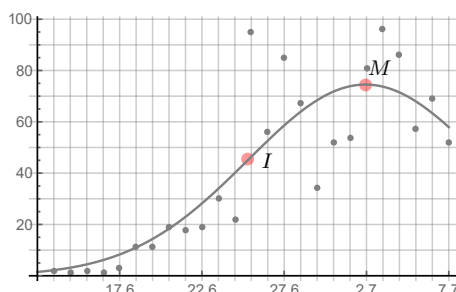
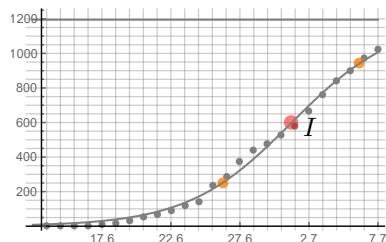


Figure 8: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (13, 46) \approx (25-6-2020, 46)$ ,  $M = (20, 75) \approx (2-7-2020, 75)$

### 5.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

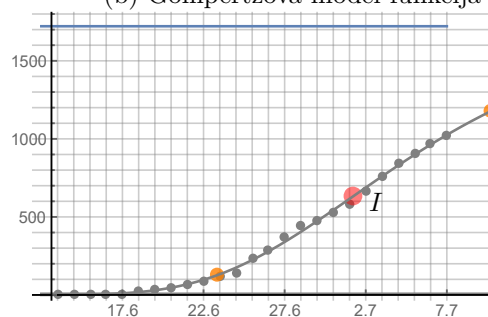


Figure 9: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (19, 598) \approx (1-7-2020, 598)$ ,  $A = 1196$

**Gompertzova:**  $I = (20, 634) \approx (2-7-2020, 634)$ ,  $A = 1722$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	13.6	- 26.6	13.6	- 26.6
Intenzivni rast	26.6	- 30.6	26.6	- 6.7
Usporavanje	30.6	-	6.7	-

Table 4: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

## 6 Stanje 28. dana (10-7-2020)

### 6.1 Dnevni podaci – Gausova model-funkcija

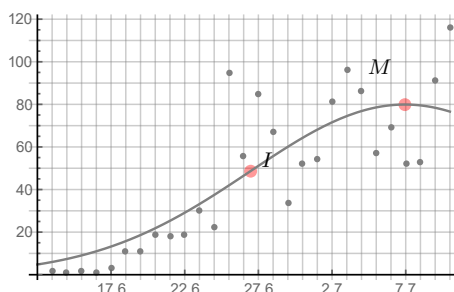
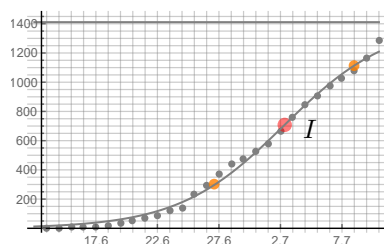


Figure 10: Gausova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (15, 49) \approx (27-6-2020, 49)$ ,  $M = (25, 80) \approx (7-7-2020, 80)$

### 6.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

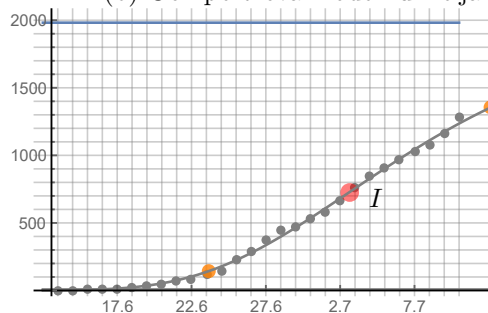


Figure 11: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (21, 706) \approx (3-7-2020, 706)$ ,  $A = 1412$

**Gompertzova:**  $I = (21, 730) \approx (3-7-2020, 730)$ ,  $A = 1982$

Faza	Logistički model	Gompertzov model
Pojavljivanje	13.6 - 27.6	13.6 - 24.6
Intenzivni rast	27.6 - 8.7	24.6 - 13.7
Usporavanje	8.7 -	13.7 -

Table 5: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)



## 7 Stanje 30. dana (12-7-2020)

### 7.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

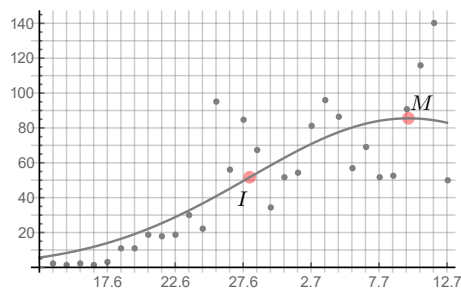


Figure 12: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (16, 52) \approx (28-6-2020, 52)$ ,  $M = (28, 86) \approx (10-7-2020, 86)$

### 7.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

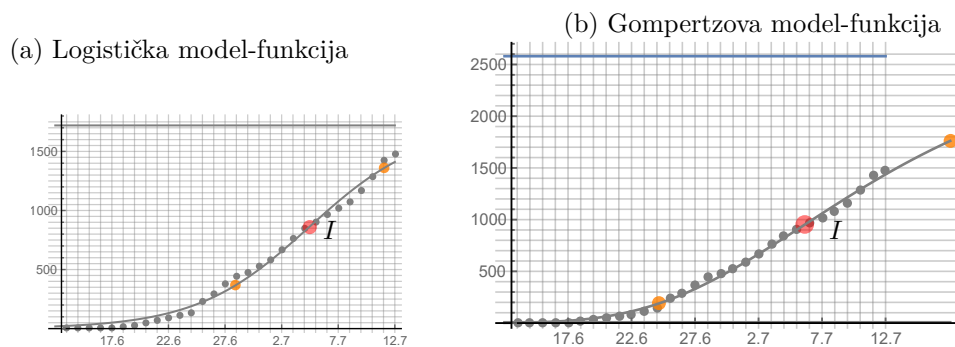


Figure 13: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (23, 861) \approx (5-7-2020, 861)$ ,  $A = 1721$

**Gompertzova:**  $I = (24, 950) \approx (6-7-2020, 950)$ ,  $A = 2580$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	13.6	- 28.6	13.6	- 25.6
Intenzivni rast	28.6	- 12.7	25.6	- 18.7
Usporavanje	12.7	-	18.7	-

Table 6: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

## 8 Stanje 34. dana (16-7-2020)

### 8.1 Dnevni podaci – Gausova model-funkcija

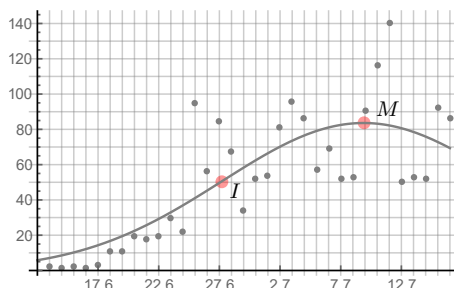


Figure 14: Gausova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (16, 51) \approx (28-6-2020, 52)$ ,  $M = (27, 84) \approx (11-7-2020, 86)$

### 8.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

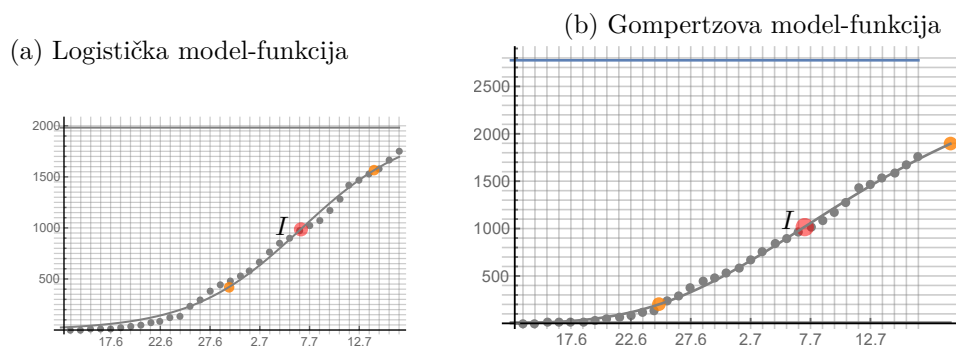


Figure 15: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (25, 991) \approx (7-7-2020, 861)$ ,  $A = 1982$

**Gompertzova:**  $I = (25, 1022) \approx (7-7-2020, 950)$ ,  $A = 2776$

Faza	Logistički model	Gompertzov model
Pojavljivanje	13.6 - 29.6	13.6 - 25.6
Intenzivni rast	29.6 - 14.7	25.6 - 19.7
Usporavanje	14.7 -	19.7 -

Table 7: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

## 9 Stanje 45. dana (27-7-2020)

### 9.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

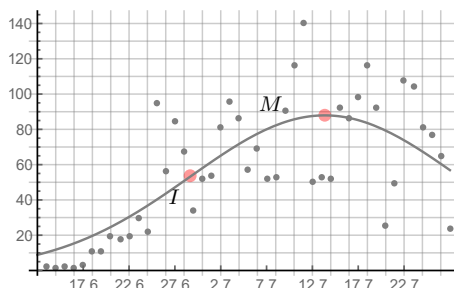
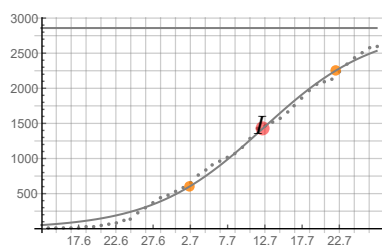


Figure 16: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 14-6-2020)

Karakteristične točke:  $I = (17, 54) \approx (29-6-2020, 54)$ ,  $M = (32, 88) \approx (14-7-2020, 88)$

### 9.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

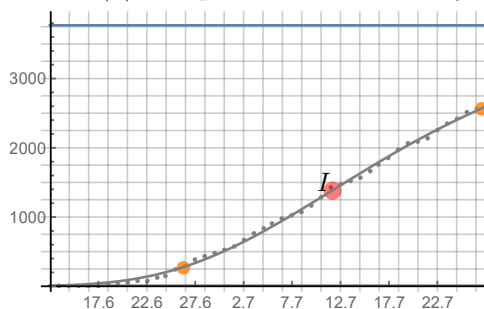


Figure 17: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 14-6-2020)

**Logistička:**  $I = (30, 1430) \approx (12-7-2020, 1430)$ ,  $A = 2859$

**Gompertzova:**  $I = (30, 1387) \approx (12-7-2020, 1387)$ ,  $A = 3770$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	13.6	2.7	13.6	26.6
Intenzivni rast	2.7	22.7	26.6	27.7
Usporavanje	22.7	-	27.7	-

Table 8: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

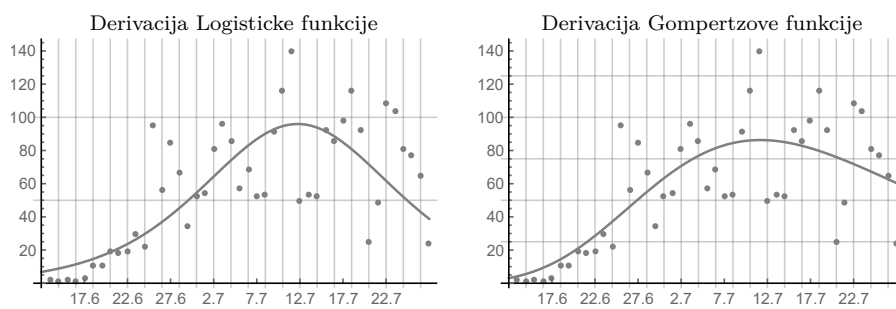


Figure 18: Derivacije model-funkcija s dnevnim podacima