

Procjena karakterističnih točaka broja zaraženih - treći krug: 62 dan (27.07.2020 - 28.09.2020)

1 Uvod: podaci i matematički modeli

Data	27.7	28.7	29.7	30.7	31.7	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8	7.8	8.8	9.8	10.8	11.8	12.8	13.8	14.8	15.8
	16.8	17.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8	24.8	25.8	26.8	27.8	28.8	29.8	30.8	31.8	1.9	2.9	3.9	4.9
	5.9	6.9	7.9	8.9	9.9	10.9	11.9	12.9	13.9	14.9	15.9	16.9	17.9	18.9	19.9	20.9	21.9	22.9	23.9	24.9
25.9	26.9	27.9	28.9																	
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58		
59	60	61	62																	
Dnevno	24	41	71	77	67	86	36	34	24	58	28	62	77	61	45	91	130	180	208	162
	151	85	199	219	255	265	306	275	136	219	358	304	357	312	262	146	145	311	369	334
	311	225	117	204	341	291	190	261	165	151	280	250	234	212	197	70	144	204		
223	190	48	135																	
Kumu	24	65	136	213	280	366	402	436	460	518	546	608	685	746	791	882	1012	1192	1400	1562
lat.	1713	1798	1997	2216	2471	2736	3042	3317	3453	3672	4030	4334	4691	5003	5265	5411	5556	5867	6236	6570
	6881	7106	7223	7427	7768	8059	8249	8510	8675	8826	9106	9356	9590	9802	9999	10069	10213	10417		
10640	10830	10878	11013																	

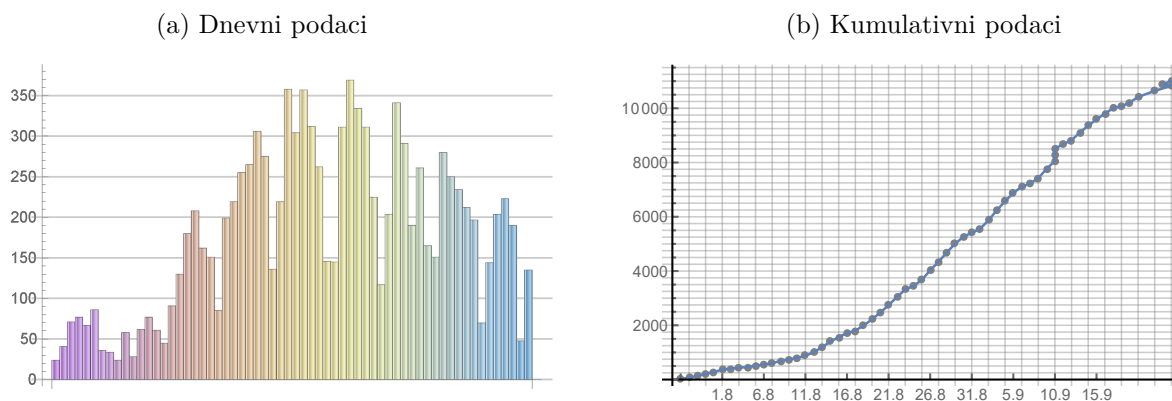


Figure 1: Podaci o broju zaraženih (1. dan odgovara 27-7-2020)

1.0.1 Dnevni podaci

Dnevni podaci fitovat će se pomoću Gaussove model-funkcije [2]

$$f(t; b, c, d) = b e^{-c(t-d)^2}, \quad b, c, d > 0, \quad (1)$$

čije su važne točke

- $I = (t_I, f(t_I))$, $t_I = \frac{-\sqrt{2}+2d\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}$ – točka infleksije,
- $M = (d, f(d))$ – točka maksimuma.

Točka infleksije I predstavlja stanje zaraze u kojoj prestaje progresivni rast i počinje degressivni rast zaraženih. Posebno je važan trenutak t_I u kome se to postiže.

Točka maksimuma M predstavlja vrhunac zaraze, a postiže se u trenutku $t = d$.

1.0.2 Kumulativni podaci

Kumulativni podaci fitovat će se pomoću Logističke model-funkcije [1] i Gompertzove model-funkcije [?]

Logistička model-funkcija

$$f(t; a, b, c) = \frac{a}{1 + b e^{-ct}}, \quad a, b, c > 0, \quad (2)$$

rješenje je diferencijalne jednačbe (matematičkog modela)

$$y' = cy(a - y), \quad a, c > 0. \quad (3)$$

Točka infleksije i faze rasta definirane su prema [3].

- $I = (\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2})$ – točka infleksije,
- $y = a$ – gornja asimptota,
- Faze rasta: Pojavljivanje: $\langle 0, t_B \rangle$, Intenzivni rast: $\langle t_B, t_C \rangle$, Usporavanje: $\langle t_C, \infty \rangle$

$$t_B = \frac{1}{c} \ln \left(\frac{b}{2 + \sqrt{3}} \right), \quad t_C = \frac{1}{c} \ln \left(\frac{b}{2 - \sqrt{3}} \right)$$

Gornja asimptota (razina zasićenja) A predstavlja predvidivo maksimalni broj zaraženih.

Gompertzova model-funkcija

$$f(t; a, b, c) = e^{a - b e^{-ct}}, \quad a, b, c > 0, \quad (4)$$

rješenje je diferencijalne jednačbe (matematičkog modela)

$$y' = cy \ln \left(\frac{e^a}{y} \right), \quad c > 0, a \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Točka infleksije i faze rasta definirane su prema [3].

- $I = (\frac{\ln b}{c}, e^{a-1})$ – točka infleksije,
- $y = e^a$ – gornja asimptota,
- Faze rasta: Pojavljivanje: $\langle 0, t_B \rangle$, Intenzivni rast: $\langle t_B, t_C \rangle$, Usporavanje: $\langle t_C, \infty \rangle$

$$t_B = \frac{1}{c} \ln \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} b \right), \quad t_C = \frac{1}{c} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} b \right)$$

Parametri model-funkcija, točka infleksije i gornja asimptota određuju se na osnovi podataka (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, r$, gdje su t_i trenuci (dani), a y_i broj zaraženih na dan t_i (ili kumulativni broj zaraženih do tog dana). Parametri se određuju rješavanjem nelinearnog problema najmanjih kvadrata [4]

$$\operatorname{argmin}_{a, b, c \in \mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^r (y_i - f(t_i; a, b, c))^2. \quad (6)$$

Ovaj problem možemo riješiti primjenom *Mathematica*-modula `NonlinearModelFit` [5].

References

- [1] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Solution of the least squares problem for logistic function*, J. Comput. Appl. Math., **156**(2003) 159–177.
- [2] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Least squares fitting Gaussian type curve*, Appl. Math. Comput., **167**(2005) 286–298.
- [3] R. SCITOVSKI, *Problemi najmanjih kvadrata. Financijska matematika*, Ekonomski fakultet, Elektrotehnički fakultet, Sveučilište u Osijeku, 1993.
- [4] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, <http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541>.
- [5] I. WOLFRAM RESEARCH, *Mathematica*, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2016, version 11.0 edition.

2 Stanje 31. dana (26-8-2020)

2.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

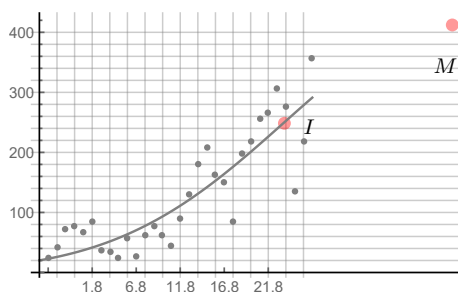
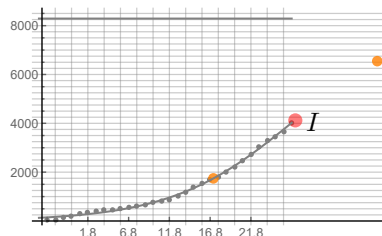


Figure 2: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (28, 250) \approx (23-8-2020, 250)$, $M = (47, 412) \approx (12-9-2020, 412)$

2.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

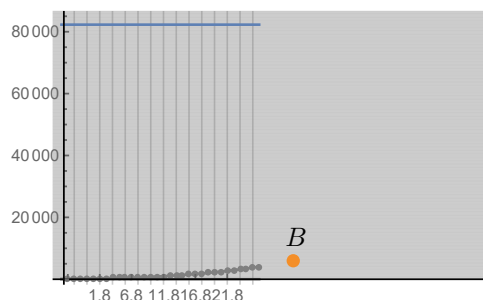


Figure 3: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (32, 4146) \approx (27-8-2020, 4146)$, $A = 8291$

Gompertzova: $I = (74, 30274) \approx (?-10-2020, 30274)$, $A = 82293$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	27.7	- 17.8	27.7	- 2.9
Intenzivni rast	17.8	- 7.9	2.9	- ???
Usporavanje	7.9	-	???	-

Table 1: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

3 Stanje 35. dana (30-8-2020)

3.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

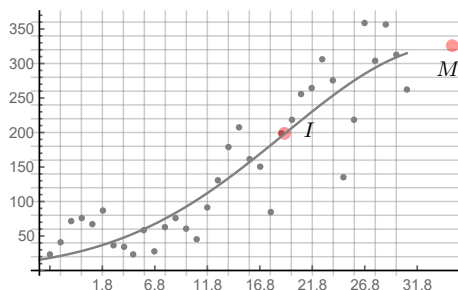
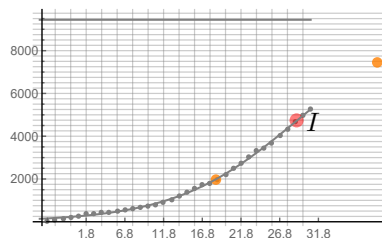


Figure 4: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (24, 199) \approx (19-8-2020, 199)$, $M = (40, 327) \approx (5-9-2020, 327)$

3.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

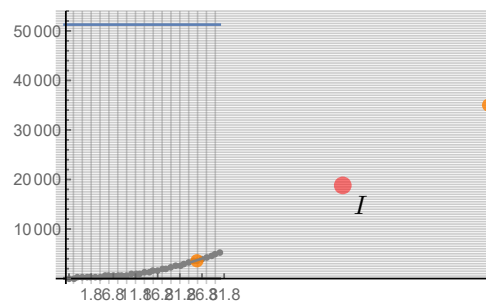


Figure 5: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (34, 4722) \approx (29-8-2020, 4722)$, $A = 9444$

Gompertzova: $I = (63, 18861) \approx (27-8-2020, 18861)$, $A = 51269$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	27.7	- 18.8	27.7	- 26.8
Intenzivni rast	18.8	- 8.9	26.8	- ???
Usporavanje	8.9	-	???	-

Table 2: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

4 Stanje 38. dana (2-9-2020)

4.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

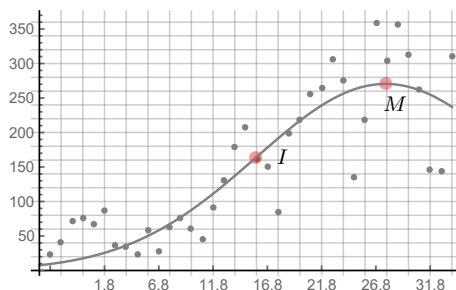
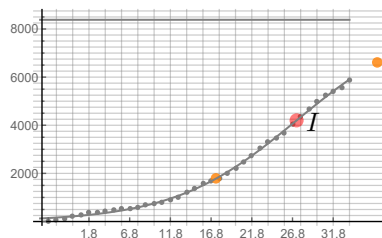


Figure 6: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (20, 165) \approx (15-8-2020, 165)$, $M = (32, 271) \approx (27-8-2020, 271)$

4.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

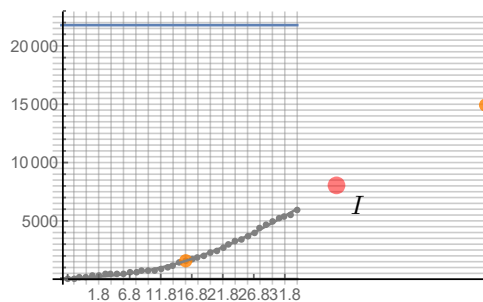


Figure 7: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (32, 4192) \approx (27-8-2020, 4192)$, $A = 8384$

Gompertzova: $I = (45, 8014) \approx (9-9-2020, 8014)$, $A = 21783$

Faza	Logistički model	Gompertzov model
Pojavljivanje	27.7 - 17.8	27.7 - 16.8
Intenzivni rast	17.8 - 6.9	16.8 - 3.10
Usporavanje	6.9 -	3.10 -

Table 3: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

5 Stanje 39. dana (3-9-2020)

5.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

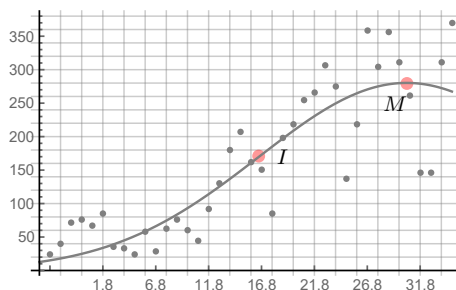
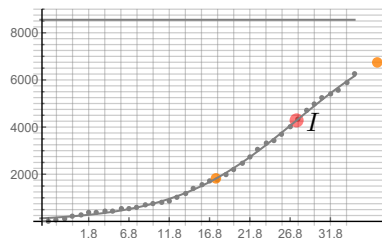


Figure 8: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (21, 170) \approx (16-8-2020, 170)$, $M = (35, 281) \approx (30-8-2020, 281)$

5.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

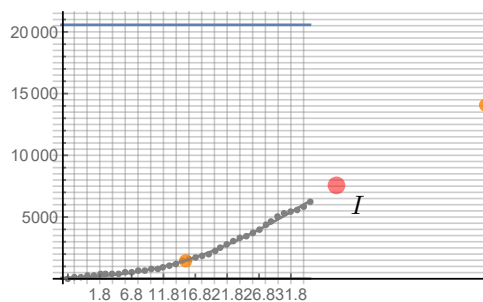


Figure 9: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (32, 4276) \approx (27-8-2020, 4276)$, $A = 8552$

Gompertzova: $I = (44, 7568) \approx (8-9-2020, 7568)$, $A = 20572$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	27.7	- 17.8	27.7	- 15.8
Intenzivni rast	17.8	- 6.9	15.8	- 1.10
Usporavanje	6.9	-	1.10	-

Table 4: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

6 Stanje 42. dana (6-9-2020)

6.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

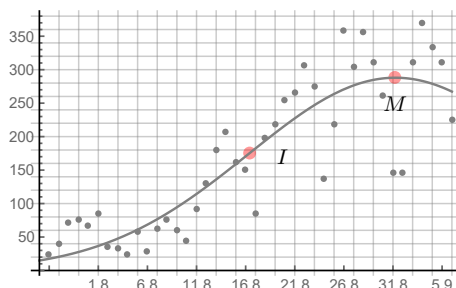
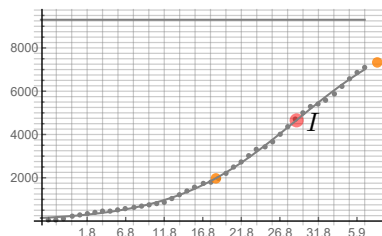


Figure 10: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (22, 175) \approx (17-8-2020, 175)$, $M = (37, 288) \approx (1-9-2020, 288)$

6.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

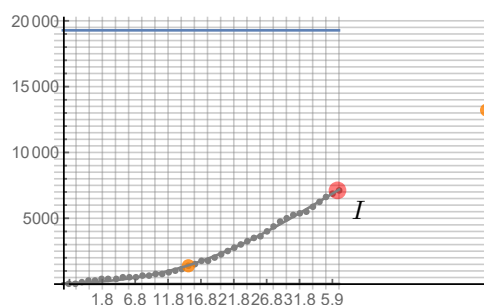


Figure 11: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (34, 4651) \approx (29-8-2020, 4651)$, $A = 9302$

Gompertzova: $I = (42, 7091) \approx (6-9-2020, 7091)$, $A = 19276$

Faza	Logistički model		Gompertzov model	
Pojavljivanje	27.7	- 18.8	27.7	- 14.8
Intenzivni rast	18.8	- 8.9	14.8	- 29.9
Usporavanje	8.9	-	29.9	-

Table 5: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

7 Stanje 48. dana (14-9-2020)

7.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

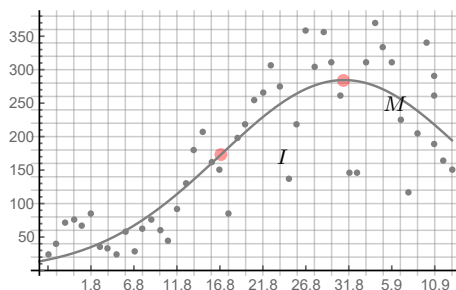
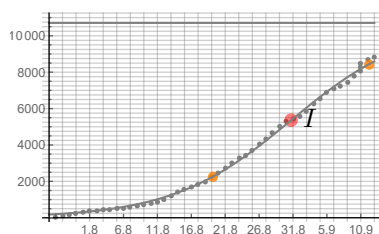


Figure 12: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (22, 173) \approx (17-8-2020, 173)$, $M = (36, 285) \approx (31-8-2020, 285)$

7.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

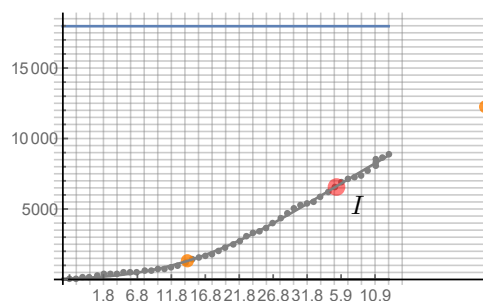


Figure 13: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (36, 5354) \approx (31-8-2020, 4651)$, $A = 10707$

Gompertzova: $I = (41, 6611) \approx (5-9-2020, 6611)$, $A = 17969$

Faza	Logistički model	Gompertzov model
Pojavljivanje	27.7 - 20.8	27.7 - 14.8
Intenzivni rast	20.8 - 12.9	14.8 - 27.9
Usporavanje	12.9 -	27.9 -

Table 6: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

8 Stanje 53. dana (19-9-2020)

8.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

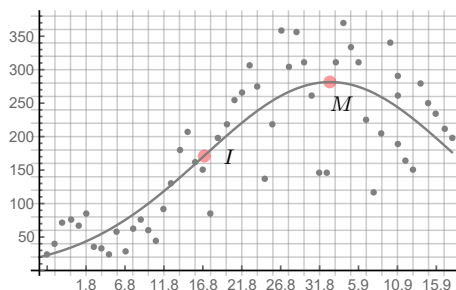
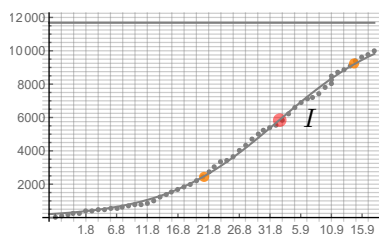


Figure 14: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (22, 171) \approx (17-8-2020, 171)$, $M = (38, 282) \approx (2-9-2020, 282)$

8.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

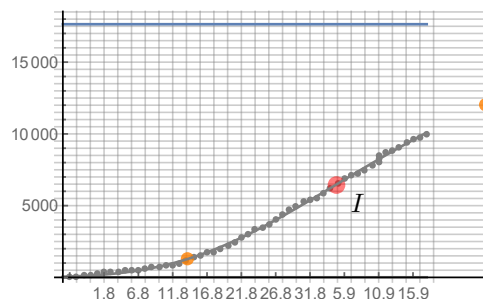


Figure 15: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (38, 5840) \approx (2-9-2020, 5840)$, $A = 11679$

Gompertzova: $I = (40, 6491) \approx (4-9-2020, 6491)$, $A = 17646$

Faza	Logistički model	Gompertzov model
Pojavljivanje	27.7 - 21.8	27.7 - 14.8
Intenzivni rast	21.8 - 14.9	14.8 - 26.9
Usporavanje	14.9 -	26.9 -

Table 7: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

9 Stanje 62. dana (28-9-2020)

9.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

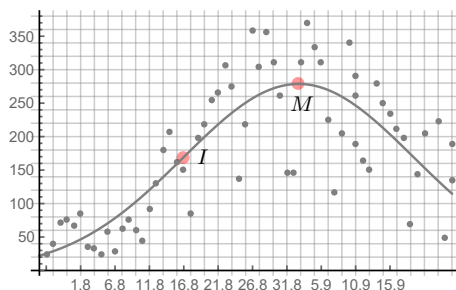
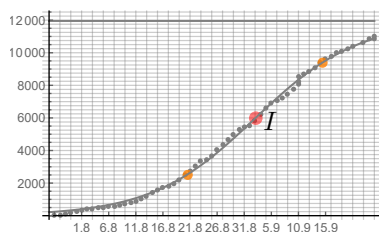


Figure 16: Gaussova model-funkcija (1. dan odgovara 27-7-2020)

Karakteristične točke: $I = (21, 170) \approx (16-8-2020, 170)$, $M = (38, 279) \approx (2-9-2020, 279)$

9.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

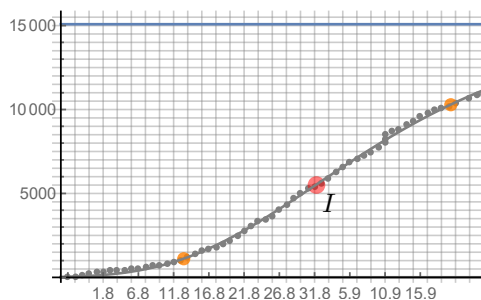


Figure 17: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 27-7-2020)

Logistička: $I = (39, 5977) \approx (3-9-2020, 5840)$, $A = 15083$

Gompertzova: $I = (37, 5549) \approx (1-9-2020, 5549)$, $A = 17646$

Faza	Logistički model	Gompertzov model
Pojavljivanje	27.7 - 21.8	27.7 - 13.8
Intenzivni rast	21.8 - 15.9	13.8 - 20.9
Usporavanje	15.9 -	20.9 -

Table 8: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

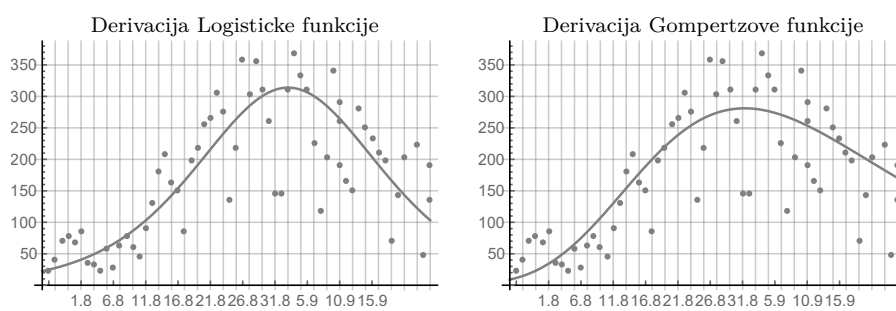


Figure 18: Derivacije model-funkcija s dnevnim podacima