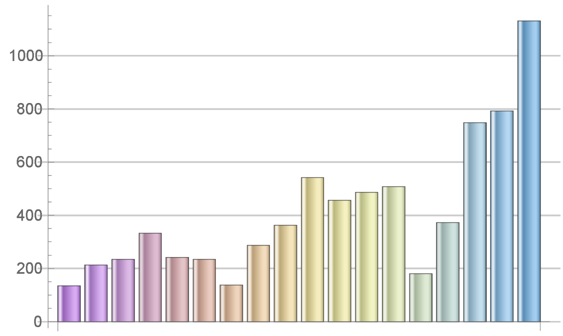
Procjena karakterističnih točaka broja zaraženih - četvrti krug: (28.09.2020 -)

1 Uvod: podaci i matematički modeli

Data	28.9	29.9	30.9	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10	7.10	8.10	9.10	10.10	11.10	12.10	13.10	14.10	15.10
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Dnev-	135	213	234	333	241	234	138	287	363	542	457	486	508	181	372	748	793	1131
Kumu	135	348	582	915	1156	1390	1528	1815	2178	2720	3177	3663	4171	4352	4724	5472	6265	7396

(a) Dnevni podaci



(b) Kumulativni podaci

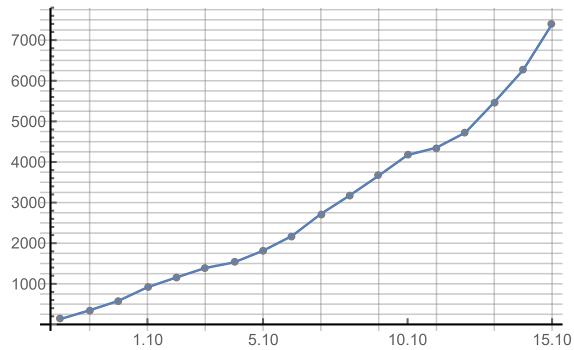


Figure 1: Podaci o broju zaraženih (1. dan odgovara 28-9-2020)

1.0.1 Dnevni podaci

Dnevni podaci fitovat će se pomoću Gaussove model-funkcije [2]

$$f(t; b, c, d) = b\, e^{-c(t-d)^2}, \quad b, c, d > 0, \tag{1}$$

čije su važne točke

- $I = (t_I, f(t_I)), \quad t_I = \frac{-\sqrt{2}+2d\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}$ – točka infleksije,
- $M = (d, f(d))$ – točka maksimuma.

Točka infleksije I predstavlja stanje zaraze u kojoj prestaje progresivni rast i počinje degrsivni rast zaraženih. Posebno je važan trenutak t_I u kome se to postiže.

Točka maksimuma M predstavlja vrhunac zaraze, a postiže se u trnutku $t = d$.

1.0.2 Kumulativni podaci

Kumulativni podaci fitovat će se pomoću Logističke model-funkcije [1] i Gompertzove model-funkcije [?]

Logistička model-funkcija

$$f(t;a,b,c) = \frac{a}{1+b\,e^{-ct}}, \quad a,b,c>0, \tag{2}$$

rješenje je diferencijalne jednadžbe (matematičkog modela)

$$y' = c\,y\,(a-y), \quad a,c>0. \tag{3}$$

Točka infleksije i faze rasta definirane su prema [3].

- $I = (\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2})$ – točka infleksije,
- $y = a$ – gornja asimptota,
- Faze rasta: Pojavljivanje: $\langle 0, t_B\rangle$, Intenzivni rast: $\langle t_B, t_C\rangle$, Usporavanje: $\langle t_C, \infty\rangle$
  $t_B = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{b}{2+\sqrt{3}}\right), \qquad t_C = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{b}{2-\sqrt{3}}\right)$

Gornja asimptota (razina zasićenja) A predstavlja predvidivo maksimalni broj zaraženih.

Gompertzova model-funkcija

$$f(t;a,b,c) = e^{a-b\,e^{-c\,t}}, \quad a,b,c>0, \tag{4}$$

rješenje je diferencijalne jednadžbe (matematičkog modela)

$$y' = c\,y\,\ln\left(\frac{e^a}{y}\right), \quad c>0,\ a\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Točka infleksije i faze rasta definirane su prema [3].

- $I = (\frac{\ln b}{c}, e^{a-1})$ – točka infleksije,
- $y = e^a$ – gornja asimptota,
- Faze rasta: Pojavljivanje: $\langle 0, t_B\rangle$, Intenzivni rast: $\langle t_B, t_C\rangle$, Usporavanje: $\langle t_C, \infty\rangle$
  $t_B = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}b\right), \qquad t_C = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}b\right)$

Parametri model-funkcija, točka infleksije i gornja asimptota određuju se na osnovi podataka (t_i, y_i), $i = 1,\dots,r$, gdje su t_i trenuci (dani), a y_i broj zaraženih na dan t_i (ili kumulativni broj zaraženih do tog dana). Parametri se određuju rješavanjem nelinearnog problema najmanjih kvadrata [4]

$$\underset{a,b,c\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{r} (y_i - f(t_i;a,b,c))^2. \tag{6}$$

Ovaj problem možemo riješiti primjenom *Mathematica*-modula `NonlinearModelFit` [5].

References

[1] D. Jukić, R. Scitovski, *Solution of the least squares problem for logistic function*, J. Comput. Appl. Math., **156**(2003) 159–177.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Least squares fitting Gaussian type curve*, Appl. Math. Comput., **167**(2005) 286–298.

[3] R. Scitovski, *Problemi najmanjih kvadrata. Financijska matematika*, Ekonomski fakultet, Elektrotehnički fakultet, Sveučilište u Osijeku, 1993.

[4] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541`.

[5] I. Wolfram Research, *Mathematica*, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2016, version 11.0 edition.

2 Stanje 15. dana (12-10-2020)

2.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

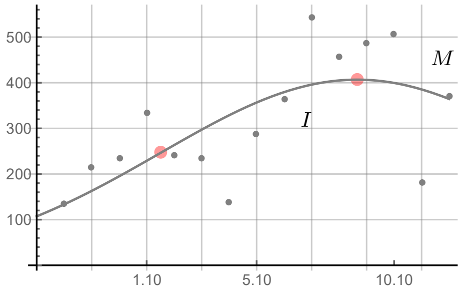
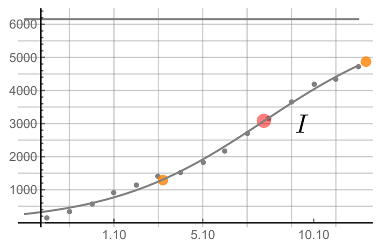


Figure 2: Gausova model-funkcija (1. dan odgovara 28-9-2020)
Karakteristične točke: $I = (5, 247)$ ≈**(2-10-2020,247),** $M = (12, 407)$ ≈**(9-10-2020,407)**

2.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija



(b) Gompertzova model-funkcija

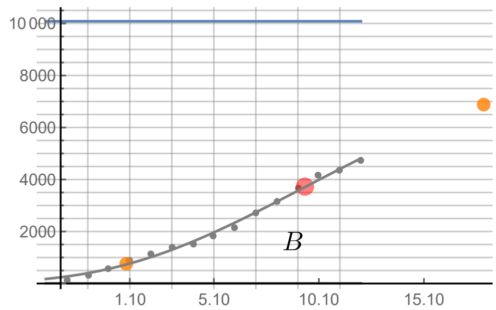


Figure 3: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 28-9-2020)
Logistička: $I = (11, 3079)$ ≈**(8-10-2020,3079),** $A = 6157$
Gompertzova: $I = (13, 3710)$ ≈**(10-10-2020,3710),** $A = 10085$

Faza	Logistički model			Gompertzov model		
Pojavljivanje	28.9	-	4.10	28.9	-	1.10
Intenzivni rast	4.10	-	13.10	1.10	-	18.10
Usporavanje	13.10	-		18.10	-	

Table 1: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

3 Stanje 18. dana (15-10-2020)

3.1 Dnevni podaci – Gaussova model-funkcija

Izračunati parametri nisu realno mogući

3.2 Kumulativni podaci – Logistička i Gompertzova model-funkcija

(a) Logistička model-funkcija

(b) Gompertzova model-funkcija

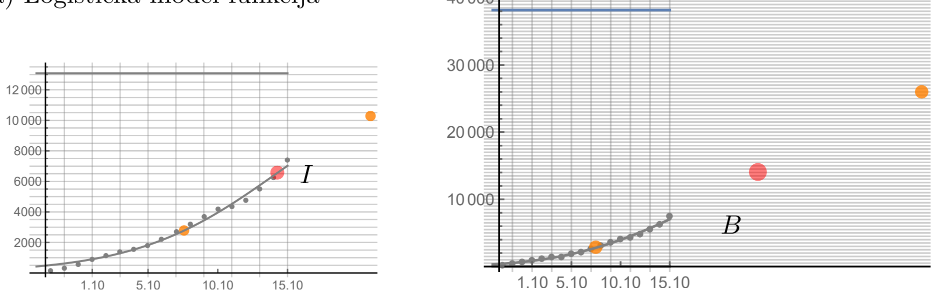


Figure 4: Modeli-funkcija sa zasićenjem (1. dan odgovara 28-9-2020)
Logistička: $I = (18, 6540) \approx$ **(15-10-2020,6540),** $A = 13080$
Gompertzova: $I = (28, 14042) \approx$ **(25-10-2020,14042),** $A = 38169$

Faza	Logistički model			Gompertzov model		
Pojavljivanje	28.9	-	8.10	28.9	-	8.10
Intenzivni rast	8.10	-	21.10	8.10	-	10.11
Usporavanje	21.10	-		10.11	-	

Table 2: Faze rasta (kumulativnog) broja zaraženih osoba (granice su crvene točke)

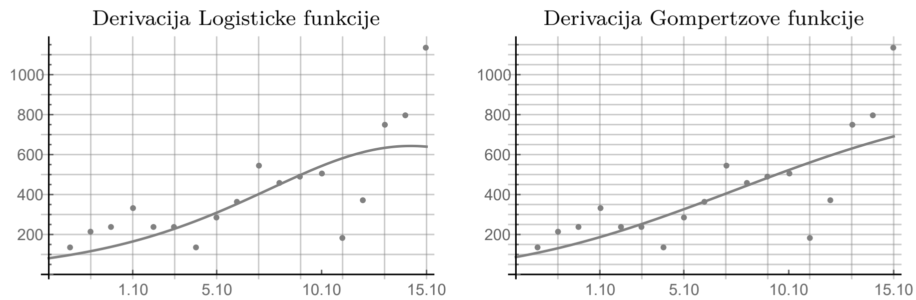


Figure 5: Derivacije model-funkcija s dnevnim podacima