Odjel za matematiku
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Matematički praktikum, 2020./2021.
Prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, `scitowsk@mathos.hr`
Dr. sc. Matea Ugrica, `mugrica@mathos.hr`

Domaće zadaće za studente koji preferiraju bolju ocjenu

Studenti koji žele postići bolju ocjenu iz ovog predmeta mogu izraditi neke od niže navedenih domaćih zadaća. Domaće zadaće pišu se u LaTeX2e u stilu kojim su zadaci napisani i šalju u pdf formatu na e-mail adresu asistenta. Asistent će procijeniti postignuti broj bodova do maksimalno mogućeg. Ako su ilustracije ili primjeri rađeni uz primjenu programskog sustava *Mathematica*, potrebno je priložiti i odgovarajući `.nb` dokument. U „subject" e-mail-a treba upisati „DZ-MP".[1]

Zadatak 1. *[10 bodova]*
Kubna parabola zadana je funkcijom $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = .5x^3 - 6x + 2$.

(a) Gdje bi trebalo postaviti točku $T_0 = (x_0, y_0)$, *tako da funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - x_0)^2 + (q(x) - y_0)^2$ *postigne svoj globalni minimum u barem dvije različite točke?*

(b) Gdje bi trebalo postaviti točku $T_0 = (x_0, y_0)$, *tako da funkcija* $\delta_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\delta_1(x) = |x - x_0| + |q(x) - y_0|$ *postigne svoj globalni minimum u barem dvije različite točke?*

Zadatak 2. *[10 bodova]*
Za danu neprekidnu funkciju q *i točku* $T_0 = (x_0, y_0)$ *pokažite da funkcije* $x \mapsto \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - q(x))^2}$ *i* $x \mapsto (x_0 - x)^2 + (y_0 - q(x))^2$ *postižu lokalni minimum u istoj točki. Zašto?*

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija za koju je* $\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} f(x) = x^\star$. *Napišite barem jedan primjer funkcije* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takve da bude* $\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(f(x)) = x^\star$ *i barem jedan primjer funkcije* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takve da bude* $\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(f(x)) \neq x^\star$. *Obrazložite svoju tvrdnju.*

Zadatak 3. *[15 bodova]*
Zadan je funkcija $q\colon [0,5] \to, \mathbb{R}$, $q(x) = \begin{cases} |x-1|+2, & \text{ako } x \le 2 \\ |x-4|+1, & \text{ako } x > 2 \end{cases}$. *Definirajte funkciju* f *koja predstavlja* ℓ_1*-udaljenost točke* $T_0 = (x_0, y_0)$ *do grafa funkcije* q.

[1] Odgovarajući software može se dobiti kod mr. sc. Petra Talera, voditelja Ureda za informatiku i računalnu mrežu ili kod Jana Valente, ing., višeg informatičkog referenta u Uredu za informatiku i računalnu mrežu

Ako za točku T_0 izaberete (a) $T_1 = (2, 4)$ ili (b) $T_2 = (3, 4)$ ili (c) $T_3 = (3, 1)$, napišite odgovarajuću funkcije f i odredite točku/točke globalnog minimuma funkcije f. Nacrtajte odgovarajuće slike.
Upute: *Pojam i svojstva apsolutne vrijednosti pogledajte u [3], a problem globalne optimizacije u [8].*

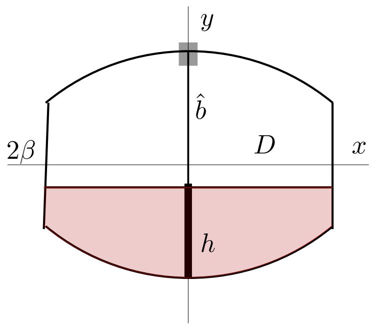
Zadatak 4. *[15 bodova]*
Za dani skup $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i): i = 1, \ldots, m\}$ u ravnini s težinama $w_i > 0$ treba odrediti pravac u eksplicitnom obliku za koji se postiže najmanja težinska suma kvadrata vertikalnih odstupanja.

Objasnite značenje analogne formule (1.18) iz [8] u ovom slučaju.

Upute: *Promatrajte problem određivanja najboljeg težinskog pravca zadanog u eksplicitnom obliku koji prolazi centroidom podataka $(\bar{x}, \bar{y})$. Koje točke podataka $T_i = (x_i, y_i)$ imaju veći, a koje manji utjecaj na optimalnu vrijednost parametra k? (vidi [2])*

Zadatak 5. *[20 bodova]*
Za dani skup $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i): i = 1, \ldots, m\}$ u ravnini s težinama $w_i > 0$ treba odrediti pravac u eksplicitnom obliku za koji se postiže najmanja težinska suma apsolutnih vertikalnih odstupanja primjenom Two Points Method iz [4]. Metodu testirajte na nekoliko umjetnih skupova podataka.

Zadatak 6. *[20 bodova]*
Za dani skup $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i): i = 1, \ldots, m\}$ u ravnini s težinama $w_i > 0$ treba odrediti pravac u eksplicitnom obliku za koji se postiže najmanja težinska suma apsolutnih vertikalnih odstupanja primjenom Iterative Rewighted Least Squares Method iz [4]. Metodu testirajte na nekoliko umjetnih skupova podataka.



Slika 1: Količina "vina" u dvodimenzionalnom buretu

Zadatak 7. *[20 bodova]*
Za elipsu u ravnini sa središtem u ishodištu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ poznata je mala poluos $\hat{b}$ i njena "širina" 2β na udaljenosti $\frac{D}{2}$ od ishodišta (vidi sliku 1).

(a) *Odredite veliku poluos $\hat{a}$ elipse.*

(b) *Odredite površinu elipse između pravaca $x = -\frac{D}{2}$ i $x = \frac{D}{2}$.*

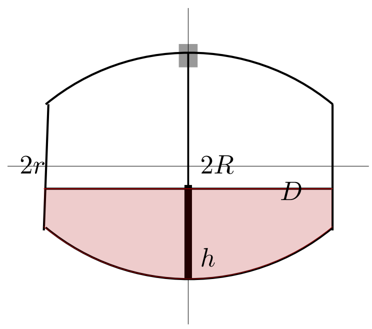
(c) Odredite površinu dijela krnje elipse određene pravcem: $y = h$, za proizvoljni $h \in [-\hat{b}, \hat{b}]$.

Uputa:
Jednadžba tražene elipse s poluosima $\hat{a}$ i $\hat{b}$ je: $\frac{x^2}{\hat{a}^2} + \frac{y^2}{\hat{b}^2} = 1$. Nepoznatu poluos $\hat{a}$ treba odrediti na osnovi "širine" 2β na udaljenosti $\frac{D}{2}$ od ishodišta.

Zadatak 8. *[20 bodova]*
Poznat je vanjski opseg bureta na rubu o i u sredini O, vanjska širina bureta D_V i debljina stjenke bureta d.

(a) Odredite volumen unutrašnjosti bureta

(b) Ako je razina vina u buretu h, treba približno odrediti količinu vina u buretu (u litrama ℓ).



Slika 2: Količina vina u buretu

Upute:
Radijus unutrašnjeg kruga na rubu bureta iznutra je: $r = \frac{o}{2\pi} - 2d$;
Radijus unutrašnjeg kruga na sredini bureta iznutra je: $R = \frac{O}{2\pi} - 2d$;
Unutrašnja širina bureta: $D = D_V - 2d$.
(a) Volumen cijelog unutrašnjeg bureta dobije se primjenom Pappus–Guldinus theorem II, a izračunao ga je Johan Kepler (1571–1630): $V = \frac{D}{3}\left(2R^2 + r^2\right)$

Zadatak 9. *[20 bodova]*
Zadan je pravac p, u ravnini u normaliziranom obliku $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ i proizvoljna točka $T = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dokažite da vrijedi

(i) *$n_0 = (\alpha, \beta)$ je jedinični vektor okomit na pravac p;*

(ii) *jedinični vektor $u_0 = (\beta, -\alpha)$ određuje smjer pravca p;*

(iii) *euklidska udaljenostod točke T do pravca p dana je formulom*

$$d(T, p) = |\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|; \tag{1}$$

(iv) *ortogonalna projekcija T_p točke T na pravac p dana je formulom*

$$T_p = \langle T, u_0 \rangle \, u_0 - \gamma \, n_0, \tag{2}$$

gdje $\langle \ , \ \rangle$ označava uobičajeni skalarni produkt.

Zadatak 10. *[15 bodova]*
Neka je $\mathcal{A} = \{a_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, m\}$, *skup podataka s težinama* $w_i > 0$. *Parametri* $\hat{k}, \hat{\ell}$ najboljeg LS-pravca $y = \hat{k}x + \hat{\ell}$ *definirani su kao rješenje sljedećeg globalno optimizacijskog problema (vidi primjerice [1, 4]):*

$$\operatorname*{argmin}_{k,\ell \in \mathbb{R}} F_{LS}(k, \ell), \qquad F_{LS}(k, \ell) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - kx_i - \ell)^2. \tag{3}$$

Postoji li uvijek rješenje problema (3)*? Prolazi li najbolji* ***LS****-pravac centroidom podataka?*

Zadatak 11. *[15 bodova]*
Neka je p *pravac u ravnini zadan s* $y = kx + \ell$ *i neka je* $T = (x_0, y_0)$ *točka u toj ravnini. Pokažite da je euklidska udaljenost od točke* T *do pravca* p *i ortogonalna projekcija* T_p *točke* T *na pravac* p *zadana s*

$$d(T, p) = \frac{|kx_0 + \ell - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad T_p = \tfrac{1}{k^2+1}(-k\ell + x_0 + ky_0,\, \ell + k(x_0 + ky_0)).$$

Zadatak 12. *[20 bodova]*
Za skup podataka $\mathcal{A} = \{a^i = (x_1, y_i) \colon i = 1, \dots, m\}$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$ *promatrajte problem traženja najboljeg* ***LAD****-pravca*

$$\operatorname*{argmin}_{k,l \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{m} w_i |y_i - kx_i - \ell|$$

Generirajte odgovarajuće podatke i potražite najbolji ***LAD****-pravac uz primjenu* Coordinate Descent Algorithm.
Uputa: Koristite težinski medijan podataka.

Zadatak 13. *[20 bodova]*
Za skup podataka $\mathcal{A} = \{a^i = (x_1, y_i) \colon i = 1, \dots, m\}$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$ *promatrajte problem traženja najboljeg* ***OD****-pravca (vidi [8, str.23]).*

Generirajte odgovarajuće podatke i potražite najbolji ***OD****-pravac u eksplicitnom obliku uz primjenu* Coordinate Descent Algorithm.
Uputa: Pravac tražite u obliku $y = kx + \ell$. *U iterativnom postupku parametar* ℓ *odredite kao težinski medijan, a parametar* k *primjenom* Nelder-Meadove *metode ili* Metodom tri točke *(vidi [8, str.50]).*

Zadatak 14. *[20 bodova]*
Za skup podataka $\mathcal{A} = \{a^i = (x_1, y_i) \colon i = 1, \dots, m\}$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$ *promatrajte problem traženja najboljeg* ***TLS****-pravca u eksplicitnom obliku. Korištenjem činjenice da najbolji* ***TLS****-pravac prolazi centroidom podataka* (x_p, y_p) *problem glasi*

$$\operatorname*{argmin}_{k \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{m} w_i \frac{(y_i - y_p - k(x_i - x_p))^2}{k^2 + 1}.$$

Generirajte odgovarajuće podatke i potražite najbolji ***TLS****-pravac u eksplicitnom obliku uz primjenu* Metode sekanti *(vidi [8, str.48]) ili* Metode tri točke *(vidi [8, str.50]).*

Zadatak 15. *[10 bodova]*
Potražite kvadratnu funkciju $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ čiji graf prolazi točkama $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ primjenom Newtonovog oblika interpolacijskog polinoma drugog reda i tada odredite točku $\overline{x} := \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(x) = -\frac{\beta}{2\alpha}$ (vidi [8, str.50]).

Zadatak 16. *[5 bodova]*
Pokažite da je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rastuća onda i samo onda ako vrijedi

$$(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b],\, x_1 < x_2,$$

a da je padajuća onda i samo onda ako vrijedi

$$(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b],\, x_1 < x_2.$$

Zadatak 17. (maksimalno 10 bodova)
Zadane su dvije točke A, B u prostoru. Kako se može definirati točka T_1 na dužini $\overline{AB}$, a kako točka T_2 izvan dužine $\overline{AB}$, ali na pravcu koji prolazi točkama A, B.

Zadatak 18. *[5 bodova]*
Dokažite da je svaka konveksna funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ujedno i kvazikonveksna. Navedite primjer.

Zadatak 19. *[5 bodova]*
Dokažite da je svaka monotona funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ujedno i kvazikonveksna. Navedite primjer.

Zadatak 20. *[5 bodova]*
Dokažite da ako su funkcije f_i, $i = 1, \ldots, m$, kvazikonveksne na $\mathcal{D}$, onda je i funkcija $f(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ također kvazikonveksna na $\mathcal{D}$. Navedite primjer.

Zadatak 21. *[10 bodova]*
Je li zbroj dvije kvazikonveksne funkcije također kvazikonveksna funkcija ? Za podatke (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, funkcija $c \mapsto |e^{ct_i} - y_i|$ je kvazikonveksna. Je li i sljedeća funkcija kvazikonveksna

$$F(c) = \sum_{i=1}^{m} |e^{ct_i} - y_i| \ ?$$

Zadatak 22. *[15 bodova]*
Provjerite jesu li sljedeće funkcije kvazikonveksne.

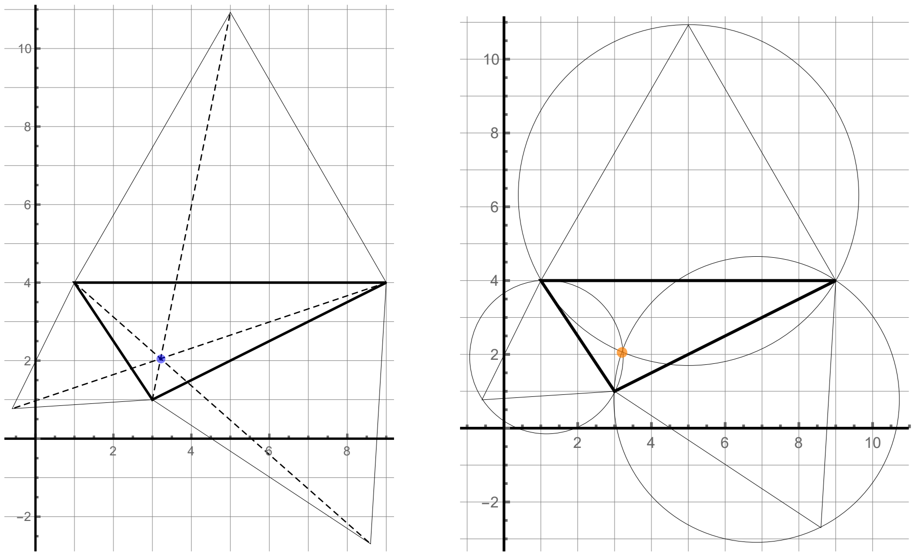
(a) $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon c^T x + d > 0\}$ *zadana s* $f(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$, *gdje su* $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$.

(b) $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\}$ *zadana s* $f(x) = \frac{\|x-a\|_2}{\|x-b\|_2}$, *gdje su* $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Zadatak 23. *[20 bodova]*
Zadan je trokut $\triangle ABC$ s vrhovima: $A = (3, 1)$, $B = (9, 4)$, $C = (1, 4)$. Odredite vrhove A_1, B_1, C_1 istostraničnih trokuta nad stranicama trokuta $\triangle ABC$ i sjecište pravaca određenih točkama: $\{A, A_1\}$, $\{B, B_1\}$, $\{C, C_1\}$ (vidi Sliku 3(a)). Što predstavlja dobiveno sjecište (vidi [5, 7, 8])?

Zadatak 24. *[20 bodova]*
Zadan je trokut $\triangle ABC$ s vrhovima: $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (1, 2)$. Odredite vrhove A_1, B_1, C_1 istostraničnih trokuta nad stranicama trokuta $\triangle ABC$, opisane kružnice nad tim istostraničnim trokuima i sjecište tih kružnica (vidi Sliku 3(b)). Što predstavlja sjecište tih kružnica(vidi [5, 7, 8])?

(a) Sjecište pravaca (b) Sjecište kružnica



Slika 3: Torricellijevi pravci i Simpsonove kružnice

Zadatak 25. *[10 bodova]*
Neka je $[a, b] \subset \mathbb{R}$ interval realnih brojeva.
(a) Pokažite da točka $x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b - a)$ dijeli interval $[a, b]$ u omjeru zlatnog reza.
(b) Pokažite da točka $x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b - a)$ dijeli interval $[a, b]$ u omjeru zlatnog reza.

Zadatak 26. *[10 bodova]*
Za funkciju $f\colon [0, 9] \to \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & 0 \le x \le 3, \\ 4 - \frac{1}{2}(x - 5)^2, & 3 < x \le 7, \\ \frac{1}{2}(x - 9)^2, & 7 < x \le 9, \end{cases}$$

Metodom slomljenih pravaca *odredite u_3 uz početnu točku $u_0 = 4$.*

Zadatak 27. *[10 bodova]*
Za $u_0 = -6$ Metodom slomljenih pravaca *odredite prve tri aproksimacije točke globalnog minimuma funkcije* $f\colon [-6, 12] \to \mathbb{R}$ *zadane s*

$$f(x) = \min\{|x-1|+1, |x-8|+2\}.$$

Zadatak 28. *[15 bodova]*
Za funkciju $f\colon [-6, 12] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{|x-1|+1, |x-8|+2\}$ *odredite Lipschitzovu konstantu te koristeći taj rezultat provedite prve tri iteracije* Algoritma ***DIRECT***. *Za dobivene intervale grafički prikažite točke* $T_i = (d_i, f(c_i))$, *gdje je* d_i *poluširina a* c_i *centar* i*-tog intervala. Odredite koji su intervali potencijalno optimalni te za njih odredite dozvoljeni raspon konstante* $\hat{L}$ *u Definiciji 4.2, str.90.*

Zadatak 29. *[15 bodova]*
Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-neprekidna funkcija s konstantom* $L > 0$. *Pokažite da je* $x \mapsto \mathcal{B}(a, b, f, L)$, $\mathcal{B}(a, b, f, L) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{L}{2}(b-a)$ *donja ograd funkcije* f *na intervalu* $[a, b]$.

Odrdite $\mathcal{B}$*-vrijednost za funkciju iz [6, str. 72], Primjer 4.5, na intervalu* $[1, 6]$ *te na intervalima* $[a+(i-1)h, a+ih]$, $h = \frac{b-a}{n}$ *za* $i = 1, \dots, n$ *i n=2,3,4,5.*

Zadatak 30. *[15 bodova]*
Odredite dijagonalnu matricu D *i vektor* ω *tako da preslikavanje* $T(x) = D\,x + \omega$ *preslikava pravokutnik* $[a, b] \times [c, d]$ *na jedinični kadrat* $[0, 1]^2$.

Zadatak 31. *[20 bodova]*
Jesu li s točke $T_1 = (0, -4)$, $T_2 = (6, 2)$, $T_3 = (3, 5)$, $T_4 = (-3, -1)$ *vrhovi pravokutnika? Nacrtajte! Odredite preslikavanje koje će četverokut* $[T_1T_2T_3T_4]$ *preslikati na jedinični kvadrat* $[0, 1]^2$.

Zadatak 32. *[15 bodova]*
Neka je $g\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz neprekidna funkcija s konstantom* $L > 0$ *i* $T\colon [a, b] \times [c, d] \to [0, 1]^2$, $T(x) = A(x - u)$, $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d-c} \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$. *Pokažite da je i* $f = g \circ T^{-1}\colon [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ *također Lipschitz neprekidna funkcija i odredite odgovarajuću Lipschitzovu konstantu* L_1.

Zadatak 33. *[20 bodova]*
Neka su a_i, b_i, $i = 1, \dots, n$, $(n \geq 2)$, *realni brojevi takvi da je* $b_i > a_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. *Definirajte preslikavanje* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *koje hiperpravokutnik* $\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ *preslikava u jedinični hiperkvadrat* $[0, 1]^n$.

Zadatak 34. *[20 bodova]*
Neka je $g\colon \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz neprekidna funkcija s konstantom* $L > 0$. *Transformirajte domenu funkcije* g *na jedinični hiperkvadrat* $[0, 1]^n$ *i pokažite da je novodobivena funkcija također Lipschitz neprekidna te odredite odgovarajuću Lipschitzovu konstantu* L_1.

Zadatak 35. *[20 bodova]*
Zadana je funkcija $g\colon [-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$*,*

$$g(x_1,x_2)=\max\left\{|2x_1-x_2-1|,|x_1+x_2|\right\}.$$

(a) Odredite globalni minimizator funkcije g*.*

(b) Odredite funkciju f *dobivenu transformacijom funkcije* g *na jedinični kvadrat. Što je globalni minimizator tako dobivene funkcije?*

(c) Napravite dvije iteracije Algoritma ***DIRECT*** *te skicirajte kako bi se dalje dijelili pravokutnici.*

(d) Koja je aproksimacija globalnog minimizatora polazne funkcije g*?*

Literatura

[1] N. Chernov, *Circular and linear regression: Fitting circles and lines by least squares*, volume 117 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman & Hall/CRC, London, 2010.

[2] Y. Dodge, editor, *Statistical data analysis based on the L1-norm and related methods, Proceedings of the Third International Conference on Statistical Data Analysis Based on the L1-norm and Related Methods*. Elsevier, 1997.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707`.

[4] K. Sabo, R. Scitovski, *The best least absolute deviations line – properties and two efficient methods*, ANZIAM Journal, **50**(2008) 185–198.

[5] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541`.

[6] R. Scitovski, *A new global optimization method for a symmetric lipschitz continuous function and application to searching for a globally optimal partition of a one-dimensional set*, Journal of Global Optimization, (2017), DOI: 10.1007/s10898-017-0510-4.

[7] R. Scitovski, M. B. Alić, *Grupiranje podataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016, `http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ASP-2016.pdf`.

[8] R. Scitovski, K. Sabo, D. Grahovac, *Globalna optimizacija*, Odjel za matematiku, 2017, (In Croatian) `https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/GOP.pdf`.