Linearna algebra I [1]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković[2]

10. studenoga 2020.

[1]Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[2]scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.

2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.

3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

Sadržaj

Poglavlje 2

Matrice

Definicija 2.1. *Neka je* $\mathbf{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *polje, a* $m, n \geq 1$ *prirodni brojevi. Preslikavanje*

$$A\colon \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbf{F}$$

zovemo ***matrica tipa*** (m, n)*, a vrijednost* $A(i, j) \in \mathbf{F}$ *element (koeficijent) matrice. Element matrice* A *neki puta ćemo označavati s* a_{ij} *ili* $[A]_{ij}$*.*

Uobičajeno je da se skup svih vrijednosti preslikavanja A također zove matrica i označava kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad A = [a_{ij}]. \tag{2.1}$$

Skup svih matrica tipa (m, n) označavamo s M_{mn}. Specijalno ako je $m = n$, govorimo o skupu kvadratnih matrica M_n.

Primjer 2.1. *Nul matrica* O *je matrica čiji su svi elementi jednaki* 0*;*
Jedinična matrica $I \in M_n$ *je kvadratna matrica koja se zapisuje pomoću Kroneckerovog simbola* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & ako\ i = j \\ 0, & ako\ i \neq j \end{cases}$.
Glavnu dijagonalu matrice A *čine elementi* $a_{11}, a_{22}, \ldots$*;*
Dijagonalna matrica je kvadratna matrica $D \in M_n$ *kojoj svi elementi izvan glavne dijagonale iščezavaju. Pišemo je kao* $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$*;*
Za matricu U *kažemo da je gornjetrokutasta (donjetrokutasta) ako svi njeni elementi ispod (iznad) glavne dijagonale iščezavaju;*

A je **simetrična matrica** *ako vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$;*
A je **antisimetrična matrica** *ako vrijedi $a_{ij} = -a_{ji}$;*
Matrica koju dobijemo od matrice A zamjenom redaka i stupaca naziva se **transponirana matrica** *i označava s A^T. Za simetričnu matricu A vrijedi $A^T = A$, a za antisimetričnu $A^T = -A$;*
Kažemo da su dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ **jednake**, *ako su istog tipa i ako su im svi odgovarajući elementi jednaki $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.*

2.1 Računske operacije

a) **Zbrajanje matrica**
Za dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ zbroj $A + B$ je matrica $C \in M_{mn}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

b) **Množenje matrice sa skalarom**
Za matricu $A \in M_{mn}$ i skalar $\lambda \in \mathbf{F}$ produkt λA je matrica $D \in M_{mn}$ s elementima

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Primjer 2.2. *$(M_{mn}, +, \cdot)$ je vektorski prostor dimenzije $m \cdot n$.*

Zadatak 2.1. Odredite barem jednu bazu u vektorskom prostoru M_{23}.

c) **Množenje matrica**
Kažemo da su matrice $A \in M_{mr}$, $B \in M_{sn}$ **ulančane** ako je $r = s$. Za dvije ulančane matrice $A \in M_{mr}$, $B \in M_{rn}$ njihov produkt $A \cdot B$ je matrica $C \in M_{mn}$ s elementima

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Primjer 2.3. *Navest ćemo nekoliko primjera koji se najčešće pojavljuju:*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} =: C;$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \end{bmatrix} =: C;$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: C.$$

Svojstva.

(a) Množenje matrica općenito nije binarna operacija, ali na skupu kvadratnih matrica M_n množenje matrica $\cdot : M_n \times M_n \to M_n$ je binarna operacija;

(b) Za množenje matrica (ako je izvodivo) općenito ne vrijedi zakon komutacije;

(c) Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ i odgovarajuće ulančanu nul-matricu O vrijedi: $A \cdot O = O$ i $O \cdot A = O$;

(d) Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ i odgovarajuće ulančanu jediničnu matricu I vrijedi: $A \cdot I = A$ i $I \cdot A = A$.

Teorem 2.1. *Skup svih kvadratnih matrica M_n snabdjeven binarnom operacijom množenja je asocijativna algebra s jedinicom, tj. za sve $A, B, C \in M_n$ i za svaki $\alpha \in \mathbf{F}$ vrijedi:*

(1) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

(2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

(3) $(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$;

(4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

(5) $I \cdot A = A \cdot I = A$.

Dokaz. Dokazat ćemo samo svojstvo (1). Ostala svojstva dokazuju se analogno.

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.2. Matematičkom indukcijom pokažite da za kvadratne matrice $A_1, \ldots, A_k \in M_n$ vrijedi

$$(A_1 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_1^T.$$

2.2 Svojstva množenja u algebri M_n

- Moguće je pronaći matrice $A, B \in M_n$, $A, B \neq O$, takve da je $AB = O$. Primjerice, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- Za neku matricu $A \in M_n$ moguće je pronaći takvu matricu $B \in M_n$, tako da bude: $AB = BA = I$. Primjerice, za $I \in M_n$, $I \cdot I = I$.

  Navedimo i jedan netrivijalni primjer. Za matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ vrijedi spomenuta jednakost, ali za matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ takva matrica B ne postoji.

Definicija 2.2. *Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je* **regularna** *(nesingularna, invertibilna) ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da je*

$$AB = BA = I. \tag{2.2}$$

Kažemo da je matrica $C \in M_n$ **singularna** *ako nije regularna.*

Primjerice, jedinična matrica $I \in M_n$ je regularna jer vrijedi $I \cdot I = I$.

Propozicija 2.1. *Za regularnu matricu $A \in M_n$ postoji jedinstvena matrica $B \in M_n$ za koju vrijedi* (2.2)*.*

Dokaz. Dokaz ove tvrdnje provest ćemo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji još jedna matrica $D \in M_n$ takva da vrijedi

$$AD = DA = I.$$

Tada je

$$D = D \cdot I = D \cdot (AB) = (DA)B = I \cdot B = B.$$

□

Budući da sukladno Propoziciji 2.1 za regularnu matricu $A \in M_n$ postoji jedinstvena matrica $B \in M_n$ sa svojstvom (2.2), tu matricu označavat ćemo s $A^{-1} \in M_n$ i zvati inverzna matrica matrice $A \in M_n$. Dakle,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{2.3}$$

Skup svih regularnih matrica reda n označit ćemo s GL_n. Skup GL_n nije prazan jer je $I \in GL_n$, ali $GL_n \neq M_n$ jer $O \notin GL_n$.

Sljedeći teorem pokazuje da je skup GL_n snabdjeven binarnom operacijom množenja grupa, koju zovemo [1] opća linearna grupa reda n.

Teorem 2.2.

(1) Produkt dviju regularnih matrica $A, B \in GL_n$ je regularna matrica;

(2) Vrijedi asocijativnost;

(3) Jedinična matrica je u skupu GL_n i za nju vrijedi

$$AI = IA = A, \quad \forall A \in GL_n;$$

(4) Za svaku regularnu matricu $A \in GL_n$ postoji jedinstvena inverzna matrica $A^{-1} \in GL_n$.

Dokaz.

(1) Za dvije regularne matrice $A, B \in GL_n$ njihov produkt AB je također regularna matrica. Naime, lako se može pokazati da je $(AB)^{-1} := B^{-1}A^{-1}$ jer vrijedi:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

(2) Vrijedi asocijativnost na čitavom skupu M_n pa onda i na skupu GL_n. Pri tome za proizvoljne $A, B, C \in GL_n$ i matrice $(AB)C$, $A(BC)$ su regularne.

(3) Jedinična matrica $I \in M_n$ je regularna, a njena inverzna matrica je ponovo I.

(4) Za regularnu matricu $A \in GL_n$ njena inverzna matrica A^{-1} je također regularna i vrijedi $(A^{-1})^{-1} = A$.

□

Zadatak 2.3. Matematičkom indukcijom pokažite da je za regularne matrice $A_1, \ldots, A_k \in GL_n$ njihov produkt također regularna matrica. Što je inverzna matrica matrice $(A_1 \cdots A_k)$?

2.3 Elementarne transformacije nad stupcima i retcima matrice

Uvedimo najprije zapis matrice $A \in M_{mn}$ pomoću njezinih stupaca:

$$A = [a_{ij}] = [a_1, \ldots, a_n], \text{ gdje je } a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

ili redaka

$$A = [a_{ij}] = (a^1, \ldots, a^m), \text{ gdje je } a^1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a^m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

Sada možemo stupce (odnosno retke) promatrati kao vektore, ispitivati njihovu linearnu zavisnost i pomoću njih uvesti vektorske prostore:

$$R(A) = L(a_1, \dots, a_n) : \text{vektorski prostor razapet stupcima matrice;}$$
$$R^\star(A) = L(a^1, \dots, a^m) : \text{vektorski prostor razapet retcima matrice.}$$

Definicija 2.3. *Maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca matrice zovemo* rang matrice po stupcima *(*$\dim R(A)$*), a maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice zovemo* rang matrice po retcima *(*$\dim R^\star(A)$*)*

Rang matrice $A \in M_{mn}$ po stupcima jednak je rangu matrice po retcima i označava se jednostavno s $r(A)$ [1–3].

* * * * *

Pod elementarnim transformacijama nad stupcima i retcima matrice podrazumijevamo:

(1) Izmjena (permutacija) dvaju stupaca (odnosno redaka) matrice;

(2) Množenje jednog stupca (odnosno retka) matrice brojem $\lambda \neq 0$;

(3) Dodavanje nekom stupcu (odnosno retku) nekog drugog stupca (odnosno retka) prethodno pomnoženog nekim brojem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poopćenje svojstva (3) znači da se nekom stupcu (odnosno retku) dodaje proizvoljna linearna kombinacija ostalih stupaca (odnosno redaka).

Ako uvedemo tzv. elementarne matrice, onda se prethodno spomenute elementarne operacije s matricama mogu formalno zapisati kao množenje matrice s nekom elementarnom matricom.

Definicija 2.4. *Neka je* $I = [e_1, \dots, e_n] \in M_n$ *jedinična matrica sa stupcima* $e_1, \dots, e_n$*. Kvadratna matrica* $P_{ij} \in M_n$*,* $i \neq j$ *je matrica koja se iz jednične matrice* I *dobiva permutacijom* i*-tog i* j*-tog stupca.*

Ako neku matricu $A \in M_{mn}$ zdesna pomnožimo nekom matricom $P_{ij} \in M_n$, u matrici A zamijenit će mjesta i-ti i j-ti stupac

$$AP_{ij} = A[\cdots e_j \cdots e_i \cdots] = [\cdots Ae_j \cdots Ae_i \cdots] = [\cdots a_j \cdots a_i \cdots].$$

Primjer 2.4. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. *Tada je* $AP_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ *matrica koja je od matrice* A *dobivena zamjenom drugog i trećeg stupca.*

Zadatak 2.4. Kako treba postupiti s matricom $A \in M_{mn}$ da se od nje dobije matrica u kojoj su i-ti i j-ti redak zamijenili mjesta? Ilustrirajte primjerom.

Zadatak 2.5. Koliko ima svih matrica $P_{ij} \in M_n$? Što je P_{ij}^{-1}?

Definicija 2.5. $P_i(\lambda) \in M_n$, $\lambda \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$ *je matrica koja se od jedinične matrice* I *dobije tako da stupac* e_i *pomnožimo brojem* λ

$$P_i(\lambda) = [\cdots \lambda e_i \cdots].$$

Množenjem zdesna matrice $A \in M_{mn}$ matricom $P_i(\lambda) \in M_n$, i-ti stupac matrice A bit će pomnožen brojem λ

$$AP_i(\lambda) = A[\cdots \lambda e_i \cdots] = [\cdots \lambda A e_i \cdots] = [\cdots \lambda a_i \cdots].$$

Primjerice, ako matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in M_{23}$ zdesna pomnožimo matricom $P_2(\lambda) \in M_3$, dobivamo $AP_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 3 \\ 1 & 2\lambda & -3 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.6. Je li matrica $P_i(\lambda)$ regularna? Ako jest, što je njena inverzna matrica?

Definicija 2.6. $P_i(\lambda; j)$, $i \neq j \in M_n$ *je matrica koja se od jedinične matrice* I *dobije tako da stupcu* e_i *dodamo stupac* e_j *prethodno pomnožen brojem* λ

$$P_i(\lambda; j) = [\cdots e_i + \lambda e_j \cdots e_j \cdots].$$

Množenjem matrice $A \in M_{mn}$ zdesna matricom $P_i(\lambda; j)$, i-tom stupcu matrice A bit će dodan j-ti stupac prethodno pomnožen brojem λ

$$AP_i(\lambda; j) = A[\cdots e_i + \lambda e_j \cdots e_j \cdots] = [\cdots Ae_i + \lambda Ae_j \cdots Ae_j \cdots] = [\cdots a_i + \lambda a_j \cdots a_j \cdots].$$

Primjerice, ako matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in M_{23}$ zdesna pomnožimo matricom $P_2(\lambda; 3) \in M_3$, dobivamo $AP_2(\lambda; 3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 + 3\lambda & 3 \\ 1 & 2 - 3\lambda & -3 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.7. Je li matrica $P_i(\lambda; j)$ regularna? Ako jest, što je njena inverzna matrica?

Primjedba 2.1. *S Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j)$ redom označimo kvadratne matrice reda m koje se dobiju transponiranjem matrica P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j) \in M_m$. Primijetite da su matrice P_{ij} i $P_i(\lambda)$ simetrične, pa je $Q_{ij} = P_{ij}$ i $Q_i(\lambda) = P_i(\lambda)$. Množenje matrice A zdesna matricama P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j) \in M_n$ odgovara elementarnim transformacijama nad stupcima matrice A, a množenje matrice A slijeva matricama Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j) \in M_m$ odgovara elementarnim transformacijama nad retcima matrice A. Matrice tipa P: P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j)$ i matrice tipa Q: Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j)$ su regularne matrice i zovu se elementarne matrice.*

Definicija 2.7. *Za dvije matrice $A, B \in M_{mn}$ kažemo da su ekvivalentne ako se jedna iz druge dobiva primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija ili preciznije, matrice $A, B \in M_{mn}$ su ekvivalentne ako postoje elementarne matrice $P_1, \ldots, P_r$, $Q_1, \ldots, Q_s$ takve da vrijedi*

$$B = Q_1 \cdots Q_s \cdot A \cdot P_1 \cdots P_r. \tag{2.4}$$

Rangovi dviju ekvivalentnih matrica su jednaki.

Zadatak 2.8. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ odredite matrice $Q_1(-5)A$ i $Q_1(-5; 2)A$.

Zadatak 2.9. Množenjem matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ odgovarajućim elementarnim matricama konstruirajte ekvivalentnu gornjetrokutastu matricu $B = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$.

2.4 Praktično određivanje ranga matrice

Kao što smo naveli ranije, retke matrice $A \in M_{mn}$ možemo promatrati kao skup od m vektora, a stupce kao skup od n vektora. Pri tome broj linearno nezavisnih redaka jednak je broju linearno nezavisnih stupaca. Taj broj nazivamo rang matrice A i označavamo s $r(A)$ (vidi Definiciju 2.3).

Množenjem matrice $A \in M_{mn}$ zdesna nekom elementarnom P-matricom ili slijeva nekom elementarnom Q-matricom rang matrice neće se promijeniti. Na taj način elementarnim transformacijama nad retcima i stupcima matricu $A \in M_{mn}$ moguće je svesti na dijagonalnu matricu oblika[1] $A \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$. Broj jedinica ove dijagonalne matrice odgovara rangu[2] $r(A)$ matrice A. Specijalno, matrica $A \in M_n$ je regularna onda i samo onda ako je $r(A) = n$.

Primjer 2.5. *Sukcesivnom primjenom elementarnih transformacija nad retcima i stupcima matrice dobivamo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \overset{P_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 11 & 56 & 5 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-4;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_4(1;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \\ 0 & 4 & 16 & -4 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-3;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & -4 \end{bmatrix} \overset{Q_4(-4;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nadalje, sukcesivnim primjenama elementarnih transformacija nad stupcima moguće je postići $A \sim \ diag(1, 1, 0, 0)$. Dakle, $r(A) = 2$.

Primjer 2.6. *Primjenom elementarnih transformacija nad retcima i stupcima matrice može se pokazati da vrijedi*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $r(A) = 3$.

---

[1] U tu svrhu koristite *Mathematica*-program `ElMatrice.nb` http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ElMatrice.nb.

[2] U programskom sustavu *Mathematica* rang matrice A određuje se naredbom `MatrixRank[A]`

Zadatak 2.10. Odredite rang matrice

$$a)\begin{bmatrix}0&4&10&1\\4&8&18&7\\10&18&40&17\\1&7&17&3\end{bmatrix},\quad b)\begin{bmatrix}14&12&6&8&2\\6&104&21&9&17\\7&6&3&4&1\\35&30&15&20&5\end{bmatrix},\quad c)\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&5\\1&2&3&4\\1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

Rješenje: a) $r = 2$; b) $r = 2$; c) $r = 4$.

Zadatak 2.11. Ispitajte regularnost sljedećih kvadratnih matrica

$$a)\begin{bmatrix}-2&-2&3\\3&3&0\\-4&-4&-1\end{bmatrix}\quad b)\begin{bmatrix}-1&4&3\\-4&0&-1\\-3&2&-3\end{bmatrix}\quad c)\begin{bmatrix}1&3&0&-2\\2&-1&2&1\\1&-4&2&3\\-4&2&-4&-2\end{bmatrix}.$$

Rješenje: a) singularna jer je $r = 2$; b) regularna jer je $r = 3$; c) singularna jer je $r = 2$.

2.5 Invertiranje regularne matrice

Teorem 2.3. *Neka je $A \in GL_n$ i $D \in M_n$, Tada se primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima blok-matrice $[A; D]$ može se dobiti blok-matrica $[I; R_1]$, gdje su $I, R_1 \in M_n$, tj. postoji elementarne matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ takve da je $Q_1, \ldots, Q_r[A; D] = [I; R_1]$.*

Dokaz ovog teorema je konstruktivan (vidi primjerice [3, str. 179]) i nećemo ga navoditi.

Korolar 2.1. *Ako je $A \in GL_n$, onda postoje elementarne matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ i elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_s$ takve da je*

$$A = Q_1 \cdots Q_r, \qquad A = P_1 \cdots P_s. \tag{2.5}$$

Dokaz. Za regularnu matricu A^{-1} Teorem 2.3 daje elementarne Q-matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ takve da je

$$Q_1 \cdots Q_r A^{-1} = I,$$

odakle slijedi $A = Q_1 \cdots Q_r$.

Specijalno, za matricu A^T postoje elementarne Q-matrice $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_s$ takve da je $A^T = \tilde{Q}_1 \cdots \tilde{Q}_s$. Transponiranjem dobivamo

$$A = \tilde{Q}_s^T \cdots \tilde{Q}_1^T,$$

što je prikaz matrice A kao produkt elementarnih P-matrica. □

Specijalno, samo primjenom elementarnih transformacija nad retcima blok matrice $[A; I]$, $A \in GL_n$ možemo dobiti blok matricu $[I; R_1]$, što daje matricu $A^{-1} = R_1$. Naime, prema Teoremu 2.3 za regularnu matricu A postoje elementarne Q-matrice $Q_1, \dots, Q_r$ takve da je

$$Q_1 \cdots Q_r\, [A; I] = [I; R_1],$$

odnosno

$$[Q_1 \cdots Q_r\, A; Q_1 \cdots Q_r\, I] = [I; R_1],$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} Q_1 \cdots Q_r\, A = I \quad &\& \quad Q_1 \cdots Q_r \cdot I = R_1 \\ \Rightarrow R_1 A = I \quad &\Rightarrow \quad R_1 = A^{-1}. \end{aligned}$$

Primjerice,

$$[A; I] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_2(-2;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_3(1;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_{32}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-4;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_1(1;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \overset{Q_2(-1;3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_1(-1;3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Provjerite da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ inverzna matrica matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zadatak 2.12. Ako postoji, odredite inverznu matricu matrice:

$$a)\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad d)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.

[3] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.