# Linearna algebra I [1]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković[2]

6. listopada 2020.

[1]Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[2]scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

## Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.

2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.

3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

# Sadržaj

# Poglavlje 1

# Vektori u ravnini i prostoru

Neka je $E$ skup točaka u prostoru, a $A, B \in E$ dvije proizvoljne točke. Tada skup svih točaka na pravcu određenom točkama $A, B$, a koje leže između točaka $A$ i $B$ zovemo **dužinom** i označavamo s $\overline{AB}$. Ako primjerice, točku $A$ proglasimo početnom, a točku $B$ završnom, onda takvu dužinu nazivamo **usmjerenom dužinom** i označavamo s $\overrightarrow{AB}$.

**Definicija 1.1.** *Kažemo da su dvije usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ **ekvivalentne** *i pišemo* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ *onda ako postoji* translacija prostora *koja točku* $A$ *prevodi u* $A'$*, a točku* $B$ *u* $B'$*.*

**Primjedba 1.1.** *Primijetimo da za dvije ekvivalentne usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *vrijedi*

- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *su paralelne;*
- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *imaju istu orijentaciju, odnosno imaju isti vizualni smisao kretanja od početne prema završnoj točki;*
- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *imaju istu duljinu*[1]*, koju ćemo označiti s* $\|\overrightarrow{AB}\|$*, odnosno s* $\|\overrightarrow{A'B'}\|$.

**Primjedba 1.2.** *Primijetimo još da je ekvivalencija usmjerenih dužina jedna* **relacija ekvivalencije***, tj. da vrijedi*

[1] U literaturi se za duljinu usmjerene dužine pojavljuju još i izrazi: norma, intenzitet, modul.

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (refleksivnost)
2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (simetričnost)
3. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (tranzitivnost)

Sada možemo definirati osnovni pojam – **pojam vektora**:

**Definicija 1.2.** *Vektor $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina,*

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

*Svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{PQ}$ ekvivalentnu usmjerenoj dužini $\overrightarrow{AB}$ nazivamo* **reprezentant** *vektora $\vec{a}$. Pri tome pod* **normom vektora** *podrazumijevamo duljinu bilo kojeg reprezentanta, a označit ćemo ju s $\|\vec{a}\|$.*

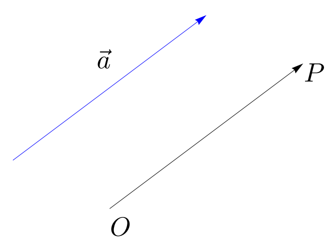
U daljnjem tekstu često ćemo govoriti o vektoru, a crtat ćemo neki njegov reprezentant.

**Primjer 1.1.** Nulvektor *je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju istu početnu i završnu točku. Označavat ćemo ga s $\vec{0}$, pri čemu je $\|\vec{0}\| = 0$.*

Jedinični vektor *zvat ćemo svaki vektor $\vec{e}$ za koga je $\|\vec{e}\| = 1$.*

Suprotni vektor *vektora $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju suprotnu orijentaciju od orijentacije usmjerenih dužina vektora $\vec{a}$ i označavamo ga s $(-\vec{a})$.*

**Primjedba 1.3.** *Ako je $O$ proizvoljna, ali fiksna točka u prostoru $E$, a $\vec{a}$ dani vektor, onda postoji jedinstvena točka $P \in E$, takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$ (vidi Sliku 1.1).*




Slika 1.1:

Navedimo još nekoliko često korištenih pojmova.

- kažemo da su dva ili više vektora kolinearni ako njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima;

- kažemo da su tri ili više vektora komplanarni ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

U daljnjem tekstu koristit ćemo sljedeće oznake [7]:

$X(E)$ – skup svih vektora u prostoru $E$;
$X(M)$ – skup svih vektora u ravnini $M$;
$X(p)$ – skup svih vektora na pravcu $p$.

Ako izaberemo jednu fiksnu točku $O \in E$, onda svakoj točki $P \in E$ pripada jedinstvena usmjerena dužina $\overrightarrow{OP}$, koju zovemo **radijvektor** ili vektor položaja [1, 5, 7] (vidi takodjer *Dodatak: Vektori* u [12]). Skup svih ovakvih radijvektora označit ćemo s

$$X_0 = X_0(E) := \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}.$$

Očigledno postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova $E$ i $X_0$.

*Zadatak* 1.1. Napišite definiciju realacije ekvivalencije.

a) U skupu $\mathbb{Z}$ definirana je relacija „djeljivosti" na sljedeći način: Cijeli broj $a$ je u relaciji $\rho$ s cijelim brojem $b$ i pišemo $a\rho b$ ako je $a$ djeljiv s $b$. Zašto relacija $\rho$ nije relacija ekvivalencije?

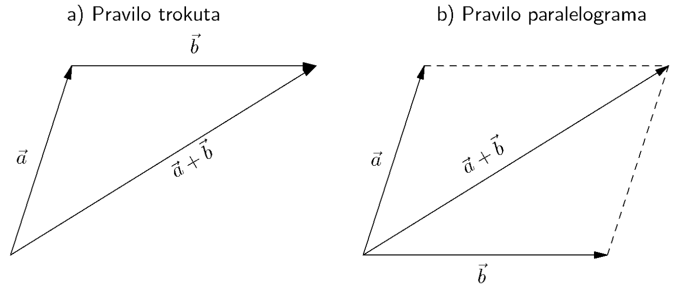
b) Koje od sljedećih relacija nisu relacije ekvivalencije u skupu $X_0(E)$? Zašto?

a) paralelnost  b) okomitost  c) kolinearnost  d) komplanarnost

## 1.1 Operacije s vektorima

### 1.1.1 Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora je binarna operacija, tj. funkcija dviju varijabli $+ : X(E)\times X(E) \to X(E)$. Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{c} := \vec{a}+\vec{b}$ pravilom trokuta (vidi Sliku 1.2.a) ili pravilom paralelograma (vidi Sliku 1.2.b).




Slika 1.2: Pravila za zbrajanje vektora

Binarna operacija zbrajanja vektora ima svojstvo zatvorenosti ili grupoidnosti, tj. rezultat operacije zbrajanja dva vektora opet je jedan vektor. Pored toga,

(i) vrijedi svojstvo asocijativnosti, tj. za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X(E)$ vrijedi:
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(ii) postoji neutralni element $\vec{0}$, tako da za proizvoljni vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

(iii) za svaki vektor $\vec{a} \in X(E)$ postoji inverzni element – suprotni vektor $(-\vec{a})$, takav da vrijedi:
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

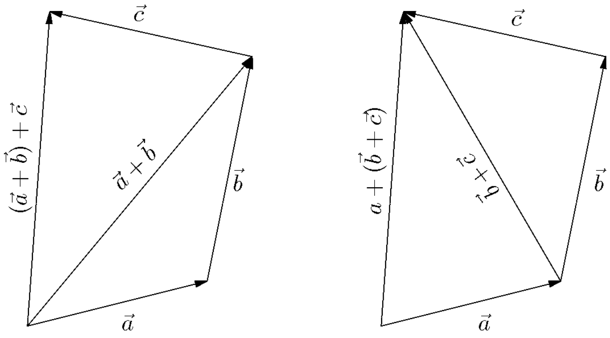
(iv) vrijedi zakon komutacije, tj. za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ vrijedi:
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

Navedena svojstva lako se mogu ilustrirati. Primjerice, svojstvo asocijativnosti ilustrirano je na Slici 1.3.

Skup svih vektora u prostoru snabdjeven računskom operacijom zbrajanja i prethodno navedenim svojstvima nazivamo **komutativna** ili **Abelova grupa**[2] i označavamo s $(X(E),+)$.

*Zadatak* 1.2. Definirajte binarnu operaciju zbrajanja na skupu $X_0(E)$ i navedite njena svojstva.

[2] Niels Abel (1802-1829), norveški matematičar.

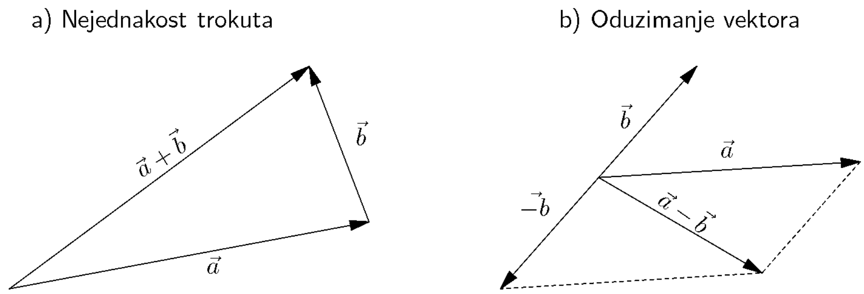



Slika 1.3: Ilustracija svojstva asocijativnosti zbrajanja vektora

**Primjer 1.2.** *Odaberimo reprezentante vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tako da oni leže na stranicama trokuta i da bude $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (vidi Sliku 1.4.a). Kako je u svakom trokutu duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije, vrijedi tzv.* nejednakost trokuta

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

*Pri tome jednakost vrijedi u slučaju ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni.*




Slika 1.4: Ilustracija nejednakosti trokuta (lijevo) i oduzimanja vektora (desno)

**Primjedba 1.4.** *Oduzimanje vektora možemo definirati preko zbrajanja, ko-*

*risteći inverzni element (suprotni vektor – vidi Sliku 1.4.b):*

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

**Primjedba 1.5.** *Množenje vektora prirodnim brojem možemo definirati induktivno:*

$$n \cdot \vec{a} = (n-1) \cdot \vec{a} + \vec{a}, \qquad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

### Z a d a c i[3]

*Zadatak* 1.3. Zašto skup $\mathbb{N} \cup \{0\}$, snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i skup cijelih brojeva snabdjeven binarnom operacijom množenja nisu grupe?

*Zadatak* 1.4. Neka je $G$ skup svih kompleksnih brojeva različitih od nule oblika $a + i\, b\sqrt{2}$, gdje su $a$ i $b$ racionalni brojevi, tj. $G = \{z \in \mathbb{C} : z = a + i\, b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$. Pokažite da je $G$ Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Što je inverzni element elementa $z = a + i\, b\sqrt{2}$ ?
Rješenje: $e = 1; \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+2b^2} - i\frac{b}{a^2+2b^2}\sqrt{2}$

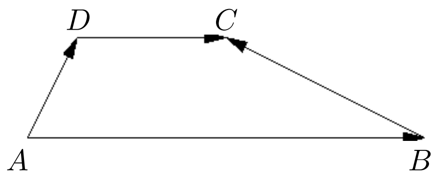
*Zadatak* 1.5. Neka je $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ podskup u skupu kompleksnih brojeva. Pokažite da je $G$ Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi ? Napravite tablicu množenja za ovu grupu.
Rješenje: $e = 1$

*Zadatak* 1.6. Zadan je trapez čije su stranice usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ kao na slici, pri čemu je $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$. Prikažite usmjerenu dužinu $\overrightarrow{BC}$ pomoću usmjerenih dužina $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$. [$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

*Zadatak* 1.7. Matematičkom indukcijom dokažite generaliziranu nejednakost trokuta

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|.$$

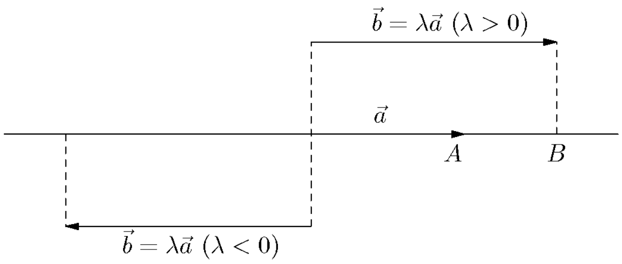
[3] Studenti trebaju pisati Domaće zadaće koje će dobivati na Vježbama iz ovog predmeta i Domaće zadaće za studente koji preferiraju bolju ocjenu koje mogu preuzeti sa web-stranice predmeta `http://www.mathos.unios.hr/index.php/nastava/preddiplomski-studij-matematika/182` Zadaće se pišu korištenjem LaTeX [15] i šalju voditelju Vježbi u pdf-formatu




Kada će u ovoj nejednakosti vrijediti jednakost?

### 1.1.2 Množenje vektora sa skalarom

Množenje vektora sa skalarom je funkcija dviju varijabli $\cdot : \mathbb{R} \times X(E) \to X(E)$. Za realni broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{b} := \lambda \cdot \vec{a}$ kao na Slici 1.5.



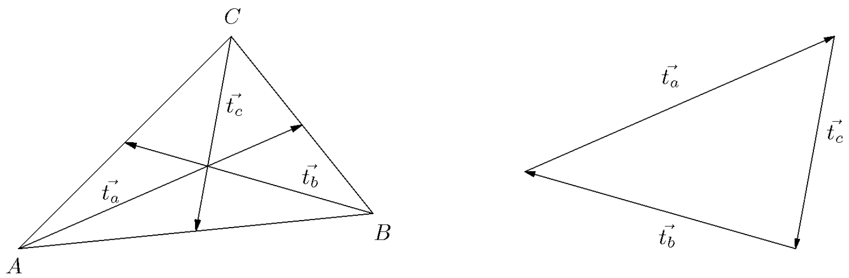

Slika 1.5: Množenje vektora sa skalarom

Primijetite da se analogno može definirati množenje vektora sa skalarom na skupu $X_0(E)$.

*Zadatak* 1.8. Za zadane vektore $\vec{a}, \vec{b} \in X(M)$ nacrtajte vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$.

*Zadatak* 1.9. Pokažite da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju.

**Primjer 1.3.** *Treba dokazati da postoji trokut sa stranicama koje su jednake i paralelne s težišnicama bilo kojeg zadanog trokuta (vidi Sliku 1.6).*




Slika 1.6: Slika uz Primjer 1.3

Koristeći prethodni zadatak, dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{t_a} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),\\ \vec{t_b} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),\\ \vec{t_c} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}),\end{aligned}$$

odakle zbrajanjem dobivamo $\vec{t_a} + \vec{t_b} + \vec{t_c} = \vec{0}$.

U kontinuitetu sa svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora, navedimo i svojstava koja vrijede za množenje vektora sa skalarom:

(v) za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi distributivnost obzirom na vektorski faktor: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

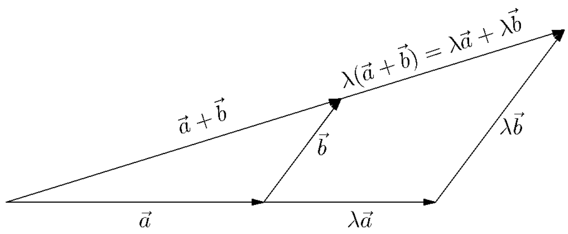
(vi) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi distributivnost obzirom na skalarni faktor: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

(vii) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi svojstvo kvaziasocijativnosti: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;

(viii) za bilo koji vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Svojstvo $(v)$ proizlazi iz sličnosti trokuta i ilustrirano je na Slici 1.7.

Svojstva $(vi)$ i $(vii)$ dokazuju se posebno za svaku kombinaciju predznaka skalara $\lambda$ i $\mu$ (vidi [7]).




Slika 1.7: Ilustracija distributivnosti množenja sa skalarom

Skup $X(E)$ snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i operacijom množenja sa skalarom, koje imaju navedenih osam svojstava nazivamo **vektorski prostor** i označavamo s $(X(E), +, \cdot)$ [1–11, 13, 14, 16]. Analogno se definiraju i vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ u ravnini i vektorski prostor $(X(p), +, \cdot)$ na pravcu. Kako je $X(M) \subset X(E)$, reći ćemo da je vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ **vektorski potprostor** u $(X(E), +, \cdot)$. Nadalje ćemo ove vektorske prostore označavati samo s $X(E), X(M), X(p)$.

**Primjedba 1.6.** *Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ dva kolinearna vektora, tada postoji pravac $p$ i točke $O, A, B \in p$ takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$, pri čemu je*

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \qquad \textit{gdje je} \quad \lambda = \begin{cases} \|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \textit{ imaju isti smjer} \\ -\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \textit{ su suprotnog smjera} \end{cases}$$

Matematičku strukturu $(X_0, +, \cdot)$ zovemo **vektorski prostor radijvektora** (detaljnije vidi [1]), pri čemu je $+ : X_0 \times X_0 \to X_0$ zbrajanje sa svojstvima[4]

[4]Prije toga uvesti **univerzalni** ($\forall$) i **egzistencijalni** ($\exists$) **kvantifikator** t. 6.1

(i) $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0) \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ [asocijativnost]

(ii) $(\exists \vec{0} \in X_0)\,(\forall \vec{a} \in X_0) \quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ [ $\vec{0}$ je neutralni element za zbrajanje]

(iii) $(\forall \vec{a} \in X_0)\,(\exists!\, \vec{a'} \in X_0) \quad \vec{a}+\vec{a'}=\vec{a'}+\vec{a}=\vec{0}$ [inverzni element: $\vec{a'}=-\vec{a}$ ]

(iv) $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in X_0) \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ [komutativnost]

$\cdot : \mathbb{R} \times X_0 \to X_0$ množenje sa skalarom sa svojstvima

(v) $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in X_0)\,(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ [distributivnost u vektorskom faktoru]

(vi) $(\forall \vec{a} \in X_0)\,(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ [distributivnost u skalarnom faktoru]

(vii) $(\forall \vec{a} \in X_0)\,(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$ [kvaziasocijativnost]

(vii) $(\forall \vec{a} \in X_0) \quad 1 \cdot \vec{a}=\vec{a}$

**Primjeri vektorskih prostora**

- $X(E)$, $X(M)$, $X(p)$, $X_0$;
- Skup $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_i \in \mathbb{R}\}, \quad n=1,2,\ldots$ s računskim operacijama

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n) \qquad \text{(zbrajanje)}$$
$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \qquad \text{(množenje sa skalarom)}$$

- Skup $\mathbb{C}^n$ s odgovarajućim računskim operacijama *zbrajanja* i *množenje sa skalarom*;
- Skup polinoma $P_n$ stupnja manjeg ili jednakog $n$ s realnim koeficijentima (uključujući i polinom nultog stupnja) snabdjeven računskim

operacijama

zbrajanja:

$$(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) + (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

množenja sa skalarom:

$$\lambda(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \cdots + (\lambda a_n)t^n.$$

- Skup $C([a,b])$ svih neprekidnih funkcija definiranih na segmentu $[a,b]$ snabdjeven računskim operacijama

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in [a,b] \qquad \text{(zbrajanje)}$$
$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in [a,b] \qquad \text{(množenje sa skalarom)}$$

### 1.1.3 Potprostor

**Definicija 1.3.** *Neka je $X$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Ako je $(Y, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ s istim operacijama iz $X$, onda kažemo da je $Y$ potprostor u $X$ i pišemo $Y \subseteq X$.*

Primjerice $X_0(M)$ i $X_0(p)$ su potprostori u $X_0(E)$.

Slično, za $\vec{a} \in X_0(M)$ njegova linearna ljuska $L(\vec{a}) = \{\lambda\vec{a} \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ je potprostor u $X_0(M)$.

Trivijalni vektorski potprostori vektorskog prostora $X$ su $\{0\}$ i sam $X$.

Lako se može provjeriti da vrijedi:

**Propozicija 1.1.** *Neka je $X$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je $Y$ potprostor u $X$ onda i samo onda ako vrijedi*

*(i)* $a + b \in Y, \quad \forall a, b \in Y$

*(ii)* $\lambda a \in Y \quad \forall a \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

**Korolar 1.1.** *Neka je $X$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je $Y$ potprostor u $X$ onda i samo onda ako vrijedi*

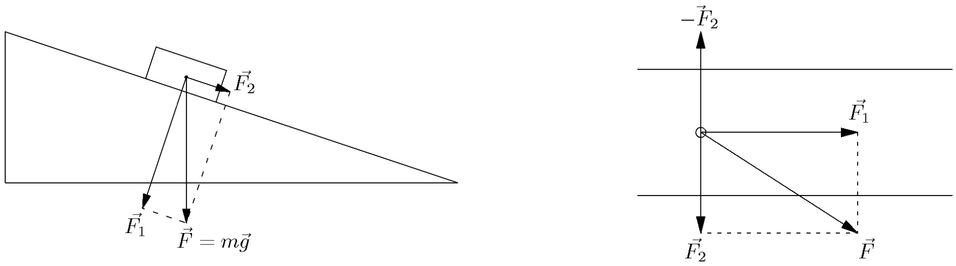
*(i')* $\lambda x + \mu y \in Y, \quad \forall x, y \in Y, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

## 1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

**Definicija 1.4.** *Ako su* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ *vektori, a* $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *skalari, tada vektor* $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n \in X_0$ *nazivamo* **linearna kombinacija** *vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$*. Kažemo još da je vektor* $\vec{a}$ *rastavljen (razvijen) po vektorima* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$*.*

Pogledajmo dva jednostavna fizikalna primjera (vidi Sliku 1.8):

- na tijelo na kosini djeluje sila teža $\vec{F}$, koju po pravilu paralelograma rastavljamo na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;
- na tijelo u vodi djeluje vučna sila $\vec{F}$, koju također rastavljamo po pravilu paralelograma na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;




Slika 1.8: Rastav sile

Navedene rastave možemo zapisati kao $1 \cdot \vec{F} + (-1) \cdot \vec{F}_1 + (-1) \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$.

**Definicija 1.5.** *Kažemo da je skup vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ **linearno nezavisan** *ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

*U protivnom kažemo da je skup vektora* **linearno zavisan***, tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način, tj.*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \textit{pri čemu} \quad \exists\, \lambda_i \neq 0.$$

**Primjer 1.4.** *Ako skup vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *sadrži nulvektor, on je linearno zavisan.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je baš prvi vektor $\vec{a}_1$ nulvektor. Tada možemo utvrditi da vrijedi:

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

pa smo na taj način pronašli jednu linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, koja iščezava na netrivijalan način.

Primijetite da su sile $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ iz fizikalnih primjera s početka odjeljka također linearno zavisne. Sljedeći teorem ukazuje nam kako se na jedan operativniji način može ustanoviti[5] je li skup vektora linearno zavisan ili nezavisan.

**Teorem 1.1.** *Skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ je linearno zavisan onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.*

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisan. Po prethodnoj definiciji to znači da postoji njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$, a da je pri tome $\lambda_1 \neq 0$. Tada možemo pisati

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \vec{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \vec{a}_n\,.$$

(Dovoljnost) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \cdots + \beta_n \vec{a}_n$ iz čega slijedi

$$1 \cdot \vec{a}_1 + (-\beta_2)\vec{a}_2 + \cdots + (-\beta_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Po definiciji to znači da su vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisni. ♣

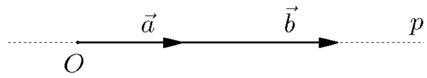
**Primjer 1.5.** *Bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(p)$ je jedan).*

**Primjer 1.6.** *Bilo koja tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(M)$ je dva).*

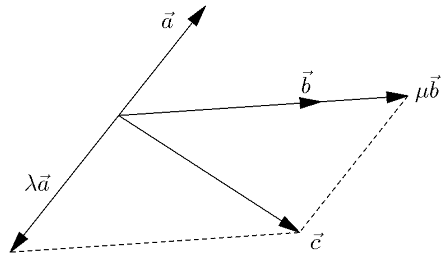
**Primjer 1.7.** *Bilo koja četiri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in X_0(E)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(E)$ je tri).*

---

[5] Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti pojam: **nužno i dovoljno** t. 6.2




Slika 1.9: Linearna zavisnost dvaju vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$




Slika 1.10: Linearna zavisnost triju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$

*Zadatak* 1.10. Pokažite da su dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ kolinearna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

*Zadatak* 1.11. Pokažite da su tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ komplanarna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

**Teorem 1.2.** *Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora u ravnini, tada se svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način*[6] *može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}$.*

Dokaz. Prema Primjeru 1.6 vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni pa prema Teoremu 1.1 vrijedi

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\,. \tag{1.1}$$

U svrhu dokaza jedinstvenosti ovog rastava, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se vektor $\vec{c}$ barem na još jedan način može prikazati pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \lambda'\vec{a} + \mu'\vec{b} \tag{1.2}$$

Oduzimanjem jednakosti (1.1), (1.2) dobivamo

$$(\lambda - \lambda')\vec{a} + (\mu - \mu')\vec{b} = \vec{0}.$$

[6] Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti **princip kontradikcije**, t. 6.3

Kako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ linearno nezavisni, slijedi: $\lambda = \lambda' \quad \& \quad \mu = \mu'$. ♣

Na sličan način može se dokazati i sljedeći teorem.

**Teorem 1.3.** *Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ tri linearno nezavisna vektora u prostoru, tada se svaki vektor $\vec{d} \in X_0(E)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

*Zadatak* 1.12. Neka je $O \in E$ fiksna točka i neka točka $C \in E$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $3:1$, tj. $d(A,C) : d(C,B) = 3:1$. Vektor $\overrightarrow{OC}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.
Rješenje: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

*Zadatak* 1.13. Provjerite jesu li vektori: $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$ linearno zavisni.
Rješenje: Jesu, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

# Poglavlje 6

# Dodatak

Neke važne matematičke pojmove, kao što su „pojam nužno i dovoljno”, „princip kontradikcije” i „univerzalni i egzistencijalni kvantifikator”, a koje ćemo često koristiti, pokušat ćemo objasniti na nekoliko jednostavnih primjera.

## 6.1 Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator

Egzistencijalni kvantifikator ($\exists$) čitamo „postoji barem jedan” ili češće samo „postoji”. Primjerice, činjenicu da postoji prirodan broj $p > 1$ koji dijeli broj 9 pišemo: $(\exists p \in \mathbb{N})\ p|9$.

Univerzalni kvantifikator ($\forall$) čitamo „za svaki” ili češće samo „svaki”. Primjerice, ako s $\mathcal{P}$ označimo skup svih prim-brojeva, a s $\mathcal{Q}$ skup svih složenih brojeva, onda vrijedi $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \{1\}$, a činjenicu da je svaki složeni broj $q > 1$ djeljiv s barem jednim prim-brojem pišemo: $(\forall q \in \mathcal{Q})\ (\exists p \in \mathcal{P})\ p|q$.

## 6.2 Nužni i dovoljni uvjeti

**Primjer 6.1.** *Iz osnovne škole poznata nam je definicija četverokuta:*
Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

*Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki četverokut bio* kvadrat*?*

*Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu sve četiri stranice jednako dugačke. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki romb kvadrat.*

*Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu kutevi pravi. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki pravokutnik kvadrat.*

*Sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat je:*

*(i) sve njegove stranice jedanako su dugačke;*

*(ii) svi njegovi kutevi su pravi.*

*Zato kažemo:*
*Četverokut je kvadrat onda i samo onda ako su sve njegove stranice jednako dugačke i ako su svi njegovi kutevi pravi.*

*Svaki od navedenih uvjeta je „nužan", ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat? Pokušajete definirati neki drugi sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat.*

**Primjer 6.2.** *Iz srednje škole poznata nam je definicija prim-broja (prostog broja):*
Prosti brojevi ili prim-brojevi su svi prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a strogo su veći od broja 1.

*Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki prirodni broj bio* prim-broj*?*

*Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka s brojem 1. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 8 prim-broj.*

*Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka sam sa sobom. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 4 prim-broj.*

*Nužni i dovoljni uvjeti da bi prirodni broj $p \in \mathbb{N}$ bio prim-broj su:*

*(i) broj $p$ djeljiv je bez ostatka s 1;*

*(ii) broj $p$ djeljiv je bez ostatka sam sa sobom;*

*(iii) broj $p$ nije djeljiv bez ostatka ni s jednim drugim prirodnim brojem;*

*(iv) $p > 1$.*

*Zato kažemo:*
*Prirodni broj $p > 1$ je prim-broj onda i samo onda ako je djeljiv samo s 1 i sam sa sobom.*

*Svaki od navedenih uvjeta je „nužan”, ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta koji određuje skup primbrojeva?*

## 6.3 Princip kontradikcije

Princip kontradikcije zasniva se na Aristotelovom principu isključenja trećeg: „Neka tvrdnja je istinita ili lažna, a treća mogućnost ne postoji”.

**Primjer 6.3.** *U prostoriji se nalazi 400 studenata.*

Tvrdnja $T$: *Barem dva studenta imaju na isti dan rođendan.*

Tvrdnja $\overline{T}$: *Svi studenti imaju rođendan na različite datume.*

*Budući da godina ima 365 (ili eventualno 366) dana, tvrdnja $\overline{T}$ nije istinita. Zato je prema principu kontradikcije tvrdnja $T$ istinita.*

# Literatura


[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1999.

[3] J. S. Golan, *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*, Dordrecht : Kluwer, 2004.

[4] L. Hogben, *Handbook of Linear Algebra*, Boca Raton : Chapman & Hall, 2007.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707`.

[6] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.

[7] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[8] R. E. Larson, R. P. Hostetler, *Calculus With Analytic Geometry .*, Heath and Company, Lexington : D. C., 1982.

[9] L. Leithold, *The Calculus With Analytic Geometry : Part 1*, Harper & Row, New York, 1976.

[10] S. Lipschitz, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.

[11] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[12] R. Scitovski, M. B. Alić, *Grupiranje podataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016, `http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ASP-2016.pdf`.

[13] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[14] E. B. Vinber, *A Course in Algebra*, Providence : American Mathematical Society, 2003.

[15] Š. Ungar, *Ne baš tako kratak Uvod u TEXs naglaskom na pdfLATEX*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2019, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=798`.

[16] F. Zhang, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.