

Linearna algebra I ¹

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković²

12. listopada 2020.

¹Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

²scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.
2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.
3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

Sadržaj

1	Vektori u ravnini i prostoru	1
1.1	Operacije s vektorima	3
1.1.1	Zbrajanje vektora	3
1.1.2	Množenje vektora sa skalarom	7
1.1.3	Potprostor	11
1.2	Linearna zavisnost i nezavisnost vektora	11
1.3	Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav	15
1.4	Norma vektora	16
1.4.1	Udaljenost dviju točaka	17
6	Dodatak	21
6.1	Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator	21
6.2	Nužni i dovoljni uvjeti	21
6.3	Princip kontradikcije	23
	Bibliography	23

Poglavlje 1

Vektori u ravnini i prostoru

Neka je E skup točaka u prostoru, a $A, B \in E$ dvije proizvoljne točke. Tada skup svih točaka na pravcu određenom točkama A, B , a koje leže između točaka A i B zovemo **dužinom** i označavamo s \overline{AB} . Ako primjerice, točku A proglasimo početnom, a točku B završnom, onda takvu dužinu nazivamo **usmjerenom dužinom** i označavamo s \overrightarrow{AB} .

Definicija 1.1. Kažemo da su dvije usmjerene dužine \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A'B'}$ **ekvivalentne** i pišemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ onda ako postoji translacija prostora koja točku A prevodi u A' , a točku B u B' .

Primjedba 1.1. Primijetimo da za dvije ekvivalentne usmjerene dužine \overrightarrow{AB} i $\overrightarrow{A'B'}$ vrijedi

- \overrightarrow{AB} i $\overrightarrow{A'B'}$ su paralelne;
- \overrightarrow{AB} i $\overrightarrow{A'B'}$ imaju istu orijentaciju, odnosno imaju isti vizualni smisao kretanja od početne prema završnoj točki;
- \overrightarrow{AB} i $\overrightarrow{A'B'}$ imaju istu duljinu¹, koju ćemo označiti s $\|\overrightarrow{AB}\|$, odnosno s $\|\overrightarrow{A'B'}\|$.

Primjedba 1.2. Primijetimo još da je ekvivalencija usmjerenih dužina jedna **relacija ekvivalencije**, tj. da vrijedi

¹U literaturi se za duljinu usmjerene dužine pojavljuju još i izrazi: norma, intenzitet, modul.

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (refleksivnost)
2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (simetričnost)
3. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \implies \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (tranzitivnost)

Sada možemo definirati osnovni pojam – **pojam vektora**:

Definicija 1.2. Vektor \vec{a} je klasa ekvivalencije svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina,

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

Svaku usmjerenu dužinu \overrightarrow{PQ} ekvivalentnu usmjereoju dužini \overrightarrow{AB} nazivamo **reprezentant** vektora \vec{a} . Pri tome pod **normom vektora** podrazumijevamo duljinu bilo kojeg reprezentanta, a označit ćemo ju s $\|\vec{a}\|$.

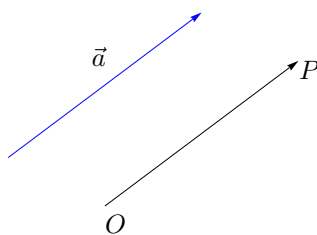
U daljnjem tekstu često ćemo govoriti o vektoru, a crtati ćemo neki njegov reprezentant.

Primjer 1.1. Nulvektor je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju istu početnu i završnu točku. Označavat ćemo ga s $\vec{0}$, pri čemu je $\|\vec{0}\| = 0$.

Jedinični vektor zvat ćemo svaki vektor \vec{e} za koga je $\|\vec{e}\| = 1$.

Suprotni vektor vektora \vec{a} je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju suprotnu orijentaciju od orijentacije usmjerenih dužina vektora \vec{a} i označavamo ga s $(-\vec{a})$.

Primjedba 1.3. Ako je O proizvoljna, ali fiksna točka u prostoru E , a \vec{a} dani vektor, onda postoji jedinstvena točka $P \in E$, takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$ (vidi Sliku 1.1).



Slika 1.1:

Navedimo još nekoliko često korištenih pojmova.

- kažemo da su dva ili više vektora kolinearni ako njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima;
- kažemo da su tri ili više vektora komplanarni ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

U daljnjem tekstu koristit ćemo sljedeće oznake [7]:

$X(E)$ – skup svih vektora u prostoru E ;

$X(M)$ – skup svih vektora u ravnini M ;

$X(p)$ – skup svih vektora na pravcu p .

Ako izaberemo jednu fiksnu točku $O \in E$, onda svakoj točki $P \in E$ pripada jedinstvena usmjerena dužina \overrightarrow{OP} , koju zovemo **radijvektor** ili **vektor položaja** [1, 5, 7] (vidi također *Dodatak: Vektori* u [12]). Skup svih ovakvih radijvektora označit ćemo s

$$X_0 = X_0(E) := \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}.$$

Očigledno postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0 .

Zadatak 1.1. Napišite definiciju realacije ekvivalencije.

a) U skupu \mathbb{Z} definirana je relacija „djeljivosti” na sljedeći način: Cijeli broj a je u relaciji ρ s cijelim brojem b i pišemo $a\rho b$ ako je a djeljiv s b . Zašto relacija ρ nije relacija ekvivalencije?

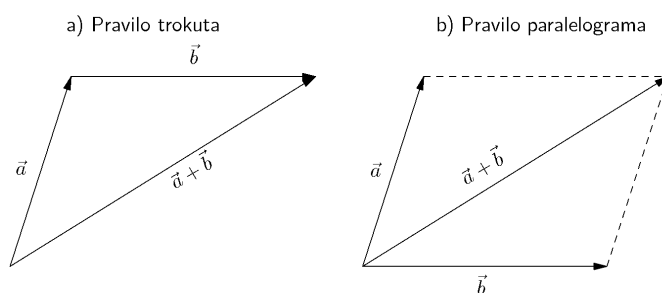
b) Koje od sljedećih relacija nisu relacije ekvivalencije u skupu $X_0(E)$? Zašto?

a) paralelnost b) okomitost c) kolinearnost d) komplanarnost

1.1 Operacije s vektorima

1.1.1 Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora je binarna operacija, tj. funkcija dviju varijabli $+$: $X(E) \times X(E) \rightarrow X(E)$. Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{c} := \vec{a} + \vec{b}$ pravilom trokuta (vidi Sliku 1.2.a) ili pravilom paralelograma (vidi Sliku 1.2.b).



Slika 1.2: Pravila za zbrajanje vektora

Binarna operacija zbrajanja vektora ima svojstvo zatvorenosti ili grupoidnosti, tj. rezultat operacije zbrajanja dva vektora opet je jedan vektor. Pored toga,

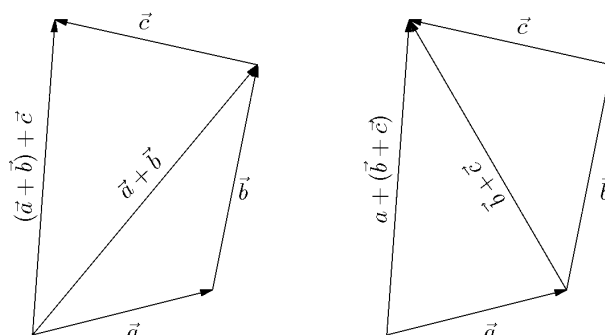
- (i) vrijedi svojstvo asocijativnosti, tj. za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X(E)$ vrijedi:
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$
- (ii) postoji neutralni element $\vec{0}$, tako da za proizvoljni vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$
- (iii) za svaki vektor $\vec{a} \in X(E)$ postoji inverzni element – suprotni vektor $(-\vec{a})$, takav da vrijedi:
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$
- (iv) vrijedi zakon komutacije, tj. za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ vrijedi:
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$

Navedena svojstva lako se mogu ilustrirati. Primjerice, svojstvo asocijativnosti ilustrirano je na Slici 1.3.

Skup svih vektora u prostoru snabdjeven računskom operacijom zbrajanja i prethodno navedenim svojstvima nazivamo **komutativna** ili **Abelova grupa**² i označavamo s $(X(E), +)$.

Zadatak 1.2. Definirajte binarnu operaciju zbrajanja na skupu $X_0(E)$ i navedite njena svojstva.

²Niels Abel (1802-1829), norveški matematičar.

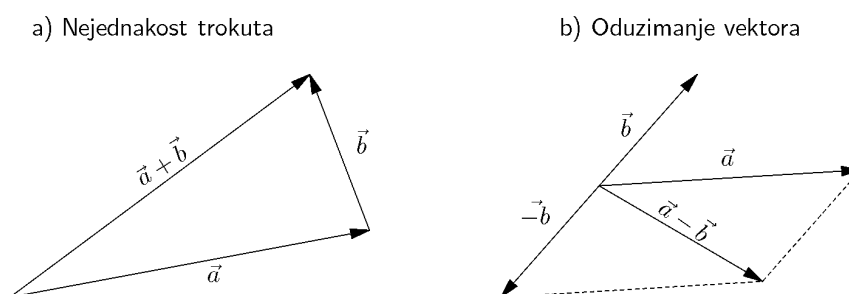


Slika 1.3: Ilustracija svojstva asocijativnosti zbrajanja vektora

Primjer 1.2. Odaberimo reprezentante vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tako da oni leže na stranicama trokuta i da bude $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (vidi Sliku 1.4.a). Kako je u svakom trokutu duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije, vrijedi tzv. nejednakost trokuta

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Pri tome jednakost vrijedi u slučaju ako su vektori \vec{a}, \vec{b} kolinearni.



Slika 1.4: Ilustracija nejednakosti trokuta (lijevo) i oduzimanja vektora (desno)

Primjedba 1.4. Oduzimanje vektora možemo definirati preko zbrajanja, ko-

risteći inverzni element (suprotni vektor – vidi Sliku 1.4.b):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Primjedba 1.5. Množenje vektora prirodnim brojem možemo definirati induktivno:

$$n \cdot \vec{a} = (n - 1) \cdot \vec{a} + \vec{a}, \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Z a d a c i³

Zadatak 1.3. Zašto skup $\mathbb{N} \cup \{0\}$, snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i skup cijelih brojeva snabdjeven binarnom operacijom množenja nisu grupe?

Zadatak 1.4. Neka je G skup svih kompleksnih brojeva različitih od nule oblika $a + ib\sqrt{2}$, gdje su a i b racionalni brojevi, tj. $G = \{z \in \mathbb{C} : z = a + ib\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Što je inverzni element elementa $z = a + ib\sqrt{2}$?

Rješenje: $e = 1$; $z^{-1} = \frac{a}{a^2+2b^2} - i\frac{b}{a^2+2b^2}\sqrt{2}$

Zadatak 1.5. Neka je $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ podskup u skupu kompleksnih brojeva. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Napravite tablicu množenja za ovu grupu.

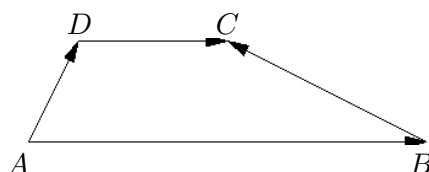
Rješenje: $e = 1$

Zadatak 1.6. Zadan je trapez čije su stranice usmjerene dužine \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{DC} , \vec{AD} kao na slici, pri čemu je $\vec{AB} = 2\vec{DC}$. Prikažite usmjerenu dužinu \vec{BC} pomoću usmjerenih dužina \vec{AB} i \vec{AD} . $[\vec{BC} = \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}]$

Zadatak 1.7. Matematičkom indukcijom dokažite generaliziranu nejednakost trokuta

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\vec{a}_i\|.$$

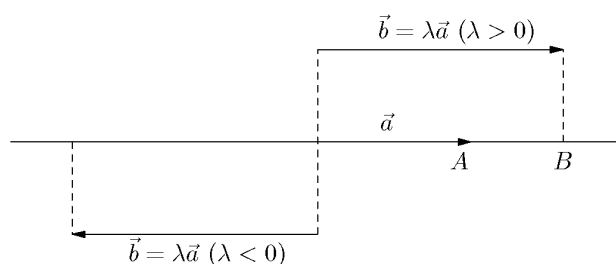
³Studenti trebaju pisati **Domaće zadaće** koje će dobivati na Vježbama iz ovog predmeta i **Domaće zadaće za studente koji preferiraju bolju ocjenu** koje mogu preuzeti sa web-stranice predmeta <http://www.mathos.unios.hr/index.php/nastava/preddiplomski-studij-matematika/182> Zadaće se pišu korištenjem L^AT_EX [15] i šalju voditelju Vježbi u pdf-formatu



Kada će u ovoj nejednakosti vrijediti jednakost?

1.1.2 Množenje vektora sa skalarom

Množenje vektora sa skalarom je funkcija dviju varijabli $\cdot : \mathbb{R} \times X(E) \rightarrow X(E)$. Za realni broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{b} := \lambda \cdot \vec{a}$ kao na Slici 1.5.



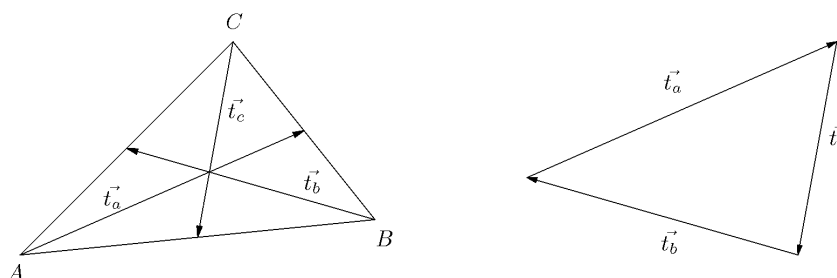
Slika 1.5: Množenje vektora sa skalarom

Primijetite da se analogno može definirati množenje vektora sa skalarom na skupu $X_0(E)$.

Zadatak 1.8. Za zadane vektore $\vec{a}, \vec{b} \in X(M)$ nacrtajte vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Zadatak 1.9. Pokažite da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju.

Primjer 1.3. Treba dokazati da postoji trokut sa stranicama koje su jednake i paralelne s težišnicama bilo kojeg zadanog trokuta (vidi Sliku 1.6).



Slika 1.6: Slika uz Primjer 1.3

Koristeći prethodni zadatak, dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{t}_a &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \\ \vec{t}_b &= \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}), \\ \vec{t}_c &= \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}),\end{aligned}$$

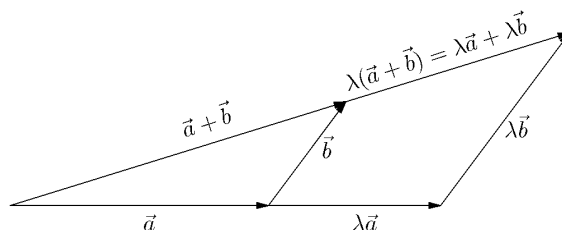
odakle zbrajanjem dobivamo $\vec{t}_a + \vec{t}_b + \vec{t}_c = \vec{0}$.

U kontinuitetu sa svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora, navedimo i svojstva koja vrijede za množenje vektora sa skalarom:

- (v) za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi distributivnost obzirom na vektorski faktor: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
- (vi) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi distributivnost obzirom na skalarni faktor: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- (vii) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi svojstvo kvaziasocijativnosti: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;
- (viii) za bilo koji vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Svojstvo (v) proizlazi iz sličnosti trokuta i ilustrirano je na Slici 1.7.

Svojstva (vi) i (vii) dokazuju se posebno za svaku kombinaciju predznaka skalara λ i μ (vidi [7]).



Slika 1.7: Ilustracija distributivnosti množenja sa skalarom

Skup $X(E)$ snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i operacijom množenja sa skalarom, koje imaju navedenih osam svojstava nazivamo **vektorski prostor** i označavamo s $(X(E), +, \cdot)$ [1–11, 13, 14, 16]. Analogno se definiraju i vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ u ravnini i vektorski prostor $(X(p), +, \cdot)$ na pravcu. Kako je $X(M) \subset X(E)$, reći ćemo da je vektorski prostor $(X(M), +, \cdot)$ **vektorski potprostor** u $(X(E), +, \cdot)$. Nadalje ćemo ove vektorske prostore označavati samo s $X(E), X(M), X(p)$.

Primjedba 1.6. Ako su \vec{a}, \vec{b} dva kolinearna vektora, tada postoji pravac p i točke $O, A, B \in p$ takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$, pri čemu je

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, \quad \text{gdje je} \quad \lambda = \begin{cases} \|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ imaju isti smjer} \\ -\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ su suprotnog smjera} \end{cases}$$

Matematičku strukturu $(X_0, +, \cdot)$ zovemo **vektorski prostor radijvektora** (detaljnije vidi [1]), pri čemu je $+ : X_0 \times X_0 \rightarrow X_0$ zbrajanje sa svojstvima⁴

- (i) $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0) \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ [asocijativnost]
- (ii) $(\exists \vec{0} \in X_0) (\forall \vec{a} \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ [$\vec{0}$ je neutralni element za zbrajanje]
- (iii) $(\forall \vec{a} \in X_0) (\exists! \vec{a}' \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{a}' = \vec{a}' + \vec{a} = \vec{0}$ [inverzni element: $\vec{a}' = -\vec{a}$]
- (iv) $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [komutativnost]

⁴Prije toga uvesti **univerzalni** (\forall) i **egzistencijalni** (\exists) kvantifikator t. 6.1

$\cdot : \mathbb{R} \times X_0 \rightarrow X_0$ množenje sa skalarom sa svojstvima

$$(v) (\forall \vec{a}, \vec{b} \in X_0) (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad [\text{distributivnost u vektorskom faktoru}]$$

$$(vi) (\forall \vec{a} \in X_0) (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad [\text{distributivnost u skalarom faktoru}]$$

$$(vii) (\forall \vec{a} \in X_0) (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) \quad [\text{kvaziasocijativnost}]$$

$$(vii) (\forall \vec{a} \in X_0) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Primjeri vektorskih prostora

- $X(E), X(M), X(p), X_0$;
- Skup $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$, $n = 1, 2, \dots$ s računskim operacijama

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \quad (\text{zbrajanje})$$

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \quad (\text{množenje sa skalarom})$$

- Skup \mathbb{C}^n s odgovarajućim računskim operacijama *zbrajanja* i *množenja sa skalarom*;
- Skup polinoma P_n stupnja manjeg ili jednakog n s realnim koeficijentima (uključujući i polinom nultog stupnja) snabdjeven računskim operacijama

zbrajanja:

$$(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) + (b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n,$$

množenja sa skalarom:

$$\lambda(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \dots + (\lambda a_n)t^n.$$

- Skup $C([a, b])$ svih neprekidnih funkcija definiranih na segmentu $[a, b]$ snabdjeven računskim operacijama

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in [a, b] \quad (\text{zbrajanje})$$

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in [a, b] \quad (\text{množenje sa skalarom})$$

1.1.3 Potprostor

Definicija 1.3. Neka je X vektorski prostor nad poljem \mathbb{R} i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Ako je $(Y, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem \mathbb{R} s istim operacijama iz X , onda kažemo da je Y potprostor u X i pišemo $Y \subseteq X$.

Primjerice $X_0(M)$ i $X_0(p)$ su potprostori u $X_0(E)$.

Slično, za $\vec{a} \in X_0(M)$ njegova linearna ljuska $L(\vec{a}) = \{\lambda\vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ je potprostor u $X_0(M)$.

Trivijalni vektorski potprostori vektorskog prostora X su $\{0\}$ i sam X .

Lako se može provjeriti da vrijedi:

Propozicija 1.1. Neka je X vektorski prostor nad poljem \mathbb{R} i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je Y potprostor u X onda i samo onda ako vrijedi

$$(i) \quad a + b \in Y, \quad \forall a, b \in Y$$

$$(ii) \quad \lambda a \in Y \quad \forall a \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Korolar 1.1. Neka je X vektorski prostor nad poljem \mathbb{R} i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je Y potprostor u X onda i samo onda ako vrijedi

$$(i') \quad \lambda x + \mu y \in Y, \quad \forall x, y \in Y, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

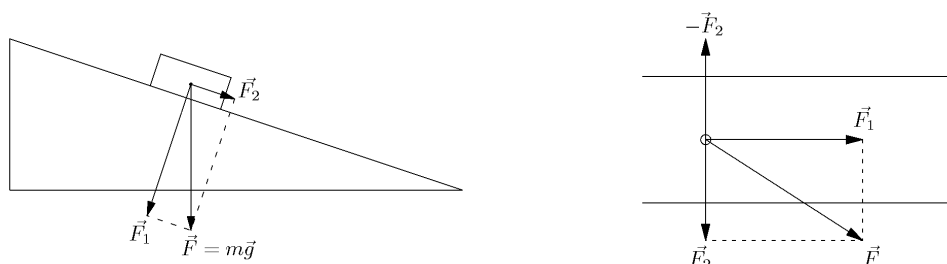
1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija 1.4. Ako su $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$ vektori, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalari, tada vektor $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n \in X_0$ nazivamo **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Kažemo još da je vektor \vec{a} rastavljen (razvijen) po vektorima $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Pogledajmo dva jednostavna fizikalna primjera (vidi Sliku 1.8):

- na tijelo na kosini djeluje sila teža \vec{F} , koju po pravilu paralelograma rastavljamo na sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;
- na tijelo u vodi djeluje vučna sila \vec{F} , koju također rastavljamo po pravilu paralelograma na sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;

Navedene rastave možemo zapisati kao $1 \cdot \vec{F} + (-1) \cdot \vec{F}_1 + (-1) \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$.



Slika 1.8: Rastav sile

Definicija 1.5. Kažemo da je skup vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$ **linearno nezavisan** ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

U protivnom kažemo da je skup vektora **linearno zavisan**, tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivialan način, tj.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{pri čemu} \quad \exists \lambda_i \neq 0.$$

Primjer 1.4. Ako skup vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sadrži nulvektor, on je linearno zavisan.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je baš prvi vektor \vec{a}_1 nulvektor. Tada možemo utvrditi da vrijedi:

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

pa smo na taj način pronašli jednu linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, koja iščezava na netrivialan način.

Primijetite da su sile $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ iz fizikalnih primjera s početka odjeljka također linearno zavisne. Sljedeći teorem ukazuje nam kako se na jedan operativniji način može ustanoviti⁵ je li skup vektora linearno zavisan ili nezavisan.

Teorem 1.1. Skup vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$ je linearno zavisan onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.

⁵Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti pojam: **nužno i dovoljno** t. 6.2

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je skup vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisan. Po prethodnoj definiciji to znači da postoji njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivialan način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$, a da je pri tome $\lambda_1 \neq 0$. Tada možemo pisati

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \vec{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \vec{a}_n.$$

(Dovoljnost) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$ iz čega slijedi

$$1 \cdot \vec{a}_1 + (-\beta_2) \vec{a}_2 + \dots + (-\beta_n) \vec{a}_n = \vec{0}.$$

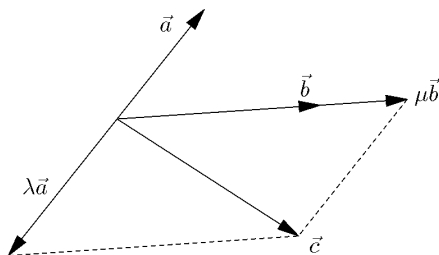
Po definiciji to znači da su vektori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisni. ♣

Primjer 1.5. Bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(p)$ je jedan).



Slika 1.9: Linearna zavisnost dvaju vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$

Primjer 1.6. Bilo koja tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(M)$ je dva).



Slika 1.10: Linearna zavisnost triju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$

Primjer 1.7. Bilo koja četiri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in X_0(E)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(E)$ je tri).

Zadatak 1.10. Pokažite da su dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ kolinearna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

Zadatak 1.11. Pokažite da su tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ komplanarna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

Teorem 1.2. *Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora u ravnini, tada se svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način⁶ može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora \vec{a}, \vec{b} .*

Dokaz. Prema Primjeru 1.6 vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni pa prema Teoremu 1.1 vrijedi

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}. \quad (1.1)$$

U svrhu dokaza jedinstvenosti ovog rastava, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se vektor \vec{c} barem na još jedan način može prikazati pomoću vektora \vec{a} i \vec{b} :

$$\vec{c} = \lambda' \vec{a} + \mu' \vec{b} \quad (1.2)$$

Oduzimanjem jednakosti (1.1), (1.2) dobivamo

$$(\lambda - \lambda') \vec{a} + (\mu - \mu') \vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su vektori \vec{a}, \vec{b} linearno nezavisni, slijedi: $\lambda = \lambda' \quad \& \quad \mu = \mu'$. ♣

Na sličan način može se dokazati i sljedeći teorem.

Teorem 1.3. *Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ tri linearno nezavisna vektora u prostoru, tada se svaki vektor $\vec{d} \in X_0(E)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Zadatak 1.12. Neka je $O \in E$ fiksna točka i neka točka $C \in E$ dijeli dužinu \overline{AB} u omjeru $3 : 1$, tj. $d(A, C) : d(C, B) = 3 : 1$. Vektor \overrightarrow{OC} prikažite kao linearnu kombinaciju vektora \overrightarrow{OA} i \overrightarrow{OB} .

Rješenje: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{OB}$.

Zadatak 1.13. Provjerite jesu li vektori: $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$ linearno zavisni.

Rješenje: Jesu, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

⁶Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti **princip kontradikcije**, t. 6.3

1.3 Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav

Definicija 1.6.

Uređena trojka $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ linearno nezavisnih vektora iz $X_0(E)$ zove se **baza vektorskog prostora** $X_0(E)$.

Uređen par (\vec{e}_1, \vec{e}_2) linearno nezavisnih vektora iz $X_0(M)$ zove se **baza vektorskog prostora** $X_0(M)$.

Svaki nenul vektor (\vec{e}) iz $X_0(p)$ čini bazu vektorskog prostora $X_0(p)$.

Neka je $\vec{a} \in X_0(E)$, a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ baza u $X_0(E)$. Tada vektor \vec{a} na jedinstven način možemo zapisati

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Brojeve a_1, a_2, a_3 zovemo **koordinate** (komponente) vektora \vec{a} u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Sada prirodno slijede pravila za zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom ako su oni zadani sa svojim koordinatama:

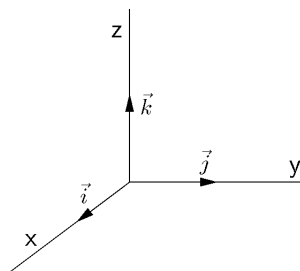
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \quad [\text{zbrajanje}]$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3 \quad [\text{množenje vektora skalarom}]$$

Definicija 1.7. Par $(O; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ fiksne točke O i baze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ zovemo **Kartezijev⁷ koordinatni sustav u prostoru E** .

Posebno je pogodno ako za bazu prostora $X_0(E)$ izaberemo uređenu trojku međusobno okomitih i jediničnih (dugačkih 1!) vektora, koje obično označavamo s $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tako dobivamo **pravokutni Kartezijev koordinatni sustav** $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. Pravac određen vektorom \vec{i} označavamo sa x i zovemo **os apscisa**, pravac određen vektorom \vec{j} označavamo sa y i zovemo **os ordinata**, a pravac određen vektorom \vec{k} označavamo sa z i zovemo **os aplikata**.

⁷Rene Descartes (1596-1650), francuski filozof i matematičar. Njegovo latinizirano ime je Cartesius



Slika 1.11: Pravokutni Kartezijev koordinatni sustav

Primjedba 1.7. Ranije smo utvrdili da postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0 . Primijetite da također postoji bijekcija između skupa svih uređenih trojki realnih brojeva \mathbb{R}^3 i vektorskog prostora $X_0(E)$ jer svakoj uređenoj trojki $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ na jedinstven način možemo pridružiti vektor $\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ iz prostora $X_0(E)$ i obrnuto. Zato ćemo često po potrebi povezivati, pa neki puta i poistovjećivati pojmove: skup E , vektorski prostor $X_0(E)$ i \mathbb{R}^3 .

Zadatak 1.14. Provjerite čine li vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ bazu u vektorskom prostoru $X_0(M)$. Ako čine, vektor $\vec{c} = -11\vec{i} + 6\vec{j}$ prikažite u toj bazi.

Rješenje: čine, $\vec{c} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$.

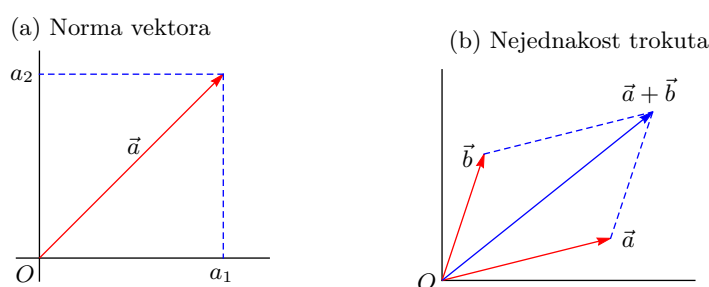
1.4 Norma vektora

Pretpostavimo da je u ravnini M definiran pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ i neka je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$. Sada možemo izračunati (vidi Sliku 1.12a) duljinu ovog vektora $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Primjetite da za ovako definiranu duljinu vektora vrijedi

- (i) $\|\vec{a}\| \geq 0$ & $(\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$,
- (ii) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (vidi Sliku 1.12b)

Duljina (norma, intenzitet) vektora može se i općenito definirati:



Slika 1.12:

Definicija 1.8. Neka je X_0 vektorski prostor. Funkciju $\|\cdot\| : X_0 \rightarrow [0, \infty)$, koja svakom vektoru $\vec{a} \in X_0$ pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s $\|\vec{a}\|$ ili jednostavno a) zovemo **norma** vektora \vec{a} ako vrijedi

- (i) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ [pozitivna definitnost],
- (ii) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaki $\vec{a} \in X_0$,
- (iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ za svaki $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$ [nejednakost trokuta].

Najčešće korištene vektorske norme su⁸

$$\|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + |a_3|, \quad (l_1 \text{ norma})$$

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (l_2 \text{ Euklidova ili euklidska norma})$$

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}, \quad (l_\infty \text{ norma ili Čebiševljeva norma})$$

Zadatak 1.15. Pokažite da spomenute norme imaju sva svojstva navedena u prethodnoj definiciji.

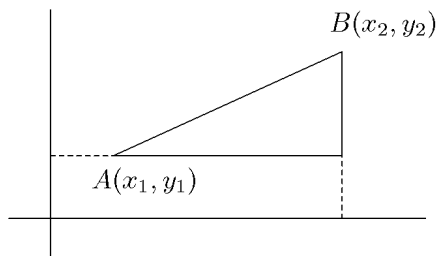
1.4.1 Udaljenost dviju točaka

Udaljenost dviju točaka $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in M$ u ravnini M u kojoj je uveden pravokutni Kartezijev koordinatni sustav možemo izračunati (vidi Sliku 1.13) po formuli

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.3)$$

Ako definiramo radijvektore $\vec{r}_A, \vec{r}_B \in X_0(M)$,

⁸U programskom sustavu *Mathematica* l_2 -normu vektora \vec{a} dobivamo naredbom `Norm[a]`, gdje je `a` lista



Slika 1.13: Udaljenost točkaka u ravnini

$$\vec{r}_A = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{r}_B = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

onda udaljenost zapisanu formulom (1.3) možemo zapisati kao

$$d_2(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2, \quad \text{gdje je } \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \quad (1.4)$$

Na sličan način može se definirati i udaljenost dviju točkaka preko l_1 ili l_∞ norme sljedećim formulama:

$$d_1(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_1 \quad d_\infty(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_\infty. \quad (1.5)$$

Koji je geometrijski smisao d_1 , d_2 i d_∞ udaljenosti dviju točkaka $A, B \in M$?

Zadatak 1.16. Pokažite da funkcije d_i , $i = 1, 2, \infty$ definirane s (1.4)–(1.5) zadovoljavaju sljedeća svojstva

- (i) $d_i(A, B) \geq 0, \quad \forall A, B \in M,$
- (ii) $d_i(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$
- (ii) $d_i(A, B) = d_i(B, A), \quad \forall A, B \in M,$
- (iv) $d_i(A, B) \leq d_i(A, C) + d_i(C, B), \quad \forall A, B, C \in M.$

Zadovoljava li funkcija $d_{LS}(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2^2$ navedena svojstva?

Zadatak 1.17. „Jedinična kružnica” sa središtem u $O \in \mathbb{R}^2$ definira se kao skup $\partial K = \{T \in M : d(O, T) = 1\}$. Nacrtajte jedinične kružnice ako se udaljenost definira s d_1, d_2 ili d_∞ .

Zadatak 1.18. Zadan je trapez $ABCD$ s vrhovima: $A(-3, 2, 1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(5, 2, -3)$. Odredite četvrti vrh D ako vrijedi $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$.

Rješenje: $\vec{r}_D = \vec{r}_C - \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_A$, $D(3, 3, -4)$.

Zadatak 1.19. Zadan je trokut ABC s vrhovima: $A(-3, 2, 1)$, $B(3, -2, 2)$, $C(5, 2, -4)$. Odredite duljinu težišnice iz vrha A .

Rješenje: $P_A(4, 0, -1)$, $\overrightarrow{AP_A} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $d = \sqrt{57}$.

Zadatak 1.20. Zadan je paralelogram $ABCD$ s vrhovima: $A(-3, 2, 1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(5, 2, -3)$, $D(-1, 5, -6)$. Izračunajte udaljenost točke A do sjecišta njegovih dijagonala.

Rješenje: $S(1, 2, -1)$, $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_D - \vec{r}_B)$, $d(A, S) = 2\sqrt{5}$.

Zadatak 1.21. Dokažite da vektor $\vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ s početkom u točki O ima vrh u polovištu dužine \overline{AB} .

Poglavlje 6

Dodatak

Neke važne matematičke pojmove, kao što su „pojam nužno i dovoljno”, „princip kontradikcije” i „univerzalni i egzistencijalni kvantifikator”, a koje ćemo često koristiti, pokušat ćemo objasniti na nekoliko jednostavnih primjera.

6.1 Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator

Egzistencijalni kvantifikator (\exists) čitamo „postoji barem jedan” ili češće samo „postoji”. Primjerice, činjenicu da postoji prirodan broj $p > 1$ koji dijeli broj 9 pišemo: $(\exists p \in \mathbb{N}) p|9$.

Univerzalni kvantifikator (\forall) čitamo „za svaki” ili češće samo „svaki”. Primjerice, ako s \mathcal{P} označimo skup svih prim-brojeva, a s \mathcal{Q} skup svih složenih brojeva, onda vrijedi $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \{1\}$, a činjenicu da je svaki složeni broj $q > 1$ djeljiv s barem jednim prim-brojem pišemo: $(\forall q \in \mathcal{Q}) (\exists p \in \mathcal{P}) p|q$.

6.2 Nužni i dovoljni uvjeti

Primjer 6.1. *Iz osnovne škole poznata nam je definicija četverokuta:*

Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki četverokut bio kvadrat?

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu sve četiri stranice jednako dugačke. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki romb kvadrat.

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu kutevi pravi. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki pravokutnik kvadrat.

Sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat je:

- (i) sve njegove stranice jedanako su dugačke;*
- (ii) svi njegovi kutevi su pravi.*

Zato kažemo:

Četverokut je kvadrat onda i samo onda ako su sve njegove stranice jednako dugačke i ako su svi njegovi kutevi pravi.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan”, ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat? Pokušajte definirati neki drugi sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat.

Primjer 6.2. *Iz srednje škole poznata nam je definicija prim-broja (prostog broja):*

Prosti brojevi ili prim-brojevi su svi prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a strogo su veći od broja 1.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki prirodni broj bio prim-broj?

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka s brojem 1. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 8 prim-broj.

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka sam sa sobom. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 4 prim-broj.

Nužni i dovoljni uvjeti da bi prirodni broj $p \in \mathbb{N}$ bio prim-broj su:

- (i) broj p djeljiv je bez ostatka s 1;*
- (ii) broj p djeljiv je bez ostatka sam sa sobom;*
- (iii) broj p nije djeljiv bez ostatka ni s jednim drugim prirodnim brojem;*
- (iv) $p > 1$.*

Zato kažemo:

Prirodni broj $p > 1$ je prim-broj onda i samo onda ako je djeljiv samo s 1 i sam sa sobom.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan”, ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta koji određuje skup primbrojeva?

6.3 Princip kontradikcije

Princip kontradikcije zasniva se na Aristotelovom principu isključenja trećeg: „Neka tvrdnja je istinita ili lažna, a treća mogućnost ne postoji”.

Primjer 6.3. *U prostoriji se nalazi 400 studenata.*

Tvrdnja T : Barem dva studenta imaju na isti dan rođendan.

Tvrdnja \bar{T} : Svi studenti imaju rođendan na različite datume.

Budući da godina ima 365 (ili eventualno 366) dana, tvrdnja \bar{T} nije istinita. Zato je prema principu kontradikcije tvrdnja T istinita.

Literatura

- [1] D. BAKIĆ, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [2] N. ELEZOVIĆ, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1999.
- [3] J. S. GOLAN, *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*, Dordrecht : Kluwer, 2004.
- [4] L. HOGBEN, *Handbook of Linear Algebra*, Boca Raton : Chapman & Hall, 2007.
- [5] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, <http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707>.
- [6] S. KUREPA, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.
- [7] S. KUREPA, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [8] R. E. LARSON, R. P. HOSTETLER, *Calculus With Analytic Geometry .*, Heath and Company, Lexington : D. C., 1982.
- [9] L. LEITHOLD, *The Calculus With Analytic Geometry : Part 1*, Harper & Row, New York, 1976.
- [10] S. LIPSCHITZ, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.
- [11] H. NEUNZERT, W. G. ESCHMANN, A. BLICKENS DÖRFER-EHLERS, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [12] R. SCITOVSKI, M. B. ALIĆ, *Grupiranje podataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016, <http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ASP-2016.pdf>.
- [13] L. ČAKLOVIĆ, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

- [14] E. B. VINBER, *A Course in Algebra*, Providence : American Mathematical Society, 2003.
- [15] Š. UNGAR, *Ne baš tako kratak Uvod u $T_{E}X$ s naglaskom na $pdfL_{A}T_{E}X$* , Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2019, <http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=798>.
- [16] F. ZHANG, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.