

# Linearna algebra I <sup>1</sup>

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković  
dr. sc. Darija Brajković<sup>2</sup>

26. listopada 2020.

<sup>1</sup>Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

<sup>2</sup>[scitowsk@mathos.hr](mailto:scitowsk@mathos.hr), [darija@mathos.hr](mailto:darija@mathos.hr), [dbrajkovic@mathos.hr](mailto:dbrajkovic@mathos.hr)

**Sadržaj predmeta:**

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.
2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.
3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Vektori u ravnini i prostoru</b>	<b>1</b>
1.1	Operacije s vektorima . . . . .	3
1.1.1	Zbrajanje vektora . . . . .	3
1.1.2	Množenje vektora sa skalarom . . . . .	7
1.1.3	Potprostor . . . . .	11
1.2	Linearna zavisnost i nezavisnost vektora . . . . .	11
1.3	Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav . . . . .	15
1.4	Norma vektora . . . . .	16
1.4.1	Udaljenost dviju točaka . . . . .	17
1.5	Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost . . . . .	19
1.6	Skalarni produkt . . . . .	24
1.6.1	Kosinusi smjerova . . . . .	29
1.6.2	Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Dodatak</b>	<b>33</b>
6.1	Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator . . . . .	33
6.2	Nužni i dovoljni uvjeti . . . . .	33
6.3	Princip kontradikcije . . . . .	35
	<b>Bibliography</b>	<b>35</b>

# Poglavlje 1

## Vektori u ravnini i prostoru

Neka je  $E$  skup točaka u prostoru, a  $A, B \in E$  dvije proizvoljne točke. Tada skup svih točaka na pravcu određenom točkama  $A, B$ , a koje leže između točaka  $A$  i  $B$  zovemo **dužinom** i označavamo s  $\overline{AB}$ . Ako primjerice, točku  $A$  proglasimo početnom, a točku  $B$  završnom, onda takvu dužinu nazivamo **usmjerenom dužinom** i označavamo s  $\overrightarrow{AB}$ .

**Definicija 1.1.** Kažemo da su dvije usmjerene dužine  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{A'B'}$  **ekvivalentne** i pišemo  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$  onda ako postoji translacija prostora koja točku  $A$  prevodi u  $A'$ , a točku  $B$  u  $B'$ .

**Primjedba 1.1.** Primijetimo da za dvije ekvivalentne usmjerene dužine  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{A'B'}$  vrijedi

- $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{A'B'}$  su paralelne;
- $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{A'B'}$  imaju istu orijentaciju, odnosno imaju isti vizualni smisao kretanja od početne prema završnoj točki;
- $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{A'B'}$  imaju istu duljinu<sup>1</sup>, koju ćemo označiti s  $\|\overrightarrow{AB}\|$ , odnosno s  $\|\overrightarrow{A'B'}\|$ .

**Primjedba 1.2.** Primijetimo još da je ekvivalencija usmjerenih dužina jedna **relacija ekvivalencije**, tj. da vrijedi

---

<sup>1</sup>U literaturi se za duljinu usmjerene dužine pojavljuju još i izrazi: norma, intenzitet, modul.

1.  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$  (refleksivnost)
2.  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$  (simetričnost)
3.  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \implies \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$  (tranzitivnost)

Sada možemo definirati osnovni pojam – **pojam vektora**:

**Definicija 1.2.** Vektor  $\vec{a}$  je klasa ekvivalencije svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina,

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

Svaku usmjerenu dužinu  $\overrightarrow{PQ}$  ekvivalentnu usmjereoju dužini  $\overrightarrow{AB}$  nazivamo **reprezentant** vektora  $\vec{a}$ . Pri tome pod **normom vektora** podrazumijevamo duljinu bilo kojeg reprezentanta, a označit ćemo ju s  $\|\vec{a}\|$ .

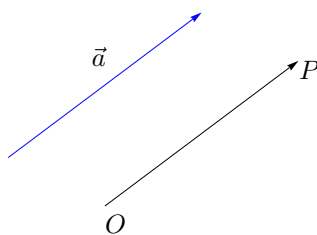
U daljnjem tekstu često ćemo govoriti o vektoru, a crtati ćemo neki njegov reprezentant.

**Primjer 1.1.** Nulvektor je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju istu početnu i završnu točku. Označavat ćemo ga s  $\vec{0}$ , pri čemu je  $\|\vec{0}\| = 0$ .

Jedinični vektor zvat ćemo svaki vektor  $\vec{e}$  za koga je  $\|\vec{e}\| = 1$ .

Suprotni vektor vektora  $\vec{a}$  je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju suprotnu orijentaciju od orijentacije usmjerenih dužina vektora  $\vec{a}$  i označavamo ga s  $(-\vec{a})$ .

**Primjedba 1.3.** Ako je  $O$  proizvoljna, ali fiksna točka u prostoru  $E$ , a  $\vec{a}$  dani vektor, onda postoji jedinstvena točka  $P \in E$ , takva da je  $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$  (vidi Sliku 1.1).



Slika 1.1:

Navedimo još nekoliko često korištenih pojmova.

- kažemo da su dva ili više vektora kolinearni ako njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima;
- kažemo da su tri ili više vektora komplanarni ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

U daljnjem tekstu koristit ćemo sljedeće oznake [7]:

$X(E)$  – skup svih vektora u prostoru  $E$ ;

$X(M)$  – skup svih vektora u ravnini  $M$ ;

$X(p)$  – skup svih vektora na pravcu  $p$ .

Ako izaberemo jednu fiksnu točku  $O \in E$ , onda svakoj točki  $P \in E$  pripada jedinstvena usmjerena dužina  $\overrightarrow{OP}$ , koju zovemo **radijvektor** ili **vektor položaja** [1, 5, 7] (vidi također *Dodatak: Vektori* u [13]). Skup svih ovakvih radijvektora označit ćemo s

$$X_0 = X_0(E) := \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}.$$

Očigledno postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova  $E$  i  $X_0$ .

*Zadatak 1.1.* Napišite definiciju relacije ekvivalencije.

a) U skupu  $\mathbb{Z}$  definirana je relacija „djeljivosti” na sljedeći način: Cijeli broj  $a$  je u relaciji  $\rho$  s cijelim brojem  $b$  i pišemo  $a\rho b$  ako je  $a$  djeljiv s  $b$ . Zašto relacija  $\rho$  nije relacija ekvivalencije?

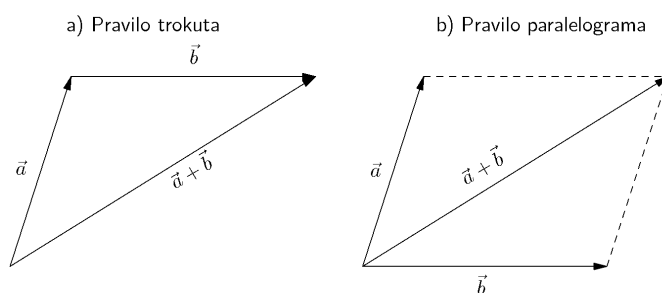
b) Koje od sljedećih relacija nisu relacije ekvivalencije u skupu  $X_0(E)$ ? Zašto?

a) paralelnost    b) okomitost    c) kolinearnost    d) komplanarnost

## 1.1 Operacije s vektorima

### 1.1.1 Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora je binarna operacija, tj. funkcija dviju varijabli  $+$  :  $X(E) \times X(E) \rightarrow X(E)$ . Za dva vektora  $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$  definiramo novi vektor  $\vec{c} := \vec{a} + \vec{b}$  pravilom trokuta (vidi Sliku 1.2.a) ili pravilom paralelograma (vidi Sliku 1.2.b).



Slika 1.2: Pravila za zbrajanje vektora

Binarna operacija zbrajanja vektora ima svojstvo zatvorenosti ili grupoidnosti, tj. rezultat operacije zbrajanja dva vektora opet je jedan vektor. Pored toga,

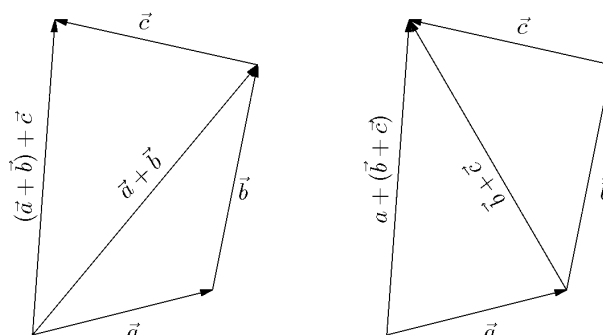
- (i) vrijedi svojstvo asocijativnosti, tj. za svaka tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X(E)$  vrijedi:  
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- (ii) postoji neutralni element  $\vec{0}$ , tako da za proizvoljni vektor  $\vec{a} \in X(E)$  vrijedi:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ;
- (iii) za svaki vektor  $\vec{a} \in X(E)$  postoji inverzni element – suprotni vektor  $(-\vec{a})$ , takav da vrijedi:  
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ;
- (iv) vrijedi zakon komutacije, tj. za svaka dva vektora  $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$  vrijedi:  
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;

Navedena svojstva lako se mogu ilustrirati. Primjerice, svojstvo asocijativnosti ilustrirano je na Slici 1.3.

Skup svih vektora u prostoru snabdjeven računskom operacijom zbrajanja i prethodno navedenim svojstvima nazivamo **komutativna** ili **Abelova grupa**<sup>2</sup> i označavamo s  $(X(E), +)$ .

**Zadatak 1.2.** Definirajte binarnu operaciju zbrajanja na skupu  $X_0(E)$  i navedite njena svojstva.

<sup>2</sup>Niels Abel (1802-1829), norveški matematičar.

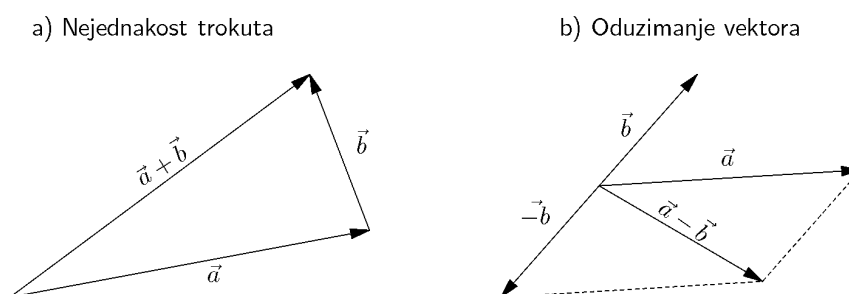


Slika 1.3: Ilustracija svojstva asocijativnosti zbrajanja vektora

**Primjer 1.2.** Odaberimo reprezentante vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tako da oni leže na stranicama trokuta i da bude  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  (vidi Sliku 1.4.a). Kako je u svakom trokutu duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije, vrijedi tzv. nejednakost trokuta

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Pri tome jednakost vrijedi u slučaju ako su vektori  $\vec{a}, \vec{b}$  kolinearni.



Slika 1.4: Ilustracija nejednakosti trokuta (lijevo) i oduzimanja vektora (desno)

**Primjedba 1.4.** Oduzimanje vektora možemo definirati preko zbrajanja, ko-



risteći inverzni element (suprotni vektor – vidi Sliku 1.4.b):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

**Primjedba 1.5.** Množenje vektora prirodnim brojem možemo definirati induktivno:

$$n \cdot \vec{a} = (n - 1) \cdot \vec{a} + \vec{a}, \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

### Z a d a c i<sup>3</sup>

**Zadatak 1.3.** Zašto skup  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i skup cijelih brojeva snabdjeven binarnom operacijom množenja nisu grupe?

**Zadatak 1.4.** Neka je  $G$  skup svih kompleksnih brojeva različitih od nule oblika  $a + ib\sqrt{2}$ , gdje su  $a$  i  $b$  racionalni brojevi, tj.  $G = \{z \in \mathbb{C} : z = a + ib\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ . Pokažite da je  $G$  Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Što je inverzni element elementa  $z = a + ib\sqrt{2}$ ?

Rješenje:  $e = 1$ ;  $z^{-1} = \frac{a}{a^2+2b^2} - i\frac{b}{a^2+2b^2}\sqrt{2}$

**Zadatak 1.5.** Neka je  $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$  podskup u skupu kompleksnih brojeva. Pokažite da je  $G$  Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Napravite tablicu množenja za ovu grupu.

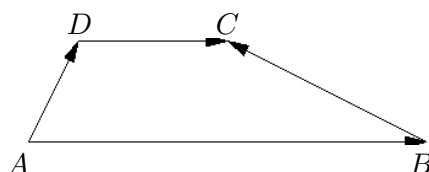
Rješenje:  $e = 1$

**Zadatak 1.6.** Zadan je trapez čije su stranice usmjerene dužine  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{DC}$ ,  $\vec{AD}$  kao na slici, pri čemu je  $\vec{AB} = 2\vec{DC}$ . Prikažite usmjerenu dužinu  $\vec{BC}$  pomoću usmjerenih dužina  $\vec{AB}$  i  $\vec{AD}$ .  $[\vec{BC} = \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}]$

**Zadatak 1.7.** Matematičkom indukcijom dokažite generaliziranu nejednakost trokuta

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\vec{a}_i\|.$$

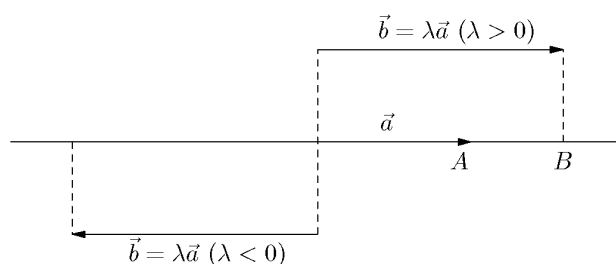
<sup>3</sup>Studenti trebaju pisati **Domaće zadaće** koje će dobivati na Vježbama iz ovog predmeta i **Domaće zadaće za studente koji preferiraju bolju ocjenu** koje mogu preuzeti sa web-stranice predmeta <http://www.mathos.unios.hr/index.php/nastava/preddiplomski-studij-matematika/182> Zadaće se pišu korištenjem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X [17] i šalju voditelju Vježbi u pdf-formatu



Kada će u ovoj nejednakosti vrijediti jednakost?

### 1.1.2 Množenje vektora sa skalarom

Množenje vektora sa skalarom je funkcija dviju varijabli  $\cdot : \mathbb{R} \times X(E) \rightarrow X(E)$ . Za realni broj  $\lambda \in \mathbb{R}$  i vektor  $\vec{a} \in X(E)$  definiramo novi vektor  $\vec{b} := \lambda \cdot \vec{a}$  kao na Slici 1.5.



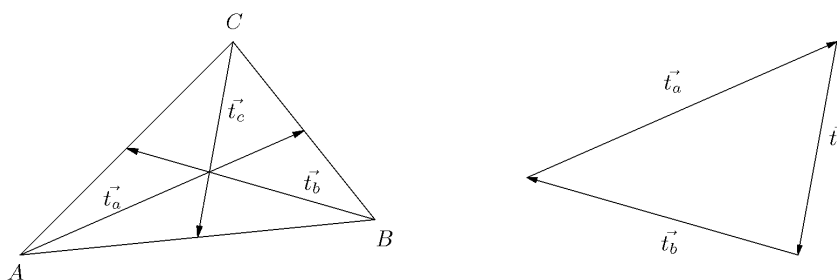
Slika 1.5: Množenje vektora sa skalarom

Primijetite da se analogno može definirati množenje vektora sa skalarom na skupu  $X_0(E)$ .

**Zadatak 1.8.** Za zadane vektore  $\vec{a}, \vec{b} \in X(M)$  nacrtajte vektor  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .

**Zadatak 1.9.** Pokažite da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju.

**Primjer 1.3.** Treba dokazati da postoji trokut sa stranicama koje su jednake i paralelne s težišnicama bilo kojeg zadanog trokuta (vidi Sliku 1.6).



Slika 1.6: Slika uz Primjer 1.3

Koristeći prethodni zadatak, dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{t}_a &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \\ \vec{t}_b &= \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}), \\ \vec{t}_c &= \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}),\end{aligned}$$

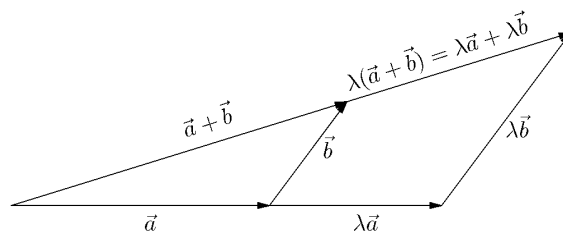
odakle zbrajanjem dobivamo  $\vec{t}_a + \vec{t}_b + \vec{t}_c = \vec{0}$ .

U kontinuitetu sa svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora, navedimo i svojstva koja vrijede za množenje vektora sa skalarom:

- (v) za dva vektora  $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$  i  $\lambda \in \mathbb{R}$  vrijedi distributivnost obzirom na vektorski faktor:  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ;
- (vi) za dva skalara  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  i vektor  $\vec{a} \in X(E)$  vrijedi distributivnost obzirom na skalarni faktor:  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ;
- (vii) za dva skalara  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  i vektor  $\vec{a} \in X(E)$  vrijedi svojstvo kvaziasocijativnosti:  $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ ;
- (viii) za bilo koji vektor  $\vec{a} \in X(E)$  vrijedi:  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .

Svojstvo (v) proizlazi iz sličnosti trokuta i ilustrirano je na Slici 1.7.

Svojstva (vi) i (vii) dokazuju se posebno za svaku kombinaciju predznaka skalara  $\lambda$  i  $\mu$  (vidi [7]).



Slika 1.7: Ilustracija distributivnosti množenja sa skalarom

Skup  $X(E)$  snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i operacijom množenja sa skalarom, koje imaju navedenih osam svojstava nazivamo **vektorski prostor** i označavamo s  $(X(E), +, \cdot)$  [1–11, 15, 16, 18]. Analogno se definiraju i vektorski prostor  $(X(M), +, \cdot)$  u ravnini i vektorski prostor  $(X(p), +, \cdot)$  na pravcu. Kako je  $X(M) \subset X(E)$ , reći ćemo da je vektorski prostor  $(X(M), +, \cdot)$  **vektorski potprostor** u  $(X(E), +, \cdot)$ . Nadalje ćemo ove vektorske prostore označavati samo s  $X(E), X(M), X(p)$ .

**Primjedba 1.6.** Ako su  $\vec{a}, \vec{b}$  dva kolinearna vektora, tada postoji pravac  $p$  i točke  $O, A, B \in p$  takve da je  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ , pri čemu je

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, \quad \text{gdje je} \quad \lambda = \begin{cases} \|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ imaju isti smjer} \\ -\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a}, \vec{b} \text{ su suprotnog smjera} \end{cases}$$

Matematičku strukturu  $(X_0, +, \cdot)$  zovemo **vektorski prostor radijvektora** (detaljnije vidi [1]), pri čemu je  $+ : X_0 \times X_0 \rightarrow X_0$  zbrajanje sa svojstvima<sup>4</sup>

- (i)  $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0) \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  [asocijativnost]
- (ii)  $(\exists \vec{0} \in X_0) (\forall \vec{a} \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  [  $\vec{0}$  je neutralni element za zbrajanje]
- (iii)  $(\forall \vec{a} \in X_0) (\exists! \vec{a}' \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{a}' = \vec{a}' + \vec{a} = \vec{0}$  [inverzni element:  $\vec{a}' = -\vec{a}$ ]
- (iv)  $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in X_0) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  [komutativnost]

<sup>4</sup>Prije toga uvesti **univerzalni** ( $\forall$ ) i **egzistencijalni** ( $\exists$ ) kvantifikator t. 6.1

$\cdot : \mathbb{R} \times X_0 \rightarrow X_0$  množenje sa skalarom sa svojstvima

$$(v) (\forall \vec{a}, \vec{b} \in X_0) (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad [\text{distributivnost u vektorskom faktoru}]$$

$$(vi) (\forall \vec{a} \in X_0) (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad [\text{distributivnost u skalarom faktoru}]$$

$$(vii) (\forall \vec{a} \in X_0) (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) \quad [\text{kvaziasocijativnost}]$$

$$(vii) (\forall \vec{a} \in X_0) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

### Primjeri vektorskih prostora

- $X(E), X(M), X(p), X_0$ ;
- Skup  $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  s računskim operacijama

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \quad (\text{zbrajanje})$$

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \quad (\text{množenje sa skalarom})$$

- Skup  $\mathbb{C}^n$  s odgovarajućim računskim operacijama *zbrajanja* i *množenja sa skalarom*;
- Skup polinoma  $P_n$  stupnja manjeg ili jednakog  $n$  s realnim koeficijentima (uključujući i polinom nultog stupnja) snabdjeven računskim operacijama

*zbrajanja:*

$$(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) + (b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n,$$

*množenja sa skalarom:*

$$\lambda(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \dots + (\lambda a_n)t^n.$$

- Skup  $C([a, b])$  svih neprekidnih funkcija definiranih na segmentu  $[a, b]$  snabdjeven računskim operacijama

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in [a, b] \quad (\text{zbrajanje})$$

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in [a, b] \quad (\text{množenje sa skalarom})$$

### 1.1.3 Potprostor

**Definicija 1.3.** Neka je  $X$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  i  $Y \subseteq X$ ,  $Y \neq \emptyset$ . Ako je  $(Y, +, \cdot)$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  s istim operacijama iz  $X$ , onda kažemo da je  $Y$  potprostor u  $X$  i pišemo  $Y \subseteq X$ .

Primjerice  $X_0(M)$  i  $X_0(p)$  su potprostori u  $X_0(E)$ .

Slično, za  $\vec{a} \in X_0(M)$  njegova linearna ljuska  $L(\vec{a}) = \{\lambda\vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  je potprostor u  $X_0(M)$ .

Trivijalni vektorski potprostori vektorskog prostora  $X$  su  $\{0\}$  i sam  $X$ .

Lako se može provjeriti da vrijedi:

**Propozicija 1.1.** Neka je  $X$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  i  $Y \subseteq X$ ,  $Y \neq \emptyset$ . Tada je  $Y$  potprostor u  $X$  onda i samo onda ako vrijedi

$$(i) \quad a + b \in Y, \quad \forall a, b \in Y$$

$$(ii) \quad \lambda a \in Y \quad \forall a \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

**Korolar 1.1.** Neka je  $X$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  i  $Y \subseteq X$ ,  $Y \neq \emptyset$ . Tada je  $Y$  potprostor u  $X$  onda i samo onda ako vrijedi

$$(i') \quad \lambda x + \mu y \in Y, \quad \forall x, y \in Y, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

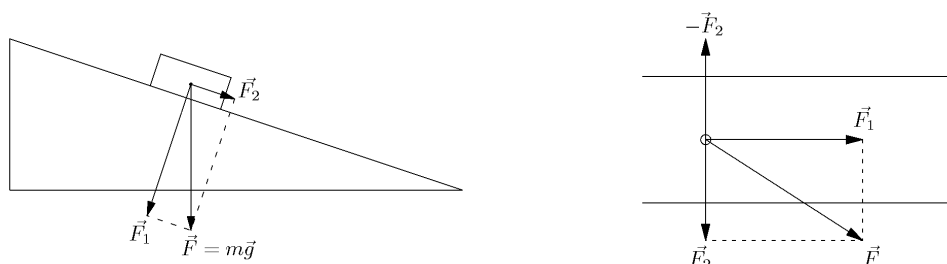
## 1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

**Definicija 1.4.** Ako su  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$  vektori, a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  skalari, tada vektor  $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n \in X_0$  nazivamo **linearna kombinacija** vektora  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ . Kažemo još da je vektor  $\vec{a}$  rastavljen (razvijen) po vektorima  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ .

Pogledajmo dva jednostavna fizikalna primjera (vidi Sliku 1.8):

- na tijelo na kosini djeluje sila teža  $\vec{F}$ , koju po pravilu paralelograma rastavljamo na sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ :  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ;
- na tijelo u vodi djeluje vučna sila  $\vec{F}$ , koju također rastavljamo po pravilu paralelograma na sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ :  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ;

Navedene rastave možemo zapisati kao  $1 \cdot \vec{F} + (-1) \cdot \vec{F}_1 + (-1) \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$ .



Slika 1.8: Rastav sile

**Definicija 1.5.** Kažemo da je skup vektora  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$  **linearno nezavisan** ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

U protivnom kažemo da je skup vektora **linearno zavisan**, tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivialan način, tj.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{pri čemu} \quad \exists \lambda_i \neq 0.$$

**Primjer 1.4.** Ako skup vektora  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  sadrži nulvektor, on je linearno zavisan.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je baš prvi vektor  $\vec{a}_1$  nulvektor. Tada možemo utvrditi da vrijedi:

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

pa smo na taj način pronašli jednu linearnu kombinaciju vektora  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ , koja iščezava na netrivialan način.

Primijetite da su sile  $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$  iz fizikalnih primjera s početka odjeljka također linearno zavisne. Sljedeći teorem ukazuje nam kako se na jedan operativniji način može ustanoviti<sup>5</sup> je li skup vektora linearno zavisan ili nezavisan.

**Teorem 1.1.** Skup vektora  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$  je linearno zavisan onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.

<sup>5</sup>Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti pojam: **nužno i dovoljno** t. 6.2

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je skup vektora  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$  linearno zavisan. Po prethodnoj definiciji to znači da postoji njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivialan način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ , a da je pri tome  $\lambda_1 \neq 0$ . Tada možemo pisati

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \vec{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \vec{a}_n.$$

(Dovoljnost) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$  iz čega slijedi

$$1 \cdot \vec{a}_1 + (-\beta_2) \vec{a}_2 + \dots + (-\beta_n) \vec{a}_n = \vec{0}.$$

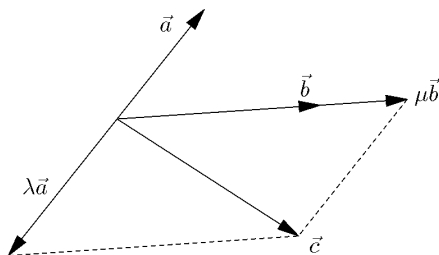
Po definiciji to znači da su vektori  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$  linearno zavisni. ♣

**Primjer 1.5.** Bilo koja dva vektora  $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$  su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u  $X_0(p)$  je jedan).



Slika 1.9: Linearna zavisnost dvaju vektora  $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$

**Primjer 1.6.** Bilo koja tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$  su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u  $X_0(M)$  je dva).



Slika 1.10: Linearna zavisnost triju vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$

**Primjer 1.7.** Bilo koja četiri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in X_0(E)$  su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u  $X_0(E)$  je tri).



**Zadatak 1.10.** Pokažite da su dva vektora  $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$  kolinearna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

**Zadatak 1.11.** Pokažite da su tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$  komplanarna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

**Teorem 1.2.** *Ako su  $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$  dva linearno nezavisna vektora u ravnini, tada se svaki vektor  $\vec{c} \in X_0(M)$  na jedinstven način<sup>6</sup> može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora  $\vec{a}, \vec{b}$ .*

Dokaz. Prema Primjeru 1.6 vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  su linearno zavisni pa prema Teoremu 1.1 vrijedi

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}. \quad (1.1)$$

U svrhu dokaza jedinstvenosti ovog rastava, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se vektor  $\vec{c}$  barem na još jedan način može prikazati pomoću vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ :

$$\vec{c} = \lambda' \vec{a} + \mu' \vec{b} \quad (1.2)$$

Oduzimanjem jednakosti (1.1), (1.2) dobivamo

$$(\lambda - \lambda') \vec{a} + (\mu - \mu') \vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su vektori  $\vec{a}, \vec{b}$  linearno nezavisni, slijedi:  $\lambda = \lambda' \quad \& \quad \mu = \mu'$ . ♣

Na sličan način može se dokazati i sljedeći teorem.

**Teorem 1.3.** *Ako su  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$  tri linearno nezavisna vektora u prostoru, tada se svaki vektor  $\vec{d} \in X_0(E)$  na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .*

**Zadatak 1.12.** Neka je  $O \in E$  fiksna točka i neka točka  $C \in E$  dijeli dužinu  $\overline{AB}$  u omjeru  $3 : 1$ , tj.  $d(A, C) : d(C, B) = 3 : 1$ . Vektor  $\overrightarrow{OC}$  prikažite kao linearnu kombinaciju vektora  $\overrightarrow{OA}$  i  $\overrightarrow{OB}$ .

Rješenje:  $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{OB}$ .

**Zadatak 1.13.** Proverite jesu li vektori:  $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{c} = -5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$  linearno zavisni.

Rješenje: Jesu,  $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

<sup>6</sup>Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti **princip kontradikcije**, t. 6.3

### 1.3 Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav

#### Definicija 1.6.

Uređena trojka  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  linearno nezavisnih vektora iz  $X_0(E)$  zove se **baza vektorskog prostora**  $X_0(E)$ .

Uređen par  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  linearno nezavisnih vektora iz  $X_0(M)$  zove se **baza vektorskog prostora**  $X_0(M)$ .

Svaki nenul vektor  $(\vec{e})$  iz  $X_0(p)$  čini bazu vektorskog prostora  $X_0(p)$ .

Neka je  $\vec{a} \in X_0(E)$ , a  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  baza u  $X_0(E)$ . Tada vektor  $\vec{a}$  na jedinstven način možemo zapisati

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Brojeve  $a_1, a_2, a_3$  zovemo **koordinate** (komponente) vektora  $\vec{a}$  u bazi  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Sada prirodno slijede pravila za zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom ako su oni zadani sa svojim koordinatama:

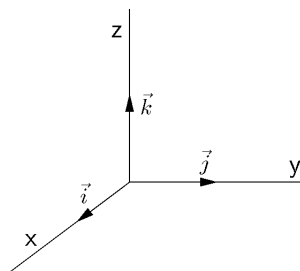
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \quad [\text{zbrajanje}]$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3 \quad [\text{množenje vektora skalarom}]$$

**Definicija 1.7.** Par  $(O; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$  fiksne točke  $O$  i baze  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  zovemo **Kartezijev<sup>7</sup> koordinatni sustav u prostoru  $E$** .

Posebno je pogodno ako za bazu prostora  $X_0(E)$  izaberemo uređenu trojku međusobno okomitih i jediničnih (dugačkih 1!) vektora, koje obično označavamo s  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Tako dobivamo **pravokutni Kartezijev koordinatni sustav**  $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ . Pravac određen vektorom  $\vec{i}$  označavamo sa  $x$  i zovemo **os apscisa**, pravac određen vektorom  $\vec{j}$  označavamo sa  $y$  i zovemo **os ordinata**, a pravac određen vektorom  $\vec{k}$  označavamo sa  $z$  i zovemo **os aplikata**.

<sup>7</sup>Rene Descartes (1596-1650), francuski filozof i matematičar. Njegovo latinizirano ime je Cartesius



Slika 1.11: Pravokutni Kartezijev koordinatni sustav

**Primjedba 1.7.** Ranije smo utvrdili da postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova  $E$  i  $X_0$ . Primijetite da također postoji bijekcija između skupa svih uređenih trojki realnih brojeva  $\mathbb{R}^3$  i vektorskog prostora  $X_0(E)$  jer svakoj uređenoj trojki  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  na jedinstven način možemo pridružiti vektor  $\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$  iz prostora  $X_0(E)$  i obrnuto. Zato ćemo često po potrebi povezivati, pa neki puta i poistovjećivati pojmove: skup  $E$ , vektorski prostor  $X_0(E)$  i  $\mathbb{R}^3$ .

**Zadatak 1.14.** Provjerite čine li vektori  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$  bazu u vektorskom prostoru  $X_0(M)$ . Ako čine, vektor  $\vec{c} = -11\vec{i} + 6\vec{j}$  prikažite u toj bazi.

Rješenje: čine,  $\vec{c} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ .

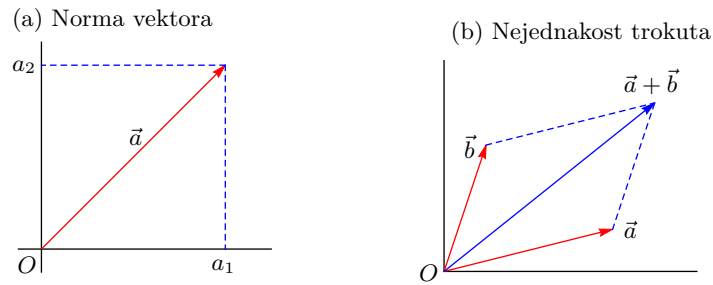
## 1.4 Norma vektora

Pretpostavimo da je u ravnini  $M$  definiran pravokutni Kartezijev koordinatni sustav  $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$  i neka je  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ . Sada možemo izračunati (vidi Sliku 1.12a) duljinu ovog vektora  $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

Primjetite da za ovako definiranu duljinu vektora vrijedi

- (i)  $\|\vec{a}\| \geq 0$  &  $(\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$ ,
- (ii)  $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$  (vidi Sliku 1.12b)

Duljina (norma, intenzitet) vektora može se i općenito definirati:



Slika 1.12:

**Definicija 1.8.** Neka je  $X_0$  vektorski prostor. Funkciju  $\|\cdot\| : X_0 \rightarrow [0, \infty)$ , koja svakom vektoru  $\vec{a} \in X_0$  pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s  $\|\vec{a}\|$  ili jednostavno  $a$ ) zovemo **norma** vektora  $\vec{a}$  ako vrijedi

- (i)  $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$  [pozitivna definitnost],
- (ii)  $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$  za svaki  $\lambda \in \mathbb{R}$  i za svaki  $\vec{a} \in X_0$ ,
- (iii)  $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$  za svaki  $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$  [nejednakost trokuta].

Najčešće korištene vektorske norme su<sup>8</sup>

$$\|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + |a_3|, \quad (l_1 \text{ norma})$$

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (l_2 \text{ Euklidova ili euklidska norma})$$

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}, \quad (l_\infty \text{ norma ili Čebiševljeva norma})$$

**Zadatak 1.15.** Pokažite da spomenute norme imaju sva svojstva navedena u prethodnoj definiciji.

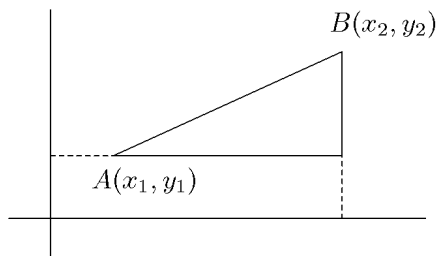
### 1.4.1 Udaljenost dviju točaka

Udaljenost dviju točaka  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in M$  u ravnini  $M$  u kojoj je uveden pravokutni Kartezijev koordinatni sustav možemo izračunati (vidi Sliku 1.13) po formuli

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.3)$$

Ako definiramo radijvektore  $\vec{r}_A, \vec{r}_B \in X_0(M)$ ,

<sup>8</sup>U programskom sustavu *Mathematica*  $l_2$ -normu vektora  $\vec{a}$  dobivamo naredbom `Norm[a]`, gdje je `a` lista



Slika 1.13: Udaljenost točkaka u ravnini

$$\vec{r}_A = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{r}_B = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

onda udaljenost zapisanu formulom (1.3) možemo zapisati kao

$$d_2(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2, \quad \text{gdje je } \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \quad (1.4)$$

Na sličan način može se definirati i udaljenost dviju točkaka preko  $l_1$  ili  $l_\infty$  norme sljedećim formulama:

$$d_1(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_1 \quad d_\infty(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_\infty. \quad (1.5)$$

Koji je geometrijski smisao  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_\infty$  udaljenosti dviju točkaka  $A, B \in M$ ?

**Primjer 1.8.** U realnom vektorskom prostoru  $\mathbb{R}^n$   $d_2$  udaljenost dviju točkaka  $A = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $B = (y_1, \dots, y_n)$  definira se kao  $d_2(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ . Kako bi se definirale odgovarajuće  $d_1$  i  $d_\infty$  udaljenosti?

**Zadatak 1.16.** Pokažite da funkcije  $d_i$ ,  $i = 1, 2, \infty$  definirane s (1.4)–(1.5) zadovoljavaju sljedeća svojstva

- (i)  $d_i(A, B) \geq 0, \quad \forall A, B \in M,$
- (ii)  $d_i(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$
- (ii)  $d_i(A, B) = d_i(B, A), \quad \forall A, B \in M,$
- (iv)  $d_i(A, B) \leq d_i(A, C) + d_i(C, B), \quad \forall A, B, C \in M.$

Zadovoljava li funkcija  $d_{LS}(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2^2$  navedena svojstva?

## 1.5. CAUCHY – SCHWARZ – BUNIAKOWSKY (CSB) NEJEDNAKOST 19

**Zadatak 1.17.** „Jedinična kružnica” sa središtem u  $O \in \mathbb{R}^2$  definira se kao skup  $\partial K = \{T \in M : d(O, T) = 1\}$ . Nacrtajte jedinične kružnice ako se udaljenost definira s  $d_1, d_2$  ili  $d_\infty$ .

**Zadatak 1.18.** Zadan je trapez  $ABCD$  s vrhovima:  $A(-3, 2, 1)$ ,  $B(3, -1, 4)$ ,  $C(5, 2, -3)$ . Odredite četvrti vrh  $D$  ako vrijedi  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$ .

Rješenje:  $\vec{r}_D = \vec{r}_C - \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_A$ ,  $D(3, 3, -4)$ .

**Zadatak 1.19.** Zadan je trokut  $ABC$  s vrhovima:  $A(-3, 2, 1)$ ,  $B(3, -2, 2)$ ,  $C(5, 2, -4)$ . Odredite duljinu težišnice iz vrha  $A$ .

Rješenje:  $P_A(4, 0, -1)$ ,  $\overrightarrow{AP_A} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $d = \sqrt{57}$ .

**Zadatak 1.20.** Zadan je paralelogram  $ABCD$  s vrhovima:  $A(-3, 2, 1)$ ,  $B(3, -1, 4)$ ,  $C(5, 2, -3)$ ,  $D(-1, 5, -6)$ . Izračunajte udaljenost točke  $A$  do sjecišta njegovih dijagonala.

Rješenje:  $S(1, 2, -1)$ ,  $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_D - \vec{r}_B)$ ,  $d(A, S) = 2\sqrt{5}$ .

**Zadatak 1.21.** Dokažite da vektor  $\vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$  s početkom u točki  $O$  ima vrh u polovištu dužine  $\overline{AB}$ .

## 1.5 Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost

Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost, vrlo je važna u različitim primjenama, a može se naći u brojnoj literaturi (vidi primjerice [1, 6, 7, 12, 14]). Pokažimo najprije sljedeću jednostavnu lemu (vidi [7]) pomoću koje ćemo dokazati CSB nejednakost.

**Lema 1.1.** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  kvadratna funkcija. Tada vrijedi:

$$(i) \quad b^2 - ac \leq 0 \iff f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad b^2 - ac = 0 \iff f(-\frac{b}{a}) = 0 \quad \& \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}.$$

Dokaz. Nultočke kvadratne funkcije  $f$  dobiju se iz dobro poznate formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}, \quad D = b^2 - ac.$$

Budući da je  $a > 0$  graf ove kvadratne funkcije (parabola) okrenut je prema gore i očigledno vrijedi

$$D = b^2 - ac \leq 0 \iff f(x) \geq 0.$$

Ako je  $D = b^2 - ac = 0$ , onda je  $f(-\frac{b}{a}) = 0$  i  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$  i obrnuto. ♣

**Teorem 1.4.** (Cauchy – Schwarz – Buniakowsky). *Za proizvoljne realne brojeve  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  vrijedi*

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2, \quad (1.6)$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji  $\lambda \in \mathbb{R}$ , takav da je  $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ .

Dokaz.

1. Ako je  $a_1 = \dots = a_n = 0$  (odnosno  $b_1 = \dots = b_n = 0$ ), teorem očigledno vrijedi.
2. Pretpostavimo zato da je barem jedan  $a_i \neq 0$  i definirajmo pomoćnu funkciju

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2,$$

koju možemo zapisati u obliku

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c, \quad a = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Kako je zbog  $a_i \neq 0, a > 0$  i  $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , onda prema prethodnoj lemi mora biti

$$b^2 - ac \leq 0, \quad (1.7)$$

što je zapravo nejednakost (1.6).

Još je preostalo dokazati da u (1.6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji  $\lambda \in \mathbb{R}$ , takav da bude  $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ .

1.5. CAUCHY – SCHWARZ – BUNIAKOWSKY (CSB) NEJEDNAKOST 21

( $\implies$ ) Pretpostavimo da u (1.6), odnosno (1.7), stoji jednakost. Prema prethodnoj lemi tada je  $f(-\frac{b}{a}) = 0$ , tj. vrijedi

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{b}{a}a_k + b_k\right)^2 = 0,$$

iz čega slijedi

$$-\frac{b}{a}a_k + b_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad \implies \quad b_k = \frac{b}{a}a_k \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

( $\impliedby$ ) Pretpostavimo da postoji  $\lambda \in \mathbb{R}$ , takav da bude  $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ . Tada je specijalno

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^n a_k^2, & b &= \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \lambda a_k = \lambda a, \\ c &= \sum_{k=1}^n b_k^2 = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k)^2 = \lambda^2 a, \end{aligned}$$

pa imamo

$$D = b^2 - ac = (\lambda a)^2 - a \cdot \lambda^2 \cdot a = 0,$$

što daje jednakost u (1.7), odnosno (1.6).



**Korolar 1.2.** (Hölderova nejednakost). *Za proizvoljne realne brojeve  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  vrijedi*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}, \quad (1.8)$$

*pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji  $\lambda \geq 0$ !, takav da bude  $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ .*

*Dokaz.* **1.** Ako je  $a_1 = \dots = a_n = 0$  (odnosno  $b_1 = \dots = b_n = 0$ ), korolar očigledno vrijedi.



2. Pretpostavimo zato da je barem jedan  $a_i \neq 0$ . Budući da uz ranije oznake iz (1.7) slijedi  $b^2 \leq ac$ , odnosno  $b \leq |b| \leq \sqrt{a} \sqrt{c}$ , imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= a + 2b + c \leq a + 2\sqrt{a} \sqrt{c} + c = (\sqrt{a} + \sqrt{c})^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

što daje (1.8).

Još je preostalo dokazati da u (1.6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji  $\lambda \geq 0$ , takav da bude  $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ .

- ( $\implies$ ) Pretpostavimo da u (1.8), stoji jednakost. To znači da i u (1.9) stoji jednakost, a to znači da je  $b = \sqrt{a} \sqrt{c}$ , odnosno  $b^2 - ac = 0$ . Prema Lemi 1.1 vrijedi

$$0 = f\left(-\frac{b}{a}\right) = \sum_{k=1}^n \left(a_k \left(-\frac{b}{a}\right) + b_k\right)^2,$$

iz čega slijedi  $b_k = \lambda a_k$ , za svaki  $k = 1, \dots, n$ , pri čemu, zbog  $a > 0$  i  $b \geq 0$ , vrijedi  $\lambda = \frac{b}{a} \geq 0$ .

- ( $\impliedby$ ) Pretpostavimo da postoji  $\lambda \geq 0$ , takav da bude  $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ . Kako je

$$\begin{aligned} a &:= \sum_{k=1}^n a_k^2, & \sum_{k=1}^n b_k^2 &= \lambda^2 a, \\ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n (a_k + \lambda a_k)^2 = (1 + \lambda)^2 a, \end{aligned}$$

i  $\sqrt{\lambda^2} = \lambda$  (za  $\lambda \geq 0$ ) vrijedi:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} = (1 + \lambda)\sqrt{a} - \sqrt{a} - \lambda\sqrt{a} = 0,$$

što znači da u (1.8) vrijedi jednakost.

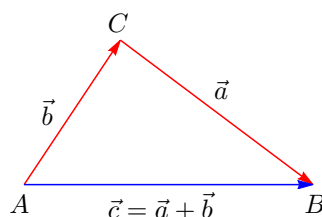
□

### 1.5. CAUCHY – SCHWARZ – BUNIAKOWSKY (CSB) NEJEDNAKOST 23

**Korolar 1.3.** (Nejednakost trokuta). *Ako definiramo vektore  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , onda Hölderovu nejednakost (1.8) možemo zapisati kao*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|, \quad (1.10)$$

gdje je  $\|\cdot\|$  euklidska  $\ell_2$  norma. Pri tome u (1.10) jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori  $a, b$  linearno zavisni.



Slika 1.14: Nejednakost trokuta

**Primjedba 1.8.** *Primijetite specijalno ako su zadane točke  $A, B, C \in \mathbb{R}^3$  i ako se udaljenost dviju točaka definira sukladno formuli (1.3), odnosno (1.4), onda nejednakost (1.10) daje nejednakost trokuta u  $\mathbb{R}^3$ :*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako točka  $C$  leži na spojnici  $\overline{AB}$ . Naime, vrijedi:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\| = \|(\vec{r}_B - \vec{r}_C) + (\vec{r}_C - \vec{r}_A)\| \\ &\leq \|\vec{r}_B - \vec{r}_C\| + \|\vec{r}_C - \vec{r}_A\| \\ &= d(C, B) + d(A, C). \end{aligned}$$

**Primjer 1.9.** *Neka su  $x$  i  $y$  realni brojevi takvi da je  $3x + 7y = 1$ . Dokažite da je*

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

Primjenom CSB nejednakosti uz  $n = 2$  i primjerice  $a_1 = x$ ,  $a_2 = y$ ,  $b_1 = 3$  i  $b_2 = 7$ , dobivamo da je

$$(3x + 7y)^2 \leq (x^2 + y^2)(3^2 + 7^2),$$

tj.

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

**Zadatak 1.22.** Neka su  $x, y, z \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$  takvi da je  $x + y + z = 1$ . Odredite maksimalnu vrijednost izraza

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1}.$$

**Zadatak 1.23.** Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nenegativni realni brojevi takvi da je  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Dokažite:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

**Zadatak 1.24.** Dokažite da za svaki  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  vrijedi nejednakost

$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4).$$

**Zadatak 1.25.** Neka su dana dva trokuta: trokut  $T_1$  sa stranicama  $a, b, c$  i trokut  $T_2$  sa stranicama  $x, y, z$ . Dokažite da su trokuti  $T_1$  i  $T_2$  slični ako i samo ako vrijedi

$$(\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz})^2 = (a + b + c)(x + y + z).$$

**Zadatak 1.26.** Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

**Zadatak 1.27.** Neka su  $a, b, c$  duljine stranica pravokutnog trokuta ( $a, b$  - katete,  $c$  - hipotenuza). Dokažite:

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

## 1.6 Skalarni produkt

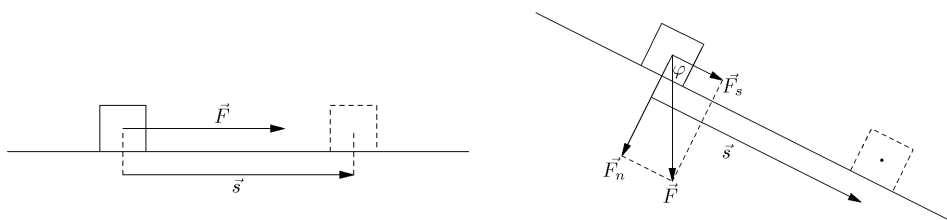
Motivacija za uvođenje pojma skalarnog produkta vektora je fizikalna definicija rada sile  $\vec{F}$  na putu  $\vec{s}$ . Ako rad obavlja sila  $\vec{F}$  koja djeluje u smjeru puta  $\vec{s}$ , onda je rad zadan s (vidi Sliku 1.15 (lijevo))

$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| = F s,$$

a ako sila  $\vec{F}$  ne djeluje u smjeru puta  $\vec{s}$ , onda rad obavlja samo komponenta  $\vec{F}_s$  sile u smjeru puta  $\vec{s}$  (vidi Sliku 1.15 (desno)), tj.

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_n,$$

$$W = \|\vec{F}_s\| \cdot \|\vec{s}\| = (F \cos \varphi) s = F s \cos \varphi$$



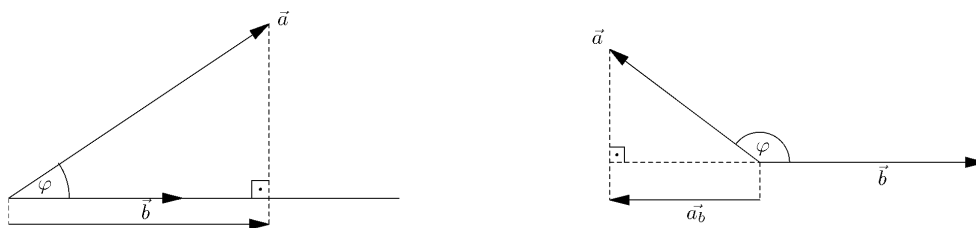
Slika 1.15: Rad sile  $\vec{F}$  na putu  $\vec{s}$

Primijetite da je sila  $\vec{F}_s$  ortogonalna projekcija sile  $\vec{F}$  u smjeru vektora puta  $\vec{s}$ .

Općenito ćemo projekciju vektora  $\vec{a}$  u smjeru vektora  $\vec{b}$  označiti s  $\vec{a}_b$ . Pod skalarnom projekcijom vektora  $\vec{a}$  u smjeru vektora  $\vec{b}$  podrazumijevamo (uz oznaku  $a := \|\vec{a}\|$ )<sup>9</sup>

$$a_b = a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Primijetite da broj  $a \cos \varphi$  može biti nula ( $a = 0$  ili  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), pozitivan ( $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ) ili negativan ( $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ).



Slika 1.16: Projekcija vektora  $\vec{a}$  u smjeru vektora  $\vec{b}$

**Zadatak 1.28.** Pokušajte geometrijski opravdati niže navedena svojstva projekcije vektora

<sup>9</sup>U nekim knjigama se broj  $a_b$  naziva „projekcija vektora  $\vec{a}$  u smjeru vektora  $\vec{b}$  ([5])”

- a) Projekcija produkta skalara s vektorom jednaka je produktu tog skalara i projekcije vektora

$$(\lambda \vec{a})_b = \lambda \vec{a}_b,$$

- b) Projekcija zbroja dva vektora jednaka je zbroju projekcija tih vektora

$$(\vec{a} + \vec{b})_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c.$$

**Definicija 1.9.** *Skalarni produkt u  $X_0(E)$  je operacija  $\cdot : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  koja paru vektora  $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$  pridružuje broj (skalar), kojeg ćemo označiti s  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , tako da je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}, & \text{ako je } \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0}, \\ ab \cos \varphi \in \mathbb{R}, & \text{ako je } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases}$$

pri čemu je običaj da se i rezultat operacije naziva skalarni produkt.<sup>10</sup>

Koristeći ranije uveden pojam projekcije vektora, skalarni produkt možemo zapisati kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi = \begin{cases} a(b \cos \varphi) = a b_a, & \text{ili} \\ b(a \cos \varphi) = b a_b. \end{cases}$$

Navedimo neka svojstva skalarnog produkta:

1.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ , [slijedi iz Zadatka 1.28b]
2.  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ , [slijedi iz Zadatka 1.28a]
3.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ,
4.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$  i  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ .

Svojstva 3. i 4. slijede direktno iz Definicije 1.9.

**Primjer 1.10.** *Lako se na osnovi Definicije 1.9 vidi da vrijedi:*

1.  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$ ,
2.  $(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$ ,
3.  $(\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$ ,
4.  $(\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$ .

<sup>10</sup>engl.: scalar (dot) product, njem.: Skalarprodukt (Ineresprodukt)

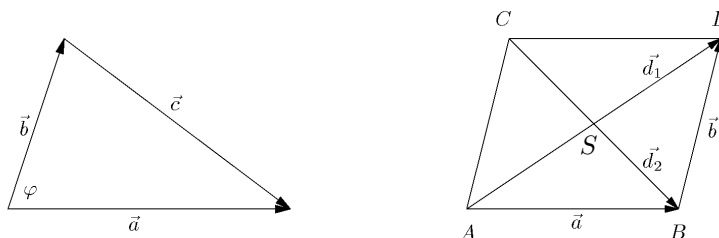
**Primjer 1.11.** (Poučak o kosinusima). *Dokažimo Poučak o kosinusima. Označimo vektore  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  i kut  $\varphi$  u kosokutnom trokutu kao na Slici 1.17. Množeci skalarno vektor*

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

s vektorom  $\vec{c}$  dobivamo

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 \\ &= a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2. \end{aligned}$$

Slično pokušajte izvesti formule i za druge stranice kosokutnog trokuta.



Slika 1.17: Slika uz Primjer 10 (lijevo) i Primjer 11 (desno)

**Primjer 1.12.** *Dokažimo da se dijagonale romba raspolavljaju i da su međusobno okomite.*

1. Dokažimo da se dijagonale romba raspolavljaju, tj. da vrijedi:  $|\overline{CS}| = |\overline{SB}|$  i  $|\overline{AS}| = |\overline{SC}|$ .

Primijetite da su trokuti  $\triangle ASB$  i  $\triangle SDC$  sukladni jer su im najdulje stranice sukladne, a kutovi uz njih jednaki. (Što znači da su dva geometrijska lika sukladna? Uz koje uvjete su dva trokuta sukladna?) Zato su im i odgovarajuće stranice sukladne iz čega slijedi tražena tvrdnja.

2. Pokažimo da su dijagonale romba međusobno okomite. Iz slike se vidi da je  $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$  i  $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$ . Tražena tvrdnja slijedi iz činjenice što skalarni produkt

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2 = 0$$

išezava (duljine stranica  $a$ ,  $b$  romba su jednake).

**Primjer 1.13.** Načinimo tablicu skalarnog množenja za ortonormiranu bazu  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  vektorskog prostora  $X_0(E)$

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{k} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Direktnom provjerom uz korištenje tablice množenja iz *Primjera 1.13* dobivamo

**Teorem 1.5.** Za vektore

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula<sup>11</sup>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (1.11)$$

Iz definicije skalarnog produkta i norme vektora korištenjem formule (1.11) dobivamo

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (1.12)$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \quad (1.13)$$

**Primjer 1.14.** Pokažimo da su dijagonale četverokuta  $ABCD$  s vrhovima  $A(1, -2, 2)$ ,  $B(1, 4, 0)$ ,  $C(-4, 1, 1)$ ,  $D(-5, -5, 3)$  međusobno okomite.

Kako je  $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  i  $\overrightarrow{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = -6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$ , imamo  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

**Primjer 1.15.** Zadan je trokut  $ABC$  s vrhovima  $A(-1, -2, 4)$ ,  $B(-4, -2, 0)$ ,  $C(3, -2, 1)$ . Treba odrediti unutrašnji kut tog trokuta pridružen vrhu  $B$ .

<sup>11</sup>U programskom sustavu *Mathematica* skalarni produkt vektora  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  dobivamo naredbom  $a \cdot b$  ili  $\text{Dot}[a, b]$ , gdje su  $a, b$  liste

Kako je  $\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 3\vec{i} + 4\vec{k}$  i  $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 7\vec{i} + \vec{k}$ , dobivamo

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \beta = \frac{\pi}{4}.$$

### Z a d a c i

**Zadatak 1.29.** Pokažite da je zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak dvostrukom zbroju kvadrata duljina njegovih stranica.

Uputa: stranice i dijagonale paralelograma orijentirajte tako da bude:  $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Zadatak 1.30.** Pokažite da su nasuprotni bridovi pravilnog tetraedra  $ABCD$  međusobno okomiti.

Uputa: primijetite da je kut između susjednih bridova  $60^\circ$ .

**Zadatak 1.31.** Odredite kut nasuprot osnovice jednakokravnog trokuta ako su težišnice na krakove međusobno okomite.

Rješenje:  $\alpha \approx 37^\circ$ .

**Zadatak 1.32.** Ako je vektor  $\vec{a} + 3\vec{b}$  okomit na vektor  $7\vec{a} - 5\vec{b}$  i vektor  $\vec{a} - 4\vec{b}$  okomit na vektor  $7\vec{a} - 2\vec{b}$ , odredite kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

Rješenje:  $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi_2 = \frac{2}{3}\pi$ .

**Zadatak 1.33.** Odredite kut između jediničnih vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  ako se zna da su vektori  $\vec{a} + 2\vec{b}$  i  $5\vec{a} - 4\vec{b}$  međusobno okomiti.

Rješenje:  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

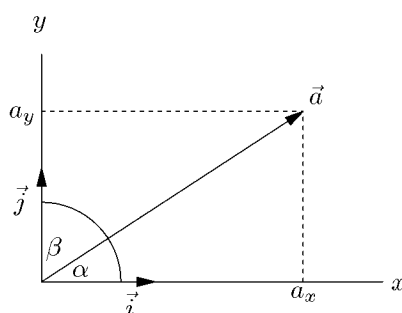
**Zadatak 1.34.** Pokažite da se visine trokuta sijeku u jednoj točki (ortocentar).

**Zadatak 1.35.** Pokažite da su vektori  $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$  i  $\vec{c}$  međusobno okomiti.

#### 1.6.1 Kosinusi smjerova

Promatrajmo najprije vektor  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \in X_0(M)$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , u ravnini, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut  $\alpha$  s pozitivnim smjerom osi  $x$ , a kut  $\beta$  s pozitivnim smjerom osi  $y$ .





Slika 1.18: Kosinusi smjerova

Očigledno je

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cos \alpha, \\ a_2 &= a \cos \beta, \quad (\text{odnosno zbog } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad a_2 = a \sin \alpha), \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta),$$

odnosno zbog (1.12)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Primijetite da je  $\vec{a} \cdot \vec{i} = a \cos \alpha$ , pa je  $a_1 = \vec{a} \cdot \vec{i}$ .

Neka je sada  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$  proizvoljni vektor u prostoru, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut  $\alpha$  s pozitivnim smjerom osi  $x$ , kut  $\beta$  s pozitivnim smjerom osi  $y$  i kut  $\gamma$  s pozitivnim smjerom osi  $z$ . Množeći redom vektor  $\vec{a}$  s baznim vektorima  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  dobivamo

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_1, \quad \vec{a} \cdot \vec{j} = a_2, \quad \vec{a} \cdot \vec{k} = a_3,$$

iz čega koristeći definiciju skalarnog produkta dobivamo

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a \cos \alpha \\ a_2 &= a \cos \beta \\ a_3 &= a \cos \gamma \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_1}{a} \\ \cos \beta &= \frac{a_2}{a} \\ \cos \gamma &= \frac{a_3}{a} \end{aligned} \right.$$

odnosno

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = 1. \quad (1.14)$$

### 1.6.2 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Skup uređenih  $n$ -torki realnih brojeva  $\mathbb{R}^n$  možemo interpretirati kao točke u  $n$  dimenzionalnom prostoru ili kao radij-vektore. Za dvije uređene  $n$ -torke realnih brojeva  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  možemo definirati sljedeće računske operacije.

- Zbrajanje  $+$ :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

- Množenje sa skalarom  $\cdot$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n);$$

Provjerite da skup vektora  $\mathbb{R}^n$  snabdjeven ovakvim zbrajanjem i množenjem sa skalarom ima strukturu vektorskog prostora.

U vektorski prostor  $\mathbb{R}^n$  možemo uvesti skalarni produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dva vektora  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

čime vektorski prostor  $\mathbb{R}^n$  postaje unitarni vektorski prostor.

Euklidska norma  $\| \cdot \|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  vektora  $x \in \mathbb{R}^n$  definira se kao

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Euklidsku udaljenost  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  dviju točaka  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  definiramo kao,

$$d(a, b) = \|b - a\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

U ovom kontekstu Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost možemo zapisati na sljedeći način.

**Teorem 1.6.** *Za proizvoljne vektore  $a, b \in \mathbb{R}^n$  vrijedi*

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|,$$

*pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori  $a, b \in \mathbb{R}^n$  linearno zavisni.*

**Zadatak 1.36.** Direktno dokažite Teorem 1.6 i navedite njegovo geometrijsko značenje.

**Zadatak 1.37.** Primjenom Teorema 1.6 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.

**Korolar 1.4.** (Hölderova nejednakost) Za proizvoljne vektore  $a, b \in \mathbb{R}^n$  vrijedi

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji  $\lambda \geq 0$  takav da je  $b = \lambda a$ .

**Zadatak 1.38.** Primjenom Teorema 1.6 i Korolara 1.4 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.

**Korolar 1.5.** (Nejednakost trokuta) Za proizvoljne točke  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$  vrijedi

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji  $\lambda \geq 0$  takav da je  $b = \lambda a$ .

## Poglavlje 6

# Dodatak

Neke važne matematičke pojmove, kao što su „pojam nužno i dovoljno”, „princip kontradikcije” i „univerzalni i egzistencijalni kvantifikator”, a koje ćemo često koristiti, pokušat ćemo objasniti na nekoliko jednostavnih primjera.

### 6.1 Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator

Egzistencijalni kvantifikator ( $\exists$ ) čitamo „postoji barem jedan” ili češće samo „postoji”. Primjerice, činjenicu da postoji prirodan broj  $p > 1$  koji dijeli broj 9 pišemo:  $(\exists p \in \mathbb{N}) p|9$ .

Univerzalni kvantifikator ( $\forall$ ) čitamo „za svaki” ili češće samo „svaki”. Primjerice, ako s  $\mathcal{P}$  označimo skup svih prim-brojeva, a s  $\mathcal{Q}$  skup svih složenih brojeva, onda vrijedi  $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \{1\}$ , a činjenicu da je svaki složeni broj  $q > 1$  djeljiv s barem jednim prim-brojem pišemo:  $(\forall q \in \mathcal{Q}) (\exists p \in \mathcal{P}) p|q$ .

### 6.2 Nužni i dovoljni uvjeti

**Primjer 6.1.** *Iz osnovne škole poznata nam je definicija četverokuta:*

Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

*Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki četverokut bio kvadrat?*

*Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu sve četiri stranice jednako dugačke. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki romb kvadrat.*

*Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu kutevi pravi. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki pravokutnik kvadrat.*

*Sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat je:*

- (i) sve njegove stranice jedanako su dugačke;*
- (ii) svi njegovi kutevi su pravi.*

*Zato kažemo:*

*Četverokut je kvadrat onda i samo onda ako su sve njegove stranice jednako dugačke i ako su svi njegovi kutevi pravi.*

*Svaki od navedenih uvjeta je „nužan”, ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat? Pokušajte definirati neki drugi sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat.*

**Primjer 6.2.** *Iz srednje škole poznata nam je definicija prim-broja (prostog broja):*

*Prosti brojevi ili prim-brojevi su svi prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a strogo su veći od broja 1.*

*Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki prirodni broj bio prim-broj?*

*Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka s brojem 1. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 8 prim-broj.*

*Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka sam sa sobom. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 4 prim-broj.*

*Nužni i dovoljni uvjeti da bi prirodni broj  $p \in \mathbb{N}$  bio prim-broj su:*

- (i) broj  $p$  djeljiv je bez ostatka s 1;*
- (ii) broj  $p$  djeljiv je bez ostatka sam sa sobom;*
- (iii) broj  $p$  nije djeljiv bez ostatka ni s jednim drugim prirodnim brojem;*
- (iv)  $p > 1$ .*

*Zato kažemo:*

*Prirodni broj  $p > 1$  je prim-broj onda i samo onda ako je djeljiv samo s 1 i sam sa sobom.*

*Svaki od navedenih uvjeta je „nužan”, ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta koji određuje skup primbrojeva?*

### 6.3 Princip kontradikcije

Princip kontradikcije zasniva se na Aristotelovom principu isključenja trećeg: „Neka tvrdnja je istinita ili lažna, a treća mogućnost ne postoji”.

**Primjer 6.3.** *U prostoriji se nalazi 400 studenata.*

*Tvrdnja  $T$ : Barem dva studenta imaju na isti dan rođendan.*

*Tvrdnja  $\bar{T}$ : Svi studenti imaju rođendan na različite datume.*

*Budući da godina ima 365 (ili eventualno 366) dana, tvrdnja  $\bar{T}$  nije istinita. Zato je prema principu kontradikcije tvrdnja  $T$  istinita.*



# Literatura

- [1] D. BAKIĆ, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [2] N. ELEZOVIĆ, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1999.
- [3] J. S. GOLAN, *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*, Dordrecht : Kluwer, 2004.
- [4] L. HOGBEN, *Handbook of Linear Algebra*, Boca Raton : Chapman & Hall, 2007.
- [5] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, <http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707>.
- [6] S. KUREPA, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.
- [7] S. KUREPA, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [8] R. E. LARSON, R. P. HOSTETLER, *Calculus With Analytic Geometry .*, Heath and Company, Lexington : D. C., 1982.
- [9] L. LEITHOLD, *The Calculus With Analytic Geometry : Part 1*, Harper & Row, New York, 1976.
- [10] S. LIPSCHITZ, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.
- [11] H. NEUNZERT, W. G. ESCHMANN, A. BLICKENDÖRFER-EHLERS, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [12] H. NEUNZERT, W. G. ESCHMANN, A. B. CKENDÖRFER EHLERS, K. SCHELKES, *Analysis 1, 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [13] R. SCITOVSKI, M. B. ALIĆ, *Grupiranje podataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016, <http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ASP-2016.pdf>.



- [14] J. M. STEELE, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America, 2004.
- [15] L. ČAKLOVIĆ, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
- [16] E. B. VINBER, *A Course in Algebra*, Providence : American Mathematical Society, 2003.
- [17] Š. UNGAR, *Ne baš tako kratak Uvod u  $T_{E}X$ s naglaskom na  $pdfL_{A}T_{E}X$* , Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2019, <http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=798>.
- [18] F. ZHANG, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.