Linearna algebra I [1]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković[2]

19. siječnja 2021.

[1] Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[2] scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.

2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.

3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

Sadržaj

Poglavlje 5

Primjena determinanti

5.1 Primjena determinanti u vektorskom računu

5.1.1 Orijentacija koordinatnog sustava

Neka su $(O;(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3))$ i $\left(O';(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)\right)$ dva pravokutna koordinatna sustava u prostoru, pri čemu su $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, odnosno $\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\right)$ njihove ortonormirane baze. Kažemo da su navedeni sustavi **jednako orijentirani** ako postoji kruto gibanje koje točku O prevodi u točku O', a vektore $\vec{e}_i$ u odgovarajuće vektore $\vec{f}_i$ za $i = 1, 2, 3$. Na taj način skup svih pravokutnih koordinatnih sustava u prostoru dijeli se na dva disjunktna skupa. Sve koordinatne sustave koji su jednako orijentirani kao i sustav $\left(O;(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\right)$, gdje se smjer vektora $\vec{k}$ dobija **pravilom desnog vijka** zvat ćemo **desni koordinatni sustavi**, a one druge, **lijevi koordinatni sustavi**.

Navedimo jedan kriterij [2] na osnovi kojeg možemo ustanoviti jesu li sustavi $(O;(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3))$ i $\left(O';(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)\right)$ jednako ili suprotno orijentirani. Budući da je $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ baza u prostoru, onda svaki od vektora $\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\right)$ možemo na jedinstven način prikazati u toj bazi

$$\begin{aligned}
\vec{f}_1 &= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3 \\
\vec{f}_2 &= a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3 \\
\vec{f}_3 &= a_3\vec{e}_1 + b_3\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3
\end{aligned}$$

S D označimo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Može se pokazati da je uvijek $D \neq 0$. Ako je $D > 0$, navedeni sustavi su jednako orijentirani, a ako je $D < 0$, sustavi su suprotno orijentirani.

Slično, dva koordinatna sustava u ravnini $(O; (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ i $\left(O'; (\vec{f}_1, \vec{f}_2)\right)$ su jednako (odnosno suprotno) orijentirana ako je $D > 0$ (odnosno $D < 0$), gdje je

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

i također dva koordinatna sustava na pravcu $(O; (\vec{e}_1))$ i $\left(O'; (\vec{f}_1)\right)$ su jednako (odnosno suprotno) orijentirana ako je $D > 0$ (odnosno $D < 0$), gdje je $\vec{f}_1 = D\vec{e}_1$.

Primjer 5.1. *Sustavi* $\left(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right)$ *i* $\left(O; (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})\right)$ *jednako su orijentirani, a sustavi* $\left(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right)$ *i* $\left(O; (\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})\right)$ *suprotno.*

Naime, u prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} \vec{j} &= 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ \vec{k} &= 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} \\ \vec{i} &= 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

a u drugom

$$\begin{aligned} \vec{j} &= 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ \vec{i} &= 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ \vec{k} &= 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

5.1.2 Vektorski produkt

Definicija 5.1. Vektorski produkt *dva nenulvektora* $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$ *je vektor* $\vec{c} \in X_0(E)$ *koji označavamo*[1] *s* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$*, a koji ima sljedeća svojstva:*

[1] engl.: cross product, vector product njem.: Vektorprodukt, Kreuzprodukt

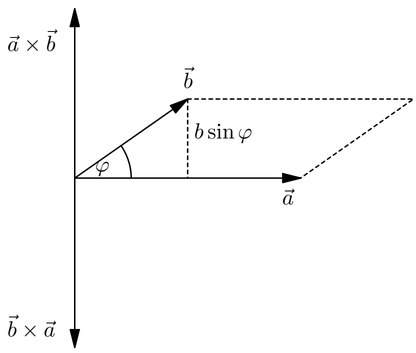
(i) norma vektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ jednaka je površini paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj.

$$c = \left(\|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|\right) = a \cdot b \sin\varphi, \qquad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b});$$

(ii) vektor $\vec{c}$ okomit je na ravninu određenu vektorima $\vec{a}, \vec{b}$;

(iii) smjer (orijentacija) vektora $\vec{c}$ određen je pravilom desnog vijka*.*

Ako je jedan od vektora $\vec{a}, \vec{b}$ nulvektor, vektor $\vec{c}$ također je nulvektor.



Slika 5.1: Vektorski produkt

Primijetite da je vektorski produkt binarna operacija $\times : X_0(E) \times X_0(E) \to X_0(E)$, ali je uobičajeno da se i rezultat ove binarne operacije naziva vektorski produkt. Iz prethodne definicije neposredno slijede sljedeća svojstava vektorskog produkta[2]:

1^o	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	antikomutativnost
2^o	$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$	homogenost
3^o	$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$	distributivnost s desna
	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	distributivnost s lijeva

Primjer 5.2. *Iz definicije vektorskog produkta neposredno slijedi tvrdnja da su nenul vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$* **kolinearni** *onda i samo onda ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.*

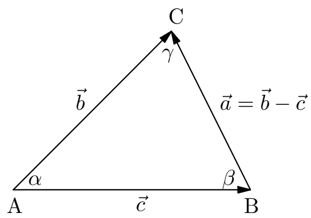
[2]Dokaz svojstav 3^o nije trivijalan, a može se vidjeti u *Dodatku 5* u [1]

Primjer 5.3. *Koristeći Pitagorin teorem za trigonometrijske funkcije:* $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$*, lako se pokaže da vrijedi formula, koja povezuje vektorski i skalarni produkt*

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = a^2\cdot b^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2.$$

Primjer 5.4. (Poučak o sinusima) *U kosokutnom trokutu sa stranicama* a, b, c *i odgovarajućim kutovima nasuprot njih* α, β, γ *vrijedi*

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \qquad \textit{odnosno} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Slika 5.2: Poučak o sinusima

Ako stranice trokuta orijentiramo kao na slici 5.2, vrijedi

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}. \qquad (*)$$

Množeći vektorski s desna ovu jednakost vektorom $\vec{c}$ dobivamo

$$\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c} - \vec{c}\times\vec{c}.$$

Kako je $\vec{c}\times\vec{c} = \vec{0}$, računajući norme vektora na lijevoj i desnoj strani, dobivamo

$$\|\vec{a}\times\vec{c}\| = \|\vec{b}\times\vec{c}\| \Longrightarrow a\,\sin(\pi-\beta) = b\,\sin\alpha.$$

Kako je (koristeći primjerice adicioni teorem za trigonometrijsku funkciju sinus)
$\sin(\pi-\beta) = \sin\beta$, dobivamo

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta. \qquad (**)$$

- Množeći vektorski s desna jednakost $(*)$ vektorom $\vec{b}$ na sličan način pokažite da vrijedi

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma. \qquad (***)$$

- Koristeći jednakosti $(**)$ i $(***)$ pokažite da vrijedi i treći omjer

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Primjer 5.5. *Načinimo tablicu množenja (vektorski produkt) za ortonormiranu bazu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorskog prostora $X_0(E)$.*

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Teorem 5.1. *Za vektore $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$ zadane u pravokutnom koordinatnom sustavu $\left(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right)$:*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula[3]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{5.1}$$

Dokaz. Primjenom tablice množenja iz prethodnog primjera dobivamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right) \times \left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) \\ &= -a_2b_1\vec{k} + a_3b_1\vec{j} + a_1b_2\vec{k} - a_3b_2\vec{i} - a_1b_3\vec{j} + a_2b_3\vec{i} \\ &= \vec{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}\,(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}\,(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

iz čega neposredno slijedi formula (5.1). □

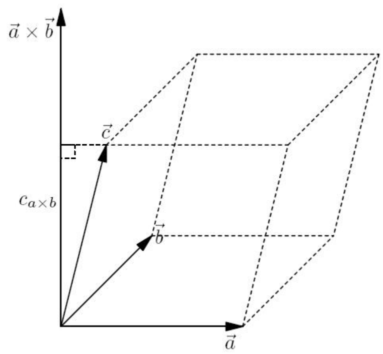
[3] U programskom sustavu *Mathematica* vektorski produkt dobivamo naredbom `Cross[a, b]`, gdje su a, b liste.

5.1.3 Mješoviti produkt

Mješoviti produkt tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ je realni broj koji označavamo

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{5.2}$$

Pokušajmo geometrijski interpretirati mješoviti produkt. Pretpostavimo da su zadana tri linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ kao na slici.



Slika 5.3: Mješoviti produkt

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a njegova duljina (norma) jednaka je površini paralelograma kojeg određuju ti vektori. Skalarni produkt naznačen u (5.2) možemo shvatiti kao produkt norme vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ (tj. površine paralelograma) i projekcije vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Ovu projekciju možemo shvatiti kao visinu paralelepipeda određenog vektorma $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, a onda mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ predstavlja (do na predznak) volumen tog paralelepipeda.

Iz prethodne definicije i njene geometrijske interpretacije neposredno slijedi da svaka ciklička promjena redosljeda vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne mijenja vrijednost njihovog mješovitog produkta:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

S druge strane, svaka neciklička promjena redosljeda vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mijenja predznak njihovog mješovitog produkta.

Primjer 5.6. *Iz definicije mješovitog produkta i njene geometrijske interpretacije neposredno slijedi tvrdnja da su tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$* **komplanarni** *onda i samo onda ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.*

Teorem 5.2. *Za vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ zadane u pravokutnom koordinatnom sustavu $\big(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\big)$:*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \\ \vec{c} &= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{5.3}$$

Dokaz. Na osnovi definicija za skalarno i vektorsko množenje vektora dobivamo

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \left(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Sukcesivnom izmjenom prvog i drugog, te drugog i trećeg retka ove determinante, dobivamo traženu formulu (5.3). Sjetite se da svaka izmjena redaka determinante mijenja njezin predznak. □

5.1.4 Višestruki produkt

Pod **višestrukim vektorsko – vektorskim produktom** tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ podrazumijevamo produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ili $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Odmah primijetimo da za višestruki produkt ne vrijedi asocijativnost

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Ako je primjerice

$$\vec{a} = \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{k},$$

onda vrijedi

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{j}\times(\vec{j}\times\vec{k}) = \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= (\vec{j}\times\vec{j})\times\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Zadatak 5.1. Pokažite da za tri vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in X_0(E)$ vrijedi formula

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}. \tag{5.4}$$

Uputa: Ako stavimo $\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$, direktnim izračunavanjem lijeve i desne strane dobivamo traženu formulu.

Cikličkom promjenom vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ u (5.4) dobivamo još dvije formule

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \tag{5.5}$$

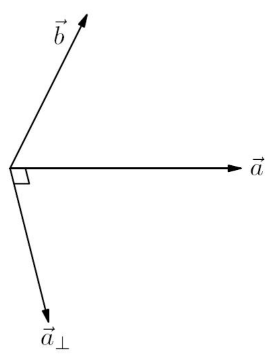
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} \tag{5.6}$$

Zbrajanjem jednakosti (5.4, 5.5, 5.6) dobivamo poznati **Jacobijev identitet**

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}. \tag{5.7}$$

Stavimo li u (5.4) $\vec{c} = \vec{a} \neq \vec{0}$, dobivamo formulu

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\vec{a} + \frac{1}{a^2}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a}). \tag{5.8}$$



Slika 5.4: Prikaz vektora $\vec{b}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i vektora $\vec{a}_\perp$

Kako je vektor $\vec{a}_\perp = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$ okomit na vektor $\vec{a}$, onda formula (5.8) daje prikaz vektora $\vec{b}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i vektora $\vec{a}_\perp$ okomitog na vektor $\vec{a}$. Posebno će nam biti interesantan slučaj kada je $\vec{a} := \vec{u}$ jedinični vektor. Tada prethodna formula postaje jednostavnija

$$\vec{b} = (\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{b} \times \vec{u}). \tag{5.9}$$

Prvi vektor na desnoj strani prepoznajemo kao projekciju vektora $\vec{b}$ na pravac određen jediničnim vektorom $\vec{u}$. Drugi vektor prema (5.4) možemo zapisati kao

$$\vec{u} \times (\vec{b} \times \vec{u}) = \vec{b} - (\vec{b}\vec{u})\vec{u} =: \vec{b}'.$$

Vektor $\vec{b}'$ prepoznajemo kao projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{u}_\perp$, koji je okomit na vektor $\vec{u}$.

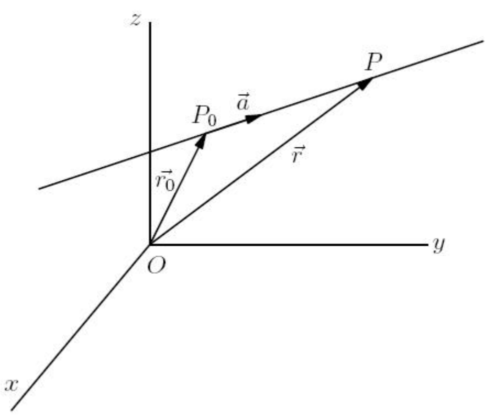
5.2 Pravac i ravnina u prostoru

5.2.1 Pravac u prostoru

Neka je $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Pravac p u prostoru može biti zadan

(i) točkom $P_0 \in E$ i vektorom $\vec{a} \in X_0(E)$ ili

(ii) s dvije točke $P_0, P_1 \in E$.



Slika 5.5: Zadavanje pravca u prostoru s točkom $P_0 \in E$ i vektorom $\vec{a} \in X_0(E)$

(i) Neka je zadana točka $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ s radijvektorom $\vec{r}_0$ i vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$. Pravac p definirat ćemo kao skup svih točaka $P \in E$, čiji radij vektor $\vec{r}$ možemo zapisati kao

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Prikaz (5.10) obično zovemo **parametarski oblik jednadžbe pravca** p. U koordinatnom obliku to je

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca** p

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}, \qquad a_1,a_2,a_3\neq 0. \tag{5.12}$$

Primjer 5.7. *Ako je $a_3=0$, onda iz (5.18) slijedi*

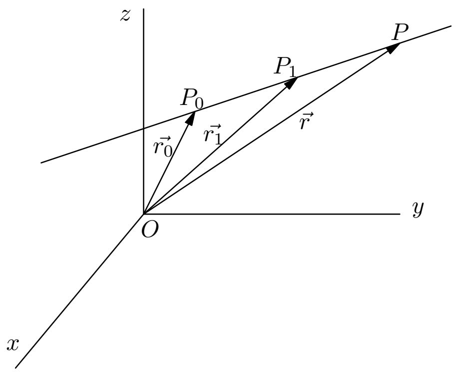
$$z=z_0.$$

To znači da sve točke pravca p imaju istu aplikatu z_0, odnosno da je pravac paralelan s (x,y)-ravninom.

Primjer 5.8. *Ako je $a_2=a_3=0$, onda iz (5.18) slijedi*

$$y=y_0, \qquad z=z_0.$$

To znači da sve točke pravca p imaju istu ordinatu y_0 i aplikatu z_0, odnosno da je pravac paralelan s osi x.



Slika 5.6: Zadavanje pravca u prostoru s dvije točke $P_0,P_1\in E$.

(ii) Neka su $P_0=(x_0,y_0,z_0), P_1=(x_1,y_1,z_1)\in E$ dvije različite točke. Uz oznaku $\vec{a}=\overrightarrow{P_0P_1}$ ponovo smo u situaciji opisanoj pod (i). Ako s $\vec{r}_0$ označimo radij-vektor točke P_0, a s $\vec{r}_1$ radij-vektor točke P_1, tada je $\vec{a}=\vec{r}_1-\vec{r}_0$, pa **parametarski oblik jednadžbe pravca** p u ovom slučaju glasi

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda(\vec{r}_1-\vec{r}_0), \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{5.13}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca** p, koji prolazi točkama $P_0, P_1 \in E$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \qquad x_1 \neq x_0, \quad y_1 \neq y_0, \quad z_1 \neq z_0. \tag{5.15}$$

Zadatak 5.2. Kako glasi jednadžba pravca određenog s dvije točke $P_0, P_1 \in E$, koje

a) leže u ravnini paralelnoj nekoj od koordinatnih ravnina?

a) leže na pravcu paralelnom nekoj od koordinatnih osi?

Primjer 5.9. *Pravac p u prostoru zadan je točkom P_0 i jediničnim vektorom $\vec{u}$. Odredimo udaljenost točke Q do pravca p i njenu projekciju Q' na pravac p (vidi Sliku 5.7).*

Ako definiramo vektor $\vec{c} = \vec{r}_Q - \vec{r}_{P_0}$, 0nda je njegova projekcija u smjeru jediničnog vektora $\vec{u}$ zadana s $(\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}$, a udaljenodt točke Q do pravca p tada je zadana s

$$d(Q, p) = \|\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}\|$$

Specijalno neka je pravac p određen točkom $P_0 = (4, 2, 1)$ i jediničnim vektorom $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}$. Za $Q = (2, 1, 2)$ dobivamo vektor $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ i projekciju vektora $\vec{c}$ u smjeru vektora $\vec{u}$: $\overrightarrow{P_0Q'} = -\frac{2}{9}\vec{\imath} - \frac{4}{9}\vec{\jmath} - \frac{4}{9}\vec{k}$.

Kako je $\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_{P0} + \overrightarrow{P_0Q'}$, dobivamo $Q' = \frac{1}{9}(34, 14, 5)$. Nadalje, $\overrightarrow{Q'Q} = -\frac{16}{9}\vec{\imath} - \frac{5}{9}\vec{\jmath} + \frac{13}{9}\vec{k}$ iz čega slijedi $d(Q, p) = \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

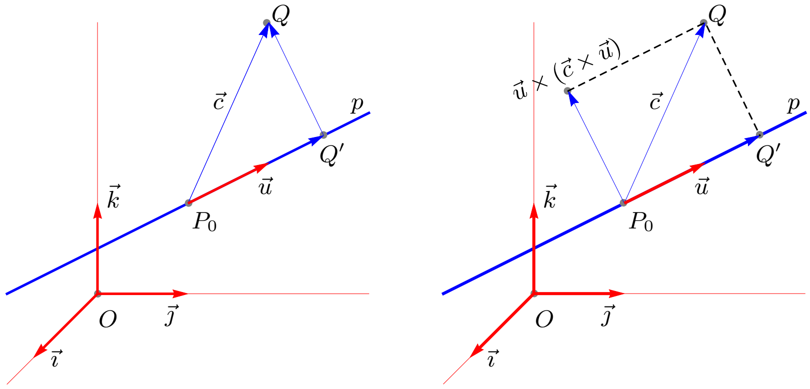
Isti problem možemo riješiti primjenom formule (5.9)

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u}). \tag{5.16}$$

Pri tome (vidi Sliku 5.7):

- $(\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}$ je projekcija vektora $\vec{c}$ na pravac p;

(a) Primjena projekcije vektora (b) Primjena višestrukog produkta



Slika 5.7: Udaljenost pravca točke Q do pravca p u prostoru zadanog točkom P_0 i jediničnim vektorom $\vec{u}$ uz primjenu (a) projekcije vektore i uz primjenu (b) višestrukog produkta

- vektor $\vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})$ je okomit na vektor $\vec{u}$ i jednak vektoru $\overline{Q'Q}$, a njegova duljina predstavlja udaljenost točke Q do pravca p. Kako je $\vec{u} \perp (\vec{c} \times \vec{u})$, vrijedi

$$d(Q,p) = \|\vec{u} \times (\vec{c} \times \vec{u})\| = \|\vec{c} \times \vec{u}\|. \tag{5.17}$$

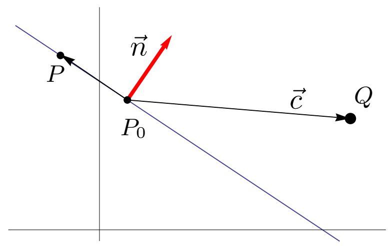
Specijalno, neka je pravac određen točkom $P_0 = (4,2,1)$ i jediničnim vektorom $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}$. Za točku $Q = (2,1,2)$ dobivamo vektor $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Kako je $\vec{c} \times \vec{u} = -\frac{4}{3}\vec{\imath} + \frac{5}{3}\vec{\jmath} - \vec{k}$, primjenom formule (5.17) dobivamo $d(Q,p) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

5.2.2 Pravac u ravnini

U ravnini se pravac takođermože zadati pomoću jedne točke i vektora ili pomoću dvije točke, ali u ovom slučaju važan je još jedan pristup: pravac može biti zadan jednom točkom i normalom.

Neka je $(O;(\vec{i},\vec{j}))$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Pravac p zadat ćemo točkom $P_0=(x_0,y_0)$ i normalom $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}$ na pravac p (vidi Sliku 5.8).



Slika 5.8: Udaljenost točke do pravca

Neka je $P=(x,y)$ proizvoljna točka na pravcu p. Tada su vektori $\overrightarrow{P_0P}$ i $\vec{n}$ okomiti, tj.

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0,$$

iz čega dobivamo jednadžbu pravca p

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

odnosno

$$ax+by+c=0, \qquad c=-ax_0-by_0. \tag{5.18}$$

U cilju određivanja udaljenosti točke Q do pravca p odredit ćemo projekciju vektora $\overrightarrow{P_0Q}$ na normalu $\vec{n}$ (vidi Sliku 5.8). Jedinični vektor normale je

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\frac{a\vec{i}+b\vec{j}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

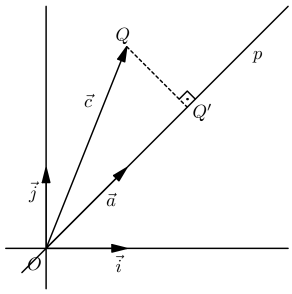
a udaljenost točke $Q=(x_Q,y_Q)$ do pravca p tada je

$$d(Q,p)=\|(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)\vec{n}_0\|=|(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)|=\frac{|a(x_Q-x_0)+b(y_Q-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{5.19}$$

Primjer 5.10. *Udaljenost točke* $Q = (1,1)$ *do pravca* $3x+4y-1=0$ *u ravnini je* $d(Q,p) = \frac{6}{5}$.

Zadatak 5.3. Pokažite da je udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q)$ do pravca p zadanog u eksplicitnom obliku $y = kx + l$ zadana s

$$d(Q,p) = \frac{|kx_Q + l - y_Q|}{\sqrt{k^2+1}}.$$



Slika 5.9: Udaljenost točke do pravca kroz ishodište

Primjer 5.11. *Pravac* p *prolazi ishodištem* O *pravokutnog koordinatnog sustava* $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ *i zadan je vektorom* $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. *Treba odrediti udaljenost točke* $Q = (1,3)$ *do pravca* p *i projekciju točke* Q *na pravac* p *(vidi Sliku 5.9).*

Projekcija vektora $\vec{c} := \overrightarrow{OQ}$ na pravac p (a onda i projekcija točke Q na pravac p) zadanaje vektorom $\overrightarrow{OQ'} = (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}$, gdje je $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ jedinični vektor u smjeru vektora a. Dobivamo $Q' = (2,2)$.

Udaljenost točke Q do pravca p zadana je duljinom vektora $\overrightarrow{Q'Q'} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u}$. Dobivamo $d(Q', Q) = \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \sqrt{2}$.

Zadatak 5.4. Odredite projekciju točke Q na pravac p zadan točkom $P_0 = (2,1)$ i vektorom $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Kolika je udaljenost točke $Q = (1,3)$ do pravca p?

Uputa: koristite formulu (5.9).

Općenito, pravac u ravnini zadajemo u implicitnom obliku:

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \tag{5.20}$$

Propozicija 5.1. *Neka je* $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ *pravokutni koordinatni sustav u ravnini u kojemu je jednadžbom* (5.20) *zadan pravac* p *u toj ravnini. Tada:*

(i) $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ *vektor je normale na pravac* p*,*

(ii) Vektori $\vec{u}_1 = b\vec{i} - a\vec{j}$*, odnosno* $\vec{u}_2 = -b\vec{i} + a\vec{j}$*, određuju smjer pravca* p*,*

(iii) Ako je $P_0 = (x_0, y_0)^T$ *točka na pravcu* p*, onda je* $c = -ax_0 - by_0$*.*

Dokaz. (i) Neka su $P_1 = (x_1, y_1)^T$, $P_2 = (x_2, y_2)^T$ dvije različite točke koje leže na pravcu p. To znači da je

$$ax_s + by_s + c = 0, \quad s = 1, 2.$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0, \tag{5.21}$$

što pokazuje da su vektori $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ i $\overrightarrow{P_1P_2}$ okomiti, tj. da je $\vec{n}$ normala na pravac p.

(ii) Direktnom provjerom može se vidjeti da su vektori $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ okomiti na vektor $\vec{n}$ pa time određuju smjer pravca p.

(iii) Ako je $P_0 = (x_0, y_0)^T$ točka na pravcu p, onda je $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$ pa vrijedi $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, odnosno $ax + by + c = 0$, gdje je $c = -ax_0 - by_0$. □

5.2.3 Normalna jednadžba pravca u ravnini

Nadalje, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je pravac (5.20) zadan uz uvjet $a^2 + b^2 = 1$. Naime, u protivnom dijeljenjem jednadžbe (5.20) s $\sqrt{a^2 + b^2}$ dobivamo

$$\hat{a}x + \hat{b}y + \hat{c} = 0, \quad \hat{a}^2 + \hat{b}^2 = 1, \tag{5.22}$$

gdje je $\hat{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\hat{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\hat{c} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Jednadžbu (5.22) zvat ćemo normalna jednadžba pravca u ravnini. Analogno Propoziciji 5.1 vrijedi:

Propozicija 5.2. *Neka je* $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ *pravokutni koordinatni sustav u ravnini u kojemu je normalnom jednadžbom zadan pravac* p *u toj ravnini. Tada:*

(i) $\vec{n}_0 = a\vec{i} + b\vec{j}$ *jedinični je vektor normale na pravac* p*,*

(ii) Jedinični vektori $\vec{u}_1 = b\vec{i} - a\vec{j}$, *odnosno* $\vec{u}_2 = -b\vec{i} + a\vec{j}$, *određuju smjer pravca* p,

(iii) Ako je $P_0 = (x_0, y_0)^T$ *točka na pravcu* p *zadanom s* (5.22), *onda je* $c = -ax_0 - by_0$, *a jednadžba* (5.22) *postaje*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \quad \hat{a}^2 + \hat{b}^2 = 1. \tag{5.23}$$

Pri tome parametar c *do na predznak određuje udaljenost ishodišta* O *do pravca* p.

Dokaz Propozicije 5.2 može se provesti slično dokazu Propozicije 5.1. Posebno dokažimo samo tvrdnju (iii). Ako je $P_0 = (x_0, y_0)^T$ točka na pravcu p, onda je $c = -ax_0 - by_0$. Ako s $\vec{r}_0$ označimo radij-vektor točke P_0, onda je $c = -(\vec{r}_0, \vec{n}_0)$, a kako je $(\vec{r}_0, \vec{n}_0)\vec{n}_0$ projekcija vektora $\vec{r}_0$ na $\vec{n}_0$, slijedi tvrdnja (iii) Propozicije 5.2.

Sljedeća lema daje eksplicitne formule za udaljenost točke do pravca i za ortogonalnu projekciju točke na pravac zadan s (5.22).

Lema 5.1. *Neka je* $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ *pravokutni koordinatni sustav u ravnini, neka je* $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 = 1$ *normalna jednadžba pravca* p *u ravnini i neka je* $Q = (x_Q, y_Q)^T \in \mathbb{R}^2$ *proizvoljna točka u ravnini. Tada vrijedi:*

(i) Udaljenost točke Q *do pravca* p *zadana je formulom:*

$$d(Q, p) = |ax_Q + by_Q + c|, \tag{5.24}$$

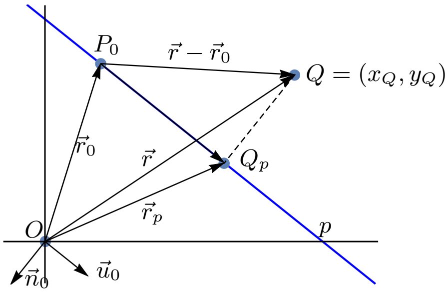
(ii) Ortogonalna projekcija Q_p *točke* Q *na pravac* p *zadana je radij vektorom:*

$$\vec{r}_p = (\vec{r}, \vec{u}_0)\vec{u}_0 - c\vec{n}_0, \tag{5.25}$$

gdje je $\vec{r} = x_Q\vec{i} + y_Q\vec{j}$ *radij vektor točke* Q, $\vec{n}_0 = a\vec{i} + b\vec{j}$ *jedinični vektor normale, a* $\vec{u}_0 = b\vec{i} - a\vec{j}$ *jedinični vektor u smjeru pravca* p.

Dokaz. (i) Neka je $P_0 = (x_0, y_0)^T$ točka na pravcu p i

$$(\overrightarrow{P_0Q})_{\vec{n}} = (\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0$$



Slika 5.10: Udaljenost točke do pravca i projekcija točke na pravac

ortogonalna projekcije vektora $\overrightarrow{P_0Q} = (x_Q - x_0)\vec{i} + (y_Q - y_0)\vec{j}$ na normalu pravca p zadanu jediničnim vektorom $\vec{n}_0 = a\vec{i} + b\vec{j}$ (vidi Sliku 5.10).

Udaljenost točke Q do pravca p tada je:

$$\begin{aligned} d(Q,p) =& \|(\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0\| = |(\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{n}_0)| \\ =& |a(x_Q - x_0) + b(y_Q - y_0)| = |ax_Q + by_Q - ax_0 - by_0|. \end{aligned}$$

Kako je prema Propoziciji 5.2, $c = -ax_0 - by_0$, slijedi tražena tvrdnja.

(ii) Ako s $\vec{r}_0$ označimo radij vektor točke P_0, onda je $\overrightarrow{P_0Q} = \vec{r} - \vec{r}_0$, a radij-vektor projekcije Q_p točke Q na pravac p zadan je s (vidi Sliku 5.10):

$$\begin{aligned} \vec{r}_p =& \vec{r}_0 + (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u}_0)\vec{u}_0 \\ =& (\vec{r}, \vec{u}_0)\vec{u}_0 + \vec{r}_0 - (\vec{r}_0, \vec{u}_0)\vec{u}_0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Kako su $\vec{u}_0, \vec{n}_0$ dva međusobno okomita jedinična vektora, vrijedi:

$$\vec{r}_0 = (\vec{r}_0, \vec{u}_0)\vec{u}_0 + (\vec{r}_0, \vec{n}_0)\vec{n}_0,$$

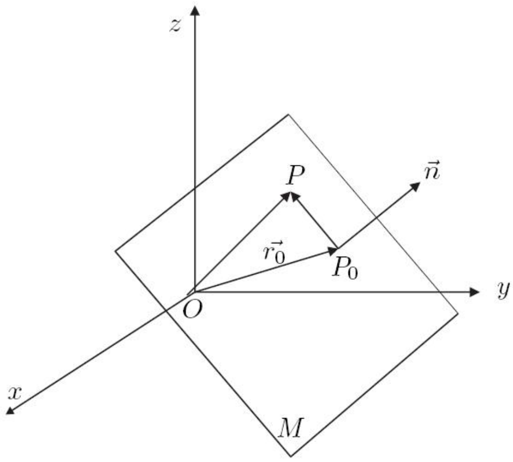
iz čega slijedi $\vec{r}_0 - (\vec{r}_0, \vec{u}_0)\vec{u}_0 = (\vec{r}_0, \vec{n}_0)\vec{n}_0$, što uvršteno u (5.26) daje

$$\vec{r}_p = (\vec{r}, \vec{u}_0)\vec{u}_0 + (\vec{r}_0, \vec{n}_0)\vec{n}_0. \tag{5.27}$$

Kako je prema Propoziciji 5.2, $c = -(\vec{r}_0, \vec{n}_0)$, iz (5.27) slijedi (5.25). $\square$

5.2.4 Ravnina u prostoru

Ravnina u prostoru također se može zadati na više načina. Mi ćemo razmatrati slučaj zadavanja ravnine M u prostoru pomoću jedne njene točke $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ i normale $\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k} \neq \vec{0}$ na nju u smjeru od ishodišta O.



Slika 5.11: Zadavanje ravnine u prostoru

Tada je za svaku točku $P = (x, y, z) \in M$ normala $\vec{n}$ okomita na vektor $\overrightarrow{P_0P}$, tj. vrijedi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \text{gdje je} \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0. \tag{5.28}$$

Jednadžbu (5.28) zovemo **opća jednadžba ravnine** zadane točkom P_0 i normalom $\vec{n}$.

Ako je $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$, onda jednadžba (5.28) prelazi u **segmentni oblik jednadžbe ravnine**

$$\tfrac{x}{p} + \tfrac{y}{q} + \tfrac{z}{r} = 1, \qquad \text{gdje je} \quad p = -\tfrac{D}{A}, \quad q = -\tfrac{D}{B}, \quad r = -\tfrac{D}{C}. \tag{5.29}$$

Primjer 5.12. *Ravnina M u prostoru zadana je točkom $P_0 = (1,2,2)$ i normalom $\vec{n} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Kako je $D = 0$, opća jednadžba ove ravnine je $2x + 2y + z = 0$. Što su sjeciša ove ravnine s koordinatnim ravninama (xy), (xz) i (yz)?*

Primjer 5.13. *Zadana je opća jednadžba ravnine $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Njezin segmentni oblik je $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. Nacrtajte plohu ove ravnine u koordinatnom sustavu.*

5.2.5 Projekcija vektora na ravninu i udaljenost točke do ravnine

Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ točka u ravnini M, $\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$ normala na nju u smjeru od ishodišta O, a $\vec{n}_0$ jedinični vektor u smjeru normale.

Za točku $Q \in E$ izvan ravnine M definirajmo vektor $\vec{c} := \overrightarrow{P_0Q} \in X_0(E)$ i pronađimo njegovu ortogonalnu projekcijuna ravninu M. U tu svrhu pronađimo jednu ortonormiranu bazu u ravnini M. To ćemo uraditi tako da izaberemo dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ okomita na normalu i za njih provedemo Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. Dobivamo ortonormiranu bazu $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{a}/\|\vec{a}\| \\ \vec{v} &= \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\,\vec{u}; \quad \vec{v} = \vec{v}/\|\vec{v}\| \end{aligned}$$

Projekcija vektora $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q}$ na ravninu M tada je

$$\vec{c}_M = (\vec{c} \cdot \vec{u})\,\vec{u} + (\vec{c} \cdot \vec{v})\,\vec{v}, \tag{5.30}$$

a radij vektor projekcije Q' točke Q na ravninu M je

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_0 + \vec{c}_M. \tag{5.31}$$

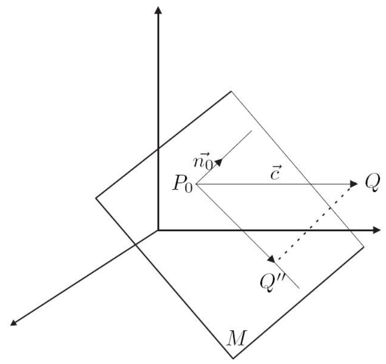
Konačno, dobivamo udaljenost točke Q doravnine M:

$$d(Q, M) = \|\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q'}\| = \|(\vec{r}_0 + \vec{c}) - (\vec{r}_0 + \vec{c}_M)\| \tag{5.32}$$

$$\text{odnosno } d(Q, M) = \|\vec{c} - \vec{c}_M\|. \tag{5.33}$$

Do istog rezultata možemo doći primjenom formule (5.9) str. 9 vektor $\vec{c}$ rastavit ćemo na dva vektora: jedan u smjeru normale $\vec{n}$, a drugi okomito na nju (leži u ravnini M!):

$$\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{n}_0)\vec{n}_0 + \vec{n}_0 \times (\vec{c}\times\vec{n}_0), \qquad \vec{n}_0 = \frac{A\vec{\imath}+B\vec{\jmath}+C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{5.34}$$



Slika 5.12: Udaljenost točke Q do ravnine M

Pri tome (vidi Sliku 5.12 i usporedi sa Slikom 5.7):

- $(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)\vec{n}_0$ je projekcija vektora $\vec{c}$ na normalu određenu vektorom $\vec{n}_0$;
- $\|(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)\vec{n}_0\| = |(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)|$ je udaljenost točke Q do ravnine M;
- $\vec{n}_0 \times (\vec{c}\times\vec{n}_0)$ je projekcija vektora $\vec{c}$ na ravninu M;
- $\|\vec{n}_0 \times (\vec{c}\times\vec{n}_0)\| = \|\vec{c}\times\vec{n}_0\|$ je udaljenost točke Q do normale ($\vec{n}_0 \perp (\vec{c}\times\vec{n}_0)$).

Neka je ravnina M u prostoru zadana točlom $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i normalom $\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$. Treba odrediti udaljenost točke $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ do ravnine M. Ako definiramo vektor $\vec{c} = \overrightarrow{P_0Q} = (x_Q - x_0)\vec{\imath} + (y_Q - y_0)\vec{\jmath} + (z_Q - z_0)\vec{k}$, udaljenost točke Q do ravnine M bit će

$$d(Q,M) = |(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)| = \frac{|A(x_Q-x_0)+B(y_Q-y_0)+C(z_Q-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_Q+By_Q+Cz_Q+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{5.35}$$

gdje je $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Primjer 5.14. *Ravnina M u prostoru zadana je točkom $P_0 = (1, 2, 2)$ i normalom $\vec{n} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Odredimo udaljenost točke $Q = (2, 3, 4)$ do ravnine M.*

Dva linearno nezavisna vektor okomita na normalu $\vec{n}$ možemo izabratina sljedeći način:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{\imath} + \vec{\jmath},\\ \vec{b} &= \vec{\jmath} + 2\vec{k}\end{aligned}$$

Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije dobivamo:

$$\begin{aligned}&\vec{u} = \vec{a}/\|\vec{a}\| = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\\ &\vec{v} = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u}; \quad \vec{v} = \vec{v}/\|\vec{v}\| = -\tfrac{\sqrt{2}}{6}\vec{\imath} + \tfrac{\sqrt{2}}{6}\vec{\jmath} + \tfrac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k}\end{aligned}$$

Projekcija vektora $\vec{c}$ na ravninu M prema (5.30) *je vektor $\frac{5}{9}\vec{\imath} + \frac{13}{9}\vec{\jmath} + \frac{16}{9}\vec{k}$, točka $Q' = (\frac{14}{9}, \frac{31}{9}, \frac{34}{9})$ određena je s* (5.31), *a udaljenost točke Q do ravnine M prema* (5.32) *je* 2/3.

Primjenom formule (5.34) *dobivamo isti rezultat:*

$$\begin{aligned}\vec{n}_0 &= \tfrac{2}{3}\vec{\imath} - \tfrac{2}{3}\vec{\jmath} + \tfrac{1}{3}\vec{k},\\ (\vec{c}\cdot\vec{n}_0)\,\vec{n}_0 &= \tfrac{4}{9}\vec{\imath} - \tfrac{4}{9}\vec{\jmath} + \tfrac{2}{9}\vec{k},\\ \|(\vec{c}\cdot\vec{n}_0)\,\vec{n}_0\| &= \tfrac{2}{3}, \quad \textit{[udaljenost } d(Q,M)\textit{]}\\ \vec{n}_0 \times (\vec{c}\times\vec{n}_0) &= \tfrac{5}{9}\vec{\imath} - \tfrac{13}{9}\vec{\jmath} + \tfrac{16}{9}\vec{k},\\ \|\vec{n}_0 \times (\vec{c}\times\vec{n}_0)\| &= \tfrac{5\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Primjer 5.15. *Izračunajmo udaljenost ishodišta $O = (0, 0, 0)$ pravokutnog koordinatnog sustava do ravnine zadane jednadžbom $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.*

Imamo

$$d(O, M) = \tfrac{|6\cdot 0+3\cdot 0+2\cdot 0-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \tfrac{6}{7}.$$

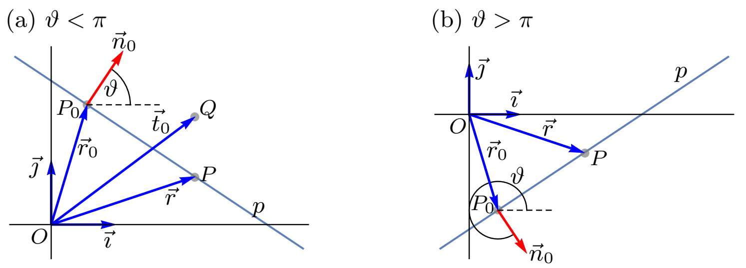
5.3 Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca i ravnine

5.3.1 Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini

Neka je $(O;(\vec{i},\vec{j}))$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Pravac p u ravnini može se definirati točkom $P_0 \in p$ i jediničnim vektorom normale (Slika 5.13)

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j},$$

koji je okomit na pravac i ima smjer od ishodišta O. Kut $\vartheta \in [0, 2\pi]$ definira se kao kut izmedju vektora $\vec{\imath}$ i $\vec{n}_0$, tj. kao kut izmedju pozitivnog smjera osi-x i vektora normale $\vec{n}_0$



Slika 5.13: Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini

Označimo s $\vec{r}_0$ radij vektor točke P_0. Neka je nadalje $P = (x, y)$ proizvoljna točka na pravcu, a $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ njezin radij vektor. Vektor $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ okomit je na normalu $\vec{n}_0$, pa vrijedi

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}_0 = 0, \tag{5.36}$$

odnosno

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0.$$

Pri tome je

$$\delta := \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0 = (r_0)_{n_0} > 0$$

udaljenost ishodišta O do pravca p. Tako dobivamo **Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca**

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0. \tag{5.37}$$

Udaljenost proizvoljne točke $Q = (x_Q, y_Q)$ do pravca p je (vidi Sliku 5.13a)

$$d(T_0, \ell) = |(\vec{t_0} \cdot \vec{n}_0) - (\vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0)| = |x_0 \cos\vartheta + y_0 \sin\vartheta - \delta|, \tag{5.38}$$

gdje je $\vec{t_0}$ radij-vektor točke Q.

Obratno, neka je pravac p u ravnini zadan s

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \tag{5.39}$$

Pretpostavimo da je $c < 0$ (ako nije, jednadžbu (5.39) pomnožimo s (-1)) i jednadžbu (5.39) podijelimo s $\sqrt{a^2+b^2}$. Dobivamo

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ c_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} < 0,$$

pri čemu je $a_1^2 + b_1^2 = 1$. Zato postoji $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\delta > 0$, tako da bude

$$a_1 = \cos\alpha, \quad b_1 = \sin\alpha, \qquad c_1 = -\delta > 0,$$

a jednadžbu (5.39), možemo zapisati u Hesseovom normalnom obliku (5.37).

Udaljenost točke Q do pravca p određena je s

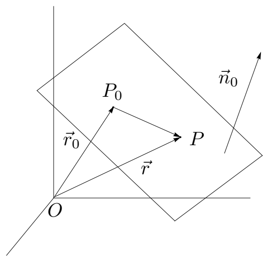
$$d(Q, p) = |x_Q \cos\alpha + y_Q \sin\alpha - \delta|. \tag{5.40}$$

5.3.2 Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine u prostoru

Neka je $(O;(\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Ravnina M u prostoru zadana je nekom točkom $P_0 \in M$ i jediničnim vektorom

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k},$$

koji ima smjer od ishodišta O prema ravnini M.



Slika 5.14: Sliku treba promijeniti !!!

Neka je $P=(x,y,z)$ proizvoljna točka u ravnini, a $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ odgovarajući radij vektor. Iz uvjeta okomitosti vektora $\vec{n}_0$ i vektora $\overrightarrow{P_0P}$ dobivamo vektorski zapis jednadžbe ravnine M

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

gdje je $\vec{r}_0$ radij vektor točke P_0. Prethodnu jednakost možemo pisati

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 = 0,$$

odakle uz oznaku (udaljenost točke O do ravnine M)

$$\delta := \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 = (r_0)_{n_0} > 0,$$

dobivamo **Hesseov normalni oblik jednadžbe ravnine** M u prostoru

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0. \tag{5.41}$$

Udaljenost točke Q do ravnine M zadana je s

$$d(Q,M) = |x_Q\cos\alpha + y_Q\cos\beta + z_Q\cos\gamma - \delta|. \tag{5.42}$$

Poglavlje 6

Dodatak

Neke važne matematičke pojmove, kao što su „pojam nužno i dovoljno", „princip kontradikcije" i „univerzalni i egzistencijalni kvantifikator", a koje ćemo često koristiti, pokušat ćemo objasniti na nekoliko jednostavnih primjera.

6.1 Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator

Egzistencijalni kvantifikator ($\exists$) čitamo „postoji barem jedan" ili češće samo „postoji". Primjerice, činjenicu da postoji prirodan broj $p > 1$ koji dijeli broj 9 pišemo: $(\exists p \in \mathbb{N})\ p|9$.

Univerzalni kvantifikator ($\forall$) čitamo „za svaki" ili češće samo „svaki". Primjerice, ako s $\mathcal{P}$ označimo skup svih prim-brojeva, a s $\mathcal{Q}$ skup svih složenih brojeva, onda vrijedi $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \{1\}$, a činjenicu da je svaki složeni broj $q > 1$ djeljiv s barem jednim prim-brojem pišemo: $(\forall q \in \mathcal{Q})\ (\exists p \in \mathcal{P})\ p|q$.

6.2 Nužni i dovoljni uvjeti

Primjer 6.1. *Iz osnovne škole poznata nam je definicija četverokuta:*
Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki četverokut bio kvadrat*?*

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu sve četiri stranice jednako dugačke. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki romb kvadrat.

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu kutevi pravi. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki pravokutnik kvadrat.

Sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat je:

(i) sve njegove stranice jedanako su dugačke;

(ii) svi njegovi kutevi su pravi.

Zato kažemo:

Četverokut je kvadrat onda i samo onda ako su sve njegove stranice jednako dugačke i ako su svi njegovi kutevi pravi.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan", ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat? Pokušajete definirati neki drugi sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat.

Primjer 6.2. *Iz srednje škole poznata nam je definicija prim-broja (prostog broja):*

Prosti brojevi ili prim-brojevi su svi prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a strogo su veći od broja 1.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki prirodni broj bio prim-broj*?*

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka s brojem 1. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 8 prim-broj.

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka sam sa sobom. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 4 prim-broj.

Nužni i dovoljni uvjeti da bi prirodni broj $p \in \mathbb{N}$ bio prim-broj su:

(i) broj p djeljiv je bez ostatka s 1;

(ii) broj p djeljiv je bez ostatka sam sa sobom;

(iii) broj p nije djeljiv bez ostatka ni s jednim drugim prirodnim brojem;

(iv) $p > 1$.

Zato kažemo:

Prirodni broj $p > 1$ je prim-broj onda i samo onda ako je djeljiv samo s 1 i sam sa sobom.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan", ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta koji određuje skup prim-brojeva?

6.3 Princip kontradikcije

Princip kontradikcije zasniva se na Aristotelovom principu isključenja trećeg: „Neka tvrdnja je istinita ili lažna, a treća mogućnost ne postoji".

Primjer 6.3. *U prostoriji se nalazi 400 studenata.*

Tvrdnja T: *Barem dva studenta imaju na isti dan rođendan.*

Tvrdnja $\overline{T}$: *Svi studenti imaju rođendan na različite datume.*

Budući da godina ima 365 (ili eventualno 366) dana, tvrdnja $\overline{T}$ *nije istinita. Zato je prema principu kontradikcije tvrdnja* T *istinita.*

Literatura

[1] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707`.

[2] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.