Linearna algebra I [1]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković[2]

16. prosinca 2020.

[1]Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[2]scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.

2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.

3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

Sadržaj

Poglavlje 1

Sustavi linearnih jednadžbi

Primjer 1.1. *Tri radnika A, B, C radeći zajedno obave neki posao za* 10 *dana. Isti posao radnici A i B obavili bi za* 12 *dana, a radnici B i C za* 15 *dana. Koliko dana je potrebno svakom radniku da sam obavi cijeli posao?*

Uvedimo oznake:
x: broj dana potreban radniku A da sam obavi cijeli posao;
y: broj dana potreban radniku B da sam obavi cijeli posao;
z: broj dana potreban radniku C da sam obavi cijeli posao;

$$x_1 = \tfrac{1}{x}, \quad x_2 = \tfrac{1}{y}, \quad x_3 = \tfrac{1}{z}.$$

Primjerice, x_1 je dio posla koji radnik A može obaviti za 1 dan. Zato problem možemo postaviti ovako:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 10x_1 & + & 10x_2 & + & 10x_3 & = & 1 \\ 12x_1 & + & 12x_2 & & & = & 1 \\ & & 15x_2 & + & 15x_3 & = & 1 \end{array}$$

Rješenje ovog sustava je: $x_1 = \frac{1}{30}$, $x_2 = \frac{1}{20}$, $x_3 = \frac{1}{60}$, a rješenje postavljenog problema: $x = 30$, $y = 20$, $z = 60$.

Općenito, sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{R}$ je

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1.1}$$

Brojevi a_{ij} zovu se koeficijenti sustava, a brojevi b_i slobodni koeficijenti. Koeficijenti sustava mogu također biti i kompleksni brojevi i tada govorimo o sustavu linearnih jednadžbi nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Definicija 1.1. *Kažemo da je sustav* (1.1) *rješiv ako postoji* $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *tako da zamjenom*

$$x_1 \leftarrow \xi_1, \dots, x_n \leftarrow \xi_n,$$

zadovoljavamo sve jednadžbe u (1.1).

Uvodimo sljedeće oznake: matrica sustava, vektor nepoznanica, vektor slobodnih koeficijenata i proširena matrica sustava:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}, \quad A_p = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Sustav (1.1) možemo zapisati u matričnom obliku

$$Ax = b. \tag{1.2}$$

U nastavku razmotit ćemo:

- problem egzistencije rješenja sustava (1.1);
- opće rješenje sustava (1.1);
- Gaussovu i Gauss-Jordanovu metodu za rješavanje sustava (1.1).

1.1 Egzistencija rješenja

Direktnom provjerom može se ustanoviti da vrijedi

Propozicija 1.1. *Uređena n-torka* $(\xi_1, \dots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *je rješenje sustava* (1.1) *onda i samo onda ako vrijedi*

$$b = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

gdje je $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ stupčana reprezentacija matrice A.

Teorem 1.1. *(Kronecker–Capelli)*
Sustav $Ax = b$ je rješiv onda i samo onda ako vrijedi

$$r(A) = r(A_p).$$

Dokaz. Kako je $L(a_1, \dots, a_n)$ potprostor u $L(a_1, \dots, a_n, b)$, vrijedi

$$r(A) \leq r(A_p).$$

Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} r(A) = r(A_p) &\iff L(a_1, \dots, a_n) = L(a_1, \dots, a_n, b) \\ &\iff b \in L(a_1, \dots, a_n) \\ &\iff \exists\, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R},\ \text{tako da je } b = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \\ &\overset{Prop.1.1}{\iff} (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ je rješenje sustava.} \end{aligned}$$

$\square$

1.2 Opće rješenje sustava linearnih jednadžbi

Definicija 1.2. *Kažemo da je sustav* (1.1)*, odnosno* (1.2)*, homogen ako vrijedi $b_1 = \cdots = b_m = 0$, odnosno $b = 0$ i pišemo*

$$Ax = 0. \tag{1.3}$$

Propozicija 1.2. *Homogeni sustav* (1.3) *uvijek je rješiv. Skup svih rješenja Ω homogenog sustava* (1.3) *je vektorski prostor.*

Dokaz. Homogeni sustav (1.3) uvijek je rješiv jer ima barem trivijalno rješenje $(\xi_1, \dots, \xi_n)^T = (0, \dots, 0)^T$.

Budući da za $u_1, u_2 \in \Omega$ vrijedi $Au_1 = 0$, $Au_2 = 0$, za linearnu kombinaciju $\lambda u_1 + \mu u_2$ vrijedi

$$A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2) = 0,$$

iz čega slijedi $\lambda u_1 + \mu u_2 \in \Omega$, što prema Korolaru **??** znači da je Ω vektorski prostor. $\square$

Propozicija 1.3. *Neka je $A \in M_{mn}$, $b \in M_{m1}$, x_0 rješenje sustava $Ax = b$ i Ω vektorski prostor rješenja pridruženog homogenog sustava $Ax = 0$ (fundamentalni skup rješenja).*

Tada je $x_0 + \Omega = \{x_0 + u \colon u \in \Omega\}$ skup svih rješenja nehomogenog sustava $Ax = b$.

Dokaz. Kako je $Ax_0 = b$ i $Au = 0$, $\forall u \in \Omega$, vrijedi

$$A(x_0 + u) = Ax_0 + Au = b + 0 = b,$$

iz čega slijedi da je $x_0 + u$ rješenje nehomogenog sustava $Ax = b$.

Obratno, pretpostavimo da je x_1 neko rješenje nehomogenog sustava $Ax = b$. Tada je $Ax_1 = b$. Oduzimanjem jednakosti $\{Ax_0 = b, Ax_1 = b\}$ dobivamo $A(x_1 - x_0) = 0$ iz čega zaključujemo da je $x_1 - x_0$ rješenje pridruženog homogenog sustava, pa postoji $u \in \Omega$ takav da je $u = x_1 - x_0$, odnosno $x_1 = x_0 + u$. □

1.3 Gaussova metoda eliminacije

Razmotrimo sustav[1]

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \end{array} \tag{1.4}$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $x_1 = -1 - x_2 - 2x_3$ i uvrstimo u drugu i treću jednadžbu, dobivamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & - & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array} \tag{1.5}$$

Ako sada iz druge jednadžbe izrazimo $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_3$ i uvrstimo u treću jednadžbu, dobivamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & & & - & 2x_3 & = & 4 \end{array} \tag{1.6}$$

[1] U programskom sustavu *Mathematica* modul za rješavanje sustava $Ax = b$ Gaussovom metodom eliminacije je `LinearSolve[A,b]`. Ovaj modul daje partikularno rješenje x_0 sustava $Ax = b$.

Ovaj postupak doveo je do gornjetrokutaste forme, a u literaturi je poznat pod nazivom Gaussova metoda eliminacije. Nakon toga, postupkom rješavanja unazad redom dobivamo: $x_3 = -2$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$, odnosno $x = (1, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$.

Primijetimo da smo sustav (1.5) mogli dobiti od sustava (1.4) i tako da prvu jednadžbu pomnožimo s (-2) i dodamo drugoj jednadžbi te prvu jednadžbu pomnožimo s (-4) i dodamo trećoj jednadžbi. Slično, sustav (1.6) mogli smo dobiti od sustava (1.5) i tako da drugu jednadžbu pomnožimo s (-1) i dodamo trećoj jednadžbi. U ovim operacijama prepoznajemo elementarne transformacije.

Formalno, mogli bismo promatrati proširenu matricu A_p, na nju primijeniti elementarne transformacije nad retcima i tako dobiti gornjetrokutastu matricu. Praktično, proširenu matricu A_p slijeva treba množiti odgovarajućim Q-elementarnim matricama:

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & | & -4 \\ 4 & 1 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-4;1)\cdot Q_2(-2;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & -3 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \overset{Q_3(-1;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}.$$

1.3.1 Gauss-Jordanova metoda

Nastavljanjem primjene Q-elementarnih matrica nad retcima posljednje matrice, matrica sustava prelazi u dijagonalnu formu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \overset{Q_1(1;3)\cdot Q_2(-1;3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & -3 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \overset{Q_1(1/3;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix},$$

odakle direktno čitamo vrijednosti nepoznanica: $x_3 = -2$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

Zadatak 1.1. Riješite sustav linearnih jednadžbi iz Primjera 1.1.

Zadatak 1.2. Kirchoffovi zakoni.

1.3.2 Traženje općeg rješenja sustava (1.1) Gaussovom metodom eliminacije

Definicija 1.3. *Dva sustava linearnih jednadžbi su* ekvivalentna *ako imaju jednaki broj nepoznanica i isti skup rješenja.*

Primjedba 1.1. *Primijetite da primijenimo konačno mnogo elementarnih transformacija nad jednadžbama sustava* (1.1) *dobivamo sustav koji je ekvivalentan polaznom.*

Primjer 1.2. *Gaussovom metodom eliminacije potražimo opće rješenje niže navedenog sustava.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 23 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 12 \end{array}$$

Primjenom elementarnih transformacija nad retcima proširene matrice dobivamo

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & | & 12 \end{bmatrix} \overset{Q_4(-5;1)\cdot Q_2(-3;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & | & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & | & -23 \end{bmatrix}$$

$$\overset{Q_2(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & | & -23 \end{bmatrix} \overset{Q_1(-1;2)\cdot Q_3(-1;2)\cdot Q_4(1;2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & | & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako za vrijednost nepoznanice x_3 uzmemo proizvoljni parametar $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, za x_4 parametar $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ i za x_5 parametar $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, onda iz zadnje matrice čitamo

$$x_1 = -16 + \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3,$$
$$x_2 = 23 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6\lambda_3.$$

Zato opće rješenje sustava u skladu s (**??**) možemo zapisati kao

$$x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3,$$

gdje je

$$x_0 = \begin{bmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.3. *Gaussovom metodom eliminacije potražimo opće rješenje niže navedenog sustava.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}$$

Opće rješenje sustava u skladu s (**??**) možemo zapisati kao

$$x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,$$

gdje je

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 1.3. Gaussovom metodom eliminacije pokažite da je opće rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 10x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 14x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & + & 11x_5 & = & -1 \end{array}$$

zadano s $x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, gdje je $x_0 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0)^T$, $u_1 = (0, \frac{1}{2}, 1, 0, 0)^T$, $u_2 = (0, -\frac{1}{2}, 0, 1, 0)^T$, $u_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, 0, 0, 1)^T$.

Općenito, ako je $A \in M_{mn}$, $b \in M_{m1}$ i $r(A) = r \leq n$, onda primjenom elementarnih transformacija nad retcima proširene matrice A_p dobivamo ekvivalentnu matricu

$$A'_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & | & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & b'_m \end{bmatrix}$$

i sustav

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & +\cdots+ & & + & a'_{1,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & x_2 & +\cdots+ & & + & a'_{2,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & x_r & + & a'_{r,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a'_{rn}x_n & = & b'_r \\ 0\cdot x_1 + & 0\cdot x_2 & +\cdots+ & 0\cdot x_r & + & 0\cdot x_{r+1} & +\cdots+ & 0\cdot x_n & = & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0\cdot x_1 + & 0\cdot x_2 & +\cdots+ & 0\cdot x_r & + & 0\cdot x_{r+1} & +\cdots+ & 0\cdot x_n & = & b'_m \end{array} \tag{1.7}$$

Sukladno Kronecker-Capellijevom teoremu sustav (1.7) je rješiv onda i samo onda ako je

$$b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0. \tag{1.8}$$

Ako je barem jedan od brojeva $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ različit od nule, sustav nema rješenja jer bi u tom slučaju bilo $r(A_p) = r + 1 > r = r(A)$.

Razmotrimo detaljnije slučaj (1.8). U tom slučaju proširena matrica A'_p postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & | & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

odakle odmah dobivamo partikularno rješenje nehomogenog sustava $x_0 = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)^T$.

U cilju pronalaženja baznih vektora $u_1, \ldots, u_{n-r}$ pripadnog vektorskog prostora Ω, razmotrimo matricu ekvivalentnu odgovarajućoj proširenoj matrici pripadnog homogenog sustava

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & | & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & | & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Direktnom provjerom može se utvrditi da su vektori

$$u_1 = \begin{bmatrix} -a'_{1,r+1} \\ -a'_{2,r+1} \\ \cdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -a'_{1,r+2} \\ -a'_{2,r+2} \\ \cdots \\ -a'_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad u_{n-r} = \begin{bmatrix} -a'_{1n} \\ -a'_{2n} \\ \cdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

rješenja pripadnog homogenog sustava. Zašto su ovi vektori linearno nezavisni?

Opće rješenje sustava sada možemo zapisati kao (vidi također (**??**))

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i u_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Što je opće rješenje homogenog sustava $Ax = 0$, $A \in M_n$, ako je $r(A) = n$?

Zadatak 1.4. Odredite opće rješenje sustava

$$a)\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array},$$

$$b)\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 3 \end{array}$$

Rješenje: a) $x = x_0+\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$, $x_0 = 0$, $u_1 = (-\frac{4}{8}, -\frac{4}{8}, \frac{4}{8}, 1, 0)^T$, $u_2 = (\frac{7}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{5}{8}, 0, 1)^T$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

b) $x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, $x_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)^T$, $u_1 = (0, 1, 1, 0, 0)^T$, $u_2 = (0, 1, 0, 1, 0)^T$, $u_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0, 1)^T$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

1.4 Gaussova metoda kao LU-dekompozicija

Kao što smo pokazali u prethodnoj točki, konačnom primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima matrice $A \in M_{mn}$ može se odrediti njoj ekvivalentna gornjetrokutasta matrica. Naravno, slično može se odrediti i njoj ekvivalentna donjetrokutasta matrica.

Nadalje, detaljnije ćemo razmotriti slučaj kvadratne matrice $A \in M_n$. U nekim slučajevima može se odrediti njoj ekvivalentna gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica konačnom primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima matrice $A \in M_n$, a da pri tome ne koristimo izmjenu redaka.

Primjer 1.4. *Navedimo primjer matrice $A \in M_3$ za koju to neće biti moguće*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{Q_2(-1;1)\cdot Q_3(-1;1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nadalje, bez izmjene drugog i trećeg retka nije moguće dobiti gornjetrokutastu matricu.

Zadatak 1.5. Konstruirajte primjer kvadratne matrice koji će pokazati da bez izmjene redaka nije uvijek moguće dobiti ekvivalentnu donjetrokutastu matricu.

Pretpostavimo dakle, da smo kvadratnoj matrici $A \in M_n$ uspjeli odrediti njoj ekvivalentnu gornjetrokutastu matrica $U \in M_n$ konačnom primjenom elementarnih transformacija samo nad retcima te matrice, a da pri tome nismo koristili izmjenu redaka. To znači da postoje Q-elementarne matrice $Q_1, \dots, Q_r$ takve da je

$$U = Q_r \cdots Q_1 \cdot A. \tag{1.10}$$

Pri tome lako se vidi da se to može postići samo primjenom elementarnih matrica oblika $Q_i(\lambda; j)$ i da je pri tome $i > j$ (neki redak pomnožimo brojem λ i dodamo nekom drugom retku ispod njega). Zato je matrica $Q_i(\lambda; j)$, $i > j$, donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali. Primijetimo da je i njena inverzna matrica $Q_i(-\lambda; j)$ također donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali. Zato iz (1.10) dobivamo

$$A = Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1} \cdot U, \tag{1.11}$$

pri čemu su sve matrice $Q_1^{-1}, \dots, Q_r^{-1}$ donjetrokutaste s jedinicama na glavnoj dijagonali.

Lema 1.1. *Produkt dvije kvadratne gornjetrokutaste (donjetrokutaste) matrice $A, B \in M_n$ je ponovo gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica.*

Dokaz. Dokažimo lemu za slučaj gornjetrokutastih matrica ($a_{ij} = b_{ij} = 0$ za $i > j$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Označimo $C := A \cdot B$. Treba pokazati da je $c_{ij} = 0$ za $i > j$. Za $i > j$ dobivamo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + a_{ii} b_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Prva suma $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj}$ iščezava jer je u njoj $k \le i - 1 < i$ pa su svi a_{ik} u toj sumi jednaki nuli. Drugi član jednak je nuli jer je $i > j$ pa je $b_{ij} = 0$.

Konačno, i druga suma $\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ iščezava jer je u njoj $k \geq i+1 > i > j$ pa je u toj sumi $b_{kj} = 0$. □

Zadatak 1.6. Pokažite da je produkt dviju kvadratnih gornjetrokutastih (donjetrokutastih) matrice $A, B \in M_n$ s jedinicama na glavoj dijagonali ponovo gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica s jedinicama na glavoj dijagonali.

Primjedba 1.2. *Koristeći Lemu 1.1, odnosno rezultat Zadatka 1.6, zaključujemo da je produkt matrica $L := Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1}$ iz* (1.11) *donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali. Time* (1.11) *prelazi u*

$$A = L \cdot U, \tag{1.12}$$

gdje je L donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavoj dijagonali, a U gornjetrokutasta matrica. Rastav $A = LU$ nazivamo **LU-dekompozicija** *matrice A.*

*U općem slučaju može se pokazati (vidi primjerice [**?**]) da postoji (moguće je konstruirati) LU-dekompozicija kvadtatne matrice $A \in M_n$ ako su svi njezini glavni minori*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \det A$$

različiti od nule.

Ako ovaj uvjet nije ispunjen, onda je moguće načiniti LU-dekompoziciju matrice PA, gdje je P matrica permutacija redaka (vidi primjerice [1, str.117]).

Primjer 1.5. *Provjerimo je li LU-dekompozicija matrice A provediva i ako jest, pronađimo matrice L i U*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Budući da je $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$, $\Delta_3 = \det A = -3$, postupak je provediv.

Dobivamo $U = Q_3(1;2) \cdot Q_3(3;1) \cdot Q_2(-3;1) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i
$L = Q_2(3;1) \cdot Q_3(-3;1) \cdot Q_3(-1;2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Provjerite je li $LU = A$.

Zadatak 1.7. Ustanovite je li moguća LU-dekompozicija niže navedenih matrica te ako je moguća, pronađite odgovarajuće matrice L i U.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: a) LU-dekompozicija ove matrice nije moguća jer je $\Delta_2 = 0$,
b) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, c) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 4 & 3/2 & -15/7 & 1 \end{bmatrix}$, $U =$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

* * * * *

Razmotrimo ponovo problem rješavanja sustava linearnih jednadžbi

$$Ax = b, \tag{1.13}$$

gdje je $A \in M_n$ kvadratna matrica za koju je moguće provesti LU-dekompoziciju $A = LU$. U tom slučaju sustav (1.13) glasi

$$LUx = b. \tag{1.14}$$

Uz supstituciju

$$Ux = z, \tag{1.15}$$

sustav (1.14) prelazi u donjetrokutasti s jedinicama na glavnoj dijagonali

$$Lz = b. \tag{1.16}$$

Ovaj sustav se lako rješava supstitucijom unaprijed (vidi [2]) počevši s x_1 (Forward Supstitution). Označimo njegovo rješenje sa $z^\star$.

Ako sada vektor slobodnih koeficijenata sustava (1.15) zamijenimo sa $z^\star$, dobivamo gornjetrokutasti sustav koji se lako rješava supstitucijom unazad (vidi [2]) počevši s x_n (Back Supstitution). Označimo njegovo rješenje s $x^\star$.

Primjer 1.6. *Riješimo sustav $Ax = b$, gdje je A matrica iz Zadatka 1.7.b, a vektor slobodnih koeficijenata $b = (5, -2, -1)^T$.*

Najprije supstitucijom unaprijed riješimo donjetrokutast sustav $Lz = b$. Dobivamo $z^\star = (5, 8, -4)^T$. Nakon toga supstitucijom unazad riješimo gornjetrokutast sustav $Ux = z^\star$. Dobivamo $x^\star = (2, -1, 1)^T$.

Zadatak 1.8. Riješite sustav $Ax = b$, gdje je A matrica iz Zadatka 1.7.b, a vektor b jedan od vektora $b_1 = (7, 2, -7)^T$, $b_2 = (0, -4, 4)^T$, $b_3 = (2, -8, -6)^T$.

Rješenje: $x^1 = (3, 4, 4)^T$, $x^2 = (0, -4, -2)^T$, $x^3 = (4, 2, 0)^T$.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541`.