Linearna algebra I [1]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, izv. prof. dr. sc. Darija Marković
dr. sc. Darija Brajković[2]

10. studenoga 2020.

[1]Obvezni predmet u 1. semestru sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i sveučilišnog preddiplomskog studijskog programa Matematika i računarstvo (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[2]scitowsk@mathos.hr, darija@mathos.hr, dbrajkovic@mathos.hr

Sadržaj predmeta:

1. Pojam polja i vektorskog prostora. Primjeri vektorskih prostora, vektori u ravnini i prostoru, norma i skalarni produkt vektora u ravnini i prostoru. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora.

2. Pojam matrice i operacije s matricama. Regularne matrice. Determinanta. Lijeve i desne baze i koordinatni sustavi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Elementarne transformacije. Adjunkta. Rang matrice.

3. Sustavi linearnih jednadžbi. Rješivost i struktura skupa rješenja. Jednadžba pravca i ravnine u prostoru. Kronecker-Capellijev teorem. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi. Partikularno rješenje. Gaussova metoda eliminacije. Cramerovo pravilo.

Sadržaj

Poglavlje 1

Vektori u ravnini i prostoru

Neka je E skup točaka u prostoru, a $A, B \in E$ dvije proizvoljne točke. Tada skup svih točaka na pravcu određenom točkama A, B, a koje leže između točaka A i B zovemo **dužinom** i označavamo s $\overline{AB}$. Ako primjerice, točku A proglasimo početnom, a točku B završnom, onda takvu dužinu nazivamo **usmjerenom dužinom** i označavamo s $\overrightarrow{AB}$.

Definicija 1.1. *Kažemo da su dvije usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ **ekvivalentne** *i pišemo* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ *onda ako postoji* translacija prostora *koja točku* A *prevodi u* A', *a točku* B *u* B'.

Primjedba 1.1. *Primijetimo da za dvije ekvivalentne usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *vrijedi*

- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *su paralelne;*
- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *imaju istu orijentaciju, odnosno imaju isti vizualni smisao kretanja od početne prema završnoj točki;*
- $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A'B'}$ *imaju istu duljinu*[1], *koju ćemo označiti s* $\|\overrightarrow{AB}\|$, *odnosno s* $\|\overrightarrow{A'B'}\|$.

Primjedba 1.2. *Primijetimo još da je ekvivalencija usmjerenih dužina jedna* **relacija ekvivalencije**, *tj. da vrijedi*

[1] U literaturi se za duljinu usmjerene dužine pojavljuju još i izrazi: norma, intenzitet, modul.

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (refleksivnost)
2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (simetričnost)
3. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (tranzitivnost)

Sada možemo definirati osnovni pojam – **pojam vektora**:

Definicija 1.2. *Vektor $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina,*

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

Svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{PQ}$ ekvivalentnu usmjerenoj dužini $\overrightarrow{AB}$ nazivamo **reprezentant** *vektora $\vec{a}$. Pri tome pod* **normom vektora** *podrazumijevamo duljinu bilo kojeg reprezentanta, a označit ćemo ju s $\|\vec{a}\|$.*

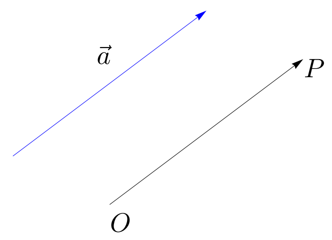
U daljnjem tekstu često ćemo govoriti o vektoru, a crtat ćemo neki njegov reprezentant.

Primjer 1.1. Nulvektor *je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju istu početnu i završnu točku. Označavat ćemo ga s $\vec{0}$, pri čemu je $\|\vec{0}\| = 0$.*

Jedinični vektor *zvat ćemo svaki vektor $\vec{e}$ za koga je $\|\vec{e}\| = 1$.*

Suprotni vektor *vektora $\vec{a}$ je klasa ekvivalencije svih usmjerenih dužina koje imaju suprotnu orijentaciju od orijentacije usmjerenih dužina vektora $\vec{a}$ i označavamo ga s $(-\vec{a})$.*

Primjedba 1.3. *Ako je O proizvoljna, ali fiksna točka u prostoru E, a $\vec{a}$ dani vektor, onda postoji jedinstvena točka $P \in E$, takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$ (vidi Sliku 1.1).*



Slika 1.1:

Navedimo još nekoliko često korištenih pojmova.

- kažemo da su dva ili više vektora kolinearni ako njihovi reprezentanti leže na istom ili na paralelnim pravcima;
- kažemo da su tri ili više vektora komplanarni ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

U daljnjem tekstu koristit ćemo sljedeće oznake [7]:

$X(E)$ – skup svih vektora u prostoru E;
$X(M)$ – skup svih vektora u ravnini M;
$X(p)$ – skup svih vektora na pravcu p.

Ako izaberemo jednu fiksnu točku $O \in E$, onda svakoj točki $P \in E$ pripada jedinstvena usmjerena dužina $\overrightarrow{OP}$, koju zovemo **radijvektor** ili vektor položaja [1, 5, 7] (vidi takodjer *Dodatak: Vektori* u [13]). Skup svih ovakvih radijvektora označit ćemo s

$$X_0 = X_0(E) := \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}.$$

Očigledno postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0.

Zadatak 1.1. Napišite definiciju realacije ekvivalencije.

a) U skupu $\mathbb{Z}$ definirana je relacija „djeljivosti" na sljedeći način: Cijeli broj a je u relaciji ρ s cijelim brojem b i pišemo $a\rho b$ ako je a djeljiv s b. Zašto relacija ρ nije relacija ekvivalencije?

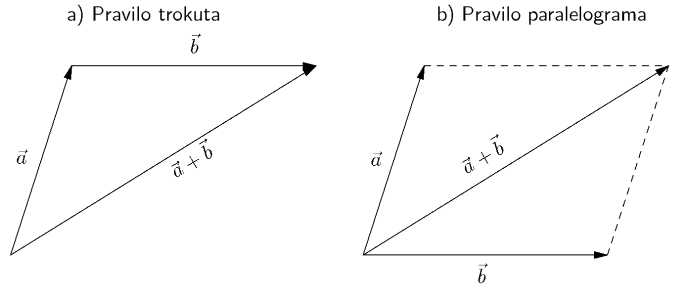
b) Koje od sljedećih relacija nisu relacije ekvivalencije u skupu $X_0(E)$? Zašto?

a) paralelnost b) okomitost c) kolinearnost d) komplanarnost

1.1 Operacije s vektorima

1.1.1 Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora je binarna operacija, tj. funkcija dviju varijabli $+ : X(E) \times X(E) \to X(E)$. Za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{c} := \vec{a} + \vec{b}$ pravilom trokuta (vidi Sliku 1.2.a) ili pravilom paralelograma (vidi Sliku 1.2.b).



Slika 1.2: Pravila za zbrajanje vektora

Binarna operacija zbrajanja vektora ima svojstvo zatvorenosti ili grupoidnosti, tj. rezultat operacije zbrajanja dva vektora opet je jedan vektor. Pored toga,

(i) vrijedi svojstvo asocijativnosti, tj. za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X(E)$ vrijedi:
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(ii) postoji neutralni element $\vec{0}$, tako da za proizvoljni vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

(iii) za svaki vektor $\vec{a} \in X(E)$ postoji inverzni element – suprotni vektor $(-\vec{a})$, takav da vrijedi:
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

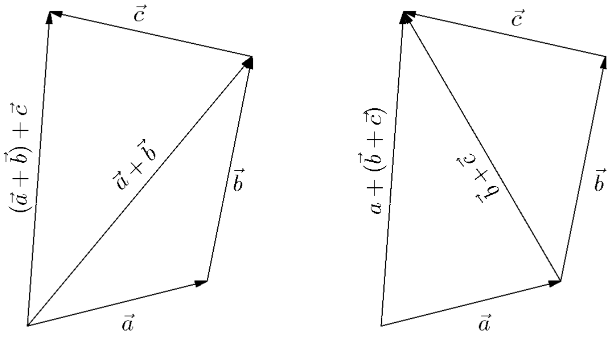
(iv) vrijedi zakon komutacije, tj. za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ vrijedi:
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

Navedena svojstva lako se mogu ilustrirati. Primjerice, svojstvo asocijativnosti ilustrirano je na Slici 1.3.

Skup svih vektora u prostoru snabdjeven računskom operacijom zbrajanja i prethodno navedenim svojstvima nazivamo **komutativna** ili **Abelova grupa**[2] i označavamo s $(X(E),+)$.

Zadatak 1.2. Definirajte binarnu operaciju zbrajanja na skupu $X_0(E)$ i navedite njena svojstva.

[2] Niels Abel (1802-1829), norveški matematičar.

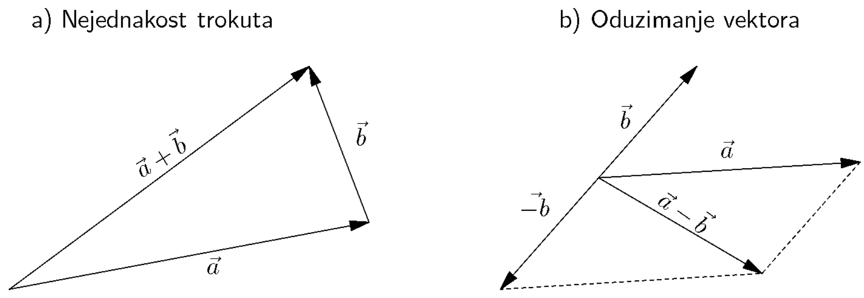


Slika 1.3: Ilustracija svojstva asocijativnosti zbrajanja vektora

Primjer 1.2. *Odaberimo reprezentante vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tako da oni leže na stranicama trokuta i da bude $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (vidi Sliku 1.4.a). Kako je u svakom trokutu duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije, vrijedi tzv.* nejednakost trokuta

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Pri tome jednakost vrijedi u slučaju ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni.



Slika 1.4: Ilustracija nejednakosti trokuta (lijevo) i oduzimanja vektora (desno)

Primjedba 1.4. *Oduzimanje vektora možemo definirati preko zbrajanja, ko-*

risteći inverzni element (suprotni vektor – vidi Sliku 1.4.b):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Primjedba 1.5. *Množenje vektora prirodnim brojem možemo definirati induktivno:*

$$n \cdot \vec{a} = (n-1) \cdot \vec{a} + \vec{a}, \qquad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Z a d a c i[3]

Zadatak 1.3. Zašto skup $\mathbb{N} \cup \{0\}$, snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i skup cijelih brojeva snabdjeven binarnom operacijom množenja nisu grupe?

Zadatak 1.4. Neka je G skup svih kompleksnih brojeva različitih od nule oblika $a + i\,b\sqrt{2}$, gdje su a i b racionalni brojevi, tj. $G = \{z \in \mathbb{C} : z = a + i\,b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi? Što je inverzni element elementa $z = a + i\,b\sqrt{2}$?
Rješenje: $e = 1$; $\quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+2b^2} - i\frac{b}{a^2+2b^2}\sqrt{2}$

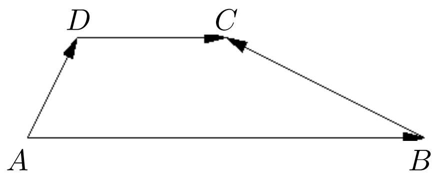
Zadatak 1.5. Neka je $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ podskup u skupu kompleksnih brojeva. Pokažite da je G Abelova grupa s množenjem kompleksnih brojeva kao binarnom operacijom. Što je neutralni element u ovoj grupi ? Napravite tablicu množenja za ovu grupu.
Rješenje: $e = 1$

Zadatak 1.6. Zadan je trapez čije su stranice usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ kao na slici, pri čemu je $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC}$. Prikažite usmjerenu dužinu $\overrightarrow{BC}$ pomoću usmjerenih dužina $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$. $\qquad [\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}]$

Zadatak 1.7. Matematičkom indukcijom dokažite generaliziranu nejednakost trokuta

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{a}_i\|.$$

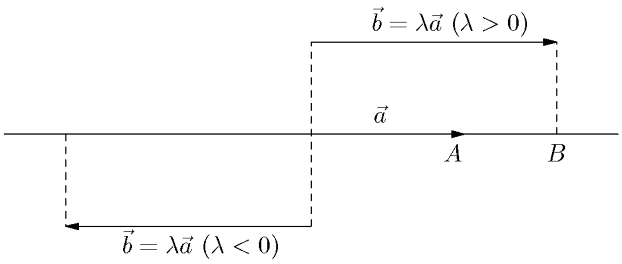
[3]Studenti trebaju pisati Domaće zadaće koje će dobivati na Vježbama iz ovog predmeta i Domaće zadaće za studente koji preferiraju bolju ocjenu koje mogu preuzeti sa web-stranice predmeta `http://www.mathos.unios.hr/index.php/nastava/preddiplomski-studij-matematika/182` Zadaće se pišu korištenjem LaTeX [17] i šalju voditelju Vježbi u pdf-formatu



Kada će u ovoj nejednakosti vrijediti jednakost?

1.1.2 Množenje vektora sa skalarom

Množenje vektora sa skalarom je funkcija dviju varijabli $\cdot : \mathbb{R} \times X(E) \to X(E)$. Za realni broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ definiramo novi vektor $\vec{b} := \lambda \cdot \vec{a}$ kao na Slici 1.5.



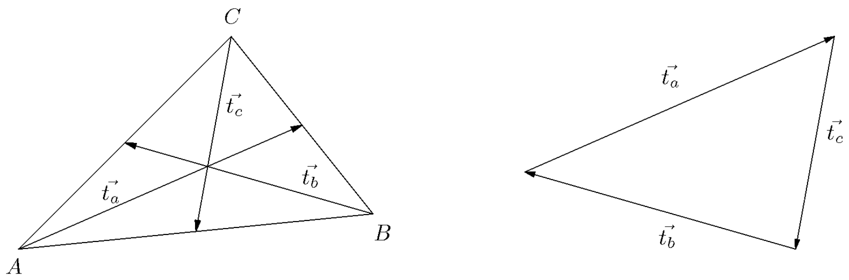
Slika 1.5: Množenje vektora sa skalarom

Primijetite da se analogno može definirati množenje vektora sa skalarom na skupu $X_0(E)$.

Zadatak 1.8. Za zadane vektore $\vec{a}, \vec{b} \in X(M)$ nacrtajte vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Zadatak 1.9. Pokažite da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju.

Primjer 1.3. *Treba dokazati da postoji trokut sa stranicama koje su jednake i paralelne s težišnicama bilo kojeg zadanog trokuta (vidi Sliku 1.6).*



Slika 1.6: Slika uz Primjer 1.3

Koristeći prethodni zadatak, dobivamo:

$$\begin{aligned} \vec{t_a} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \\ \vec{t_b} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}), \\ \vec{t_c} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}), \end{aligned}$$

odakle zbrajanjem dobivamo $\vec{t_a} + \vec{t_b} + \vec{t_c} = \vec{0}$.

U kontinuitetu sa svojstvima koja vrijede za zbrajanje vektora, navedimo i svojstava koja vrijede za množenje vektora sa skalarom:

(v) za dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X(E)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi distributivnost obzirom na vektorski faktor: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

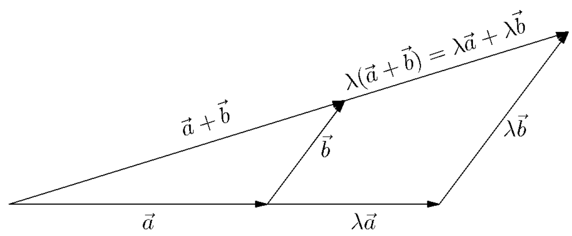
(vi) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi distributivnost obzirom na skalarni faktor: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

(vii) za dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi svojstvo kvaziasocijativnosti: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;

(viii) za bilo koji vektor $\vec{a} \in X(E)$ vrijedi: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Svojstvo (v) proizlazi iz sličnosti trokuta i ilustrirano je na Slici 1.7.

Svojstva (vi) i (vii) dokazuju se posebno za svaku kombinaciju predznaka skalara λ i μ (vidi [7]).



Slika 1.7: Ilustracija distributivnosti množenja sa skalarom

Skup $X(E)$ snabdjeven binarnom operacijom zbrajanja i operacijom množenja sa skalarom, koje imaju navedenih osam svojstava nazivamo **vektorski prostor** i označavamo s $(X(E),+,\cdot)$ [1–11, 15, 16, 18]. Analogno se definiraju i vektorski prostor $(X(M),+,\cdot)$ u ravnini i vektorski prostor $(X(p),+,\cdot)$ na pravcu. Kako je $X(M)\subset X(E)$, reći ćemo da je vektorski prostor $(X(M),+,\cdot)$ **vektorski potprostor** u $(X(E),+,\cdot)$. Nadalje ćemo ove vektorske prostore označavati samo s $X(E),X(M),X(p)$.

Primjedba 1.6. *Ako su $\vec{a},\vec{b}$ dva kolinearna vektora, tada postoji pravac p i točke $O,A,B\in p$ takve da je $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, pri čemu je*

$$\vec{b}=\lambda\vec{a},\qquad \textit{gdje je}\quad \lambda=\begin{cases}\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a},\vec{b}\ \textit{imaju isti smjer}\\ -\|\vec{b}\|/\|\vec{a}\|, & \vec{a},\vec{b}\ \textit{su suprotnog smjera}\end{cases}$$

Matematičku strukturu $(X_0,+,\cdot)$ zovemo **vektorski prostor radijvektora** (detaljnije vidi [1]), pri čemu je $+:X_0\times X_0\to X_0$ zbrajanje sa svojstvima[4]

(i) $(\forall\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in X_0)\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ [asocijativnost]

(ii) $(\exists\,\vec{0}\in X_0)\,(\forall\vec{a}\in X_0)\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ [$\vec{0}$ je neutralni element za zbrajanje]

(iii) $(\forall\,\vec{a}\in X_0)\,(\exists!\,\vec{a'}\in X_0)\quad \vec{a}+\vec{a'}=\vec{a'}+\vec{a}=\vec{0}$ [inverzni element: $\vec{a'}=-\vec{a}$]

(iv) $(\forall\,\vec{a},\vec{b}\in X_0)\quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ [komutativnost]

[4] Prije toga uvesti **univerzalni** $(\forall)$ i **egzistencijalni** $(\exists)$ **kvantifikator** t. 6.1

$\cdot : \mathbb{R} \times X_0 \to X_0$ množenje sa skalarom sa svojstvima

(v) $(\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in X_0)\, (\forall\, \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ [distributivnost u vektorskom faktoru]

(vi) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\, (\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ [distributivnost u skalarnom faktoru]

(vii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0)\, (\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ [kvaziasocijativnost]

(vii) $(\forall\, \vec{a} \in X_0) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Primjeri vektorskih prostora

- $X(E)$, $X(M)$, $X(p)$, X_0;
- Skup $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_i \in \mathbb{R}\}, \quad n = 1, 2, \ldots$ s računskim operacijama

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \qquad \text{(zbrajanje)}$$
$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \qquad \text{(množenje sa skalarom)}$$

- Skup $\mathbb{C}^n$ s odgovarajućim računskim operacijama *zbrajanja* i *množenje sa skalarom*;
- Skup polinoma P_n stupnja manjeg ili jednakog n s realnim koeficijentima (uključujući i polinom nultog stupnja) snabdjeven računskim operacijama

zbrajanja:

$$(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) + (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

množenja sa skalarom:

$$\lambda(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \cdots + (\lambda a_n)t^n.$$

- Skup $C([a, b])$ svih neprekidnih funkcija definiranih na segmentu $[a, b]$ snabdjeven računskim operacijama

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in [a, b] \qquad \text{(zbrajanje)}$$
$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in [a, b] \qquad \text{(množenje sa skalarom)}$$

1.1.3 Potprostor

Definicija 1.3. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Ako je $(Y, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ s istim operacijama iz X, onda kažemo da je Y potprostor u X i pišemo $Y \subseteq X$.*

Primjerice $X_0(M)$ i $X_0(p)$ su potprostori u $X_0(E)$.

Slično, za $\vec{a} \in X_0(M)$ njegova linearna ljuska $L(\vec{a}) = \{\lambda\vec{a} \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ je potprostor u $X_0(M)$.

Trivijalni vektorski potprostori vektorskog prostora X su $\{0\}$ i sam X.

Lako se može provjeriti da vrijedi:

Propozicija 1.1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je Y potprostor u X onda i samo onda ako vrijedi*

(i) $a + b \in Y, \quad \forall a, b \in Y$

(ii) $\lambda a \in Y \quad \forall a \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Korolar 1.1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je Y potprostor u X onda i samo onda ako vrijedi*

(i') $\lambda x + \mu y \in Y, \quad \forall x, y \in Y, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

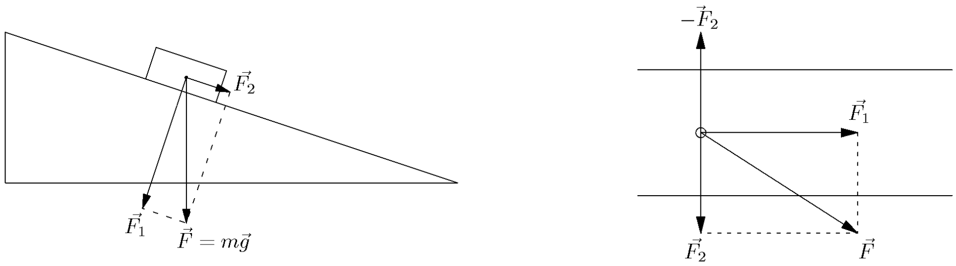
1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija 1.4. *Ako su $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ vektori, a $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalari, tada vektor $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n \in X_0$ nazivamo* **linearna kombinacija** *vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Kažemo još da je vektor $\vec{a}$ rastavljen (razvijen) po vektorima $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.*

Pogledajmo dva jednostavna fizikalna primjera (vidi Sliku 1.8):

- na tijelo na kosini djeluje sila teža $\vec{F}$, koju po pravilu paralelograma rastavljamo na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;
- na tijelo u vodi djeluje vučna sila $\vec{F}$, koju također rastavljamo po pravilu paralelograma na sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;

Navedene rastave možemo zapisati kao $1 \cdot \vec{F} + (-1) \cdot \vec{F}_1 + (-1) \cdot \vec{F}_2 = \vec{0}$.



Slika 1.8: Rastav sile

Definicija 1.5. *Kažemo da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$* **linearno nezavisan** *ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:*

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

U protivnom kažemo da je skup vektora **linearno zavisan**, *tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način, tj.*

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \textit{pri čemu} \quad \exists\, \lambda_i \neq 0.$$

Primjer 1.4. *Ako skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sadrži nulvektor, on je linearno zavisan.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je baš prvi vektor $\vec{a}_1$ nulvektor. Tada možemo utvrditi da vrijedi:

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

pa smo na taj način pronašli jednu linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, koja iščezava na netrivijalan način.

Primijetite da su sile $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ iz fizikalnih primjera s početka odjeljka također linearno zavisne. Sljedeći teorem ukazuje nam kako se na jedan operativniji način može ustanoviti[5] je li skup vektora linearno zavisan ili nezavisan.

Teorem 1.1. *Skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ je linearno zavisan onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.*

[5] Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti pojam: **nužno i dovoljno** t. 6.2

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisan. Po prethodnoj definiciji to znači da postoji njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$, a da je pri tome $\lambda_1 \neq 0$. Tada možemo pisati

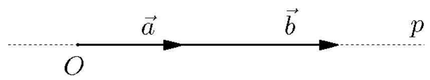
$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\vec{a}_n\,.$$

(Dovoljnost) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \cdots + \beta_n\vec{a}_n$ iz čega slijedi

$$1 \cdot \vec{a}_1 + (-\beta_2)\vec{a}_2 + \cdots + (-\beta_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

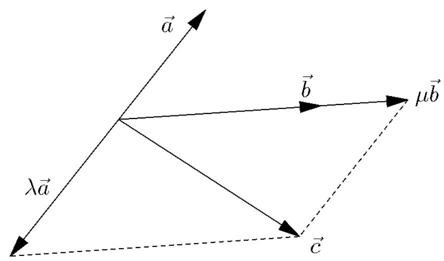
Po definiciji to znači da su vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ linearno zavisni. ♣

Primjer 1.5. *Bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(p)$ je jedan).*



Slika 1.9: Linearna zavisnost dvaju vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(p)$

Primjer 1.6. *Bilo koja tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(M)$ je dva).*



Slika 1.10: Linearna zavisnost triju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(M)$

Primjer 1.7. *Bilo koja četiri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in X_0(E)$ su linearno zavisna (maksimalni mogući broj linearno nezavisnih vektora u $X_0(E)$ je tri).*

Zadatak 1.10. Pokažite da su dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ kolinearna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

Zadatak 1.11. Pokažite da su tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ komplanarna onda i samo onda ako su linearno zavisna.

Teorem 1.2. *Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora u ravnini, tada se svaki vektor $\vec{c} \in X_0(M)$ na jedinstven način[6] može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}$.*

Dokaz. Prema Primjeru 1.6 vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni pa prema Teoremu 1.1 vrijedi

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\,. \tag{1.1}$$

U svrhu dokaza jedinstvenosti ovog rastava, pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se vektor $\vec{c}$ barem na još jedan način može prikazati pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \lambda'\vec{a} + \mu'\vec{b} \tag{1.2}$$

Oduzimanjem jednakosti (1.1), (1.2) dobivamo

$$(\lambda - \lambda')\vec{a} + (\mu - \mu')\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ linearno nezavisni, slijedi: $\lambda = \lambda' \quad \& \quad \mu = \mu'$. ♣

Na sličan način može se dokazati i sljedeći teorem.

Teorem 1.3. *Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ tri linearno nezavisna vektora u prostoru, tada se svaki vektor $\vec{d} \in X_0(E)$ na jedinstven način može prikazati (rastaviti) kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Zadatak 1.12. Neka je $O \in E$ fiksna točka i neka točka $C \in E$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $3:1$, tj. $d(A,C) : d(C,B) = 3:1$. Vektor $\overrightarrow{OC}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.
Rješenje: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

Zadatak 1.13. Provjerite jesu li vektori: $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$ linearno zavisni.
Rješenje: Jesu, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

[6] Prije toga na jednostavnom primjeru objasniti **princip kontradikcije**, t. 6.3

1.3 Baza vektorskog prostora. Koordinatni sustav

Definicija 1.6.

Uređena trojka $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *linearno nezavisnih vektora iz* $X_0(E)$ *zove se* **baza vektorskog prostora** $X_0(E)$.

Uređen par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *linearno nezavisnih vektora iz* $X_0(M)$ *zove se baza vektorskog prostora* $X_0(M)$.

Svaki nenul vektor $(\vec{e})$ *iz* $X_0(p)$ *čini bazu vektorskog prostora* $X_0(p)$.

Neka je $\vec{a} \in X_0(E)$, a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ baza u $X_0(E)$. Tada vektor $\vec{a}$ na jedinstven način možemo zapisati

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Brojeve a_1, a_2, a_3 zovemo **koordinate** (komponente) vektora $\vec{a}$ u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Sada prirodno slijede pravila za zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom ako su oni zadani sa svojim koordinatama:

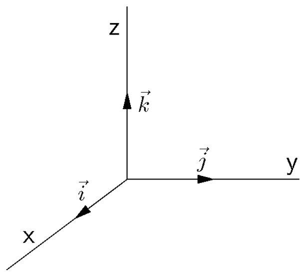
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \quad \text{[zbrajanje]}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3 \quad \text{[množenje vektora skalarom]}$$

Definicija 1.7. *Par* $(O\,; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ *fiksne točke* O *i baze* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *zovemo* **Kartezijev[7] koordinatni sustav u prostoru** E.

Posebno je pogodno ako za bazu prostora $X_0(E)$ izaberemo uređenu trojku međusobno okomitih i jediničnih (dugačkih 1!) vektora, koje obično označavamo s $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tako dobivamo **pravokutni Kartezijev koordinatni sustav** $(O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. Pravac određen vektorom $\vec{i}$ označavamo sa x i zovemo **os apscisa**, pravac određen vektorom $\vec{j}$ označavamo sa y i zovemo **os ordinata**, a pravac određen vektorom $\vec{k}$ označavamo sa z i zovemo **os aplikata**.

[7] Rene Descartes (1596-1650), francuski filozof i matematičar. Njegovo latinizirano ime je Cartesius



Slika 1.11: Pravokutni Kartezijev koordinatni sustav

Primjedba 1.7. *Ranije smo utvrdili da postoji bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) između skupova E i X_0. Primijetite da također postoji bijekcija između skupa svih uređenih trojki realnih brojeva $\mathbb{R}^3$ i vektorskog prostora $X_0(E)$ jer svakoj uređenoj trojki $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ na jedinstven način možemo pridružiti vektor $\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ iz prostora $X_0(E)$ i obrnuto. Zato ćemo često po potrebi povezivati, pa neki puta i poistovjećivati pojmove: skup E, vektorski prostor $X_0(E)$ i $\mathbb{R}^3$.*

Zadatak 1.14. Provjerite čine li vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ bazu u vektorskom prostoru $X_0(M)$. Ako čine, vektor $\vec{c} = -11\vec{i} + 6\vec{j}$ prikažite u toj bazi.
Rješenje: čine, $\vec{c} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$.

1.4 Norma vektora

Pretpostavimo da je u ravnini M definiran pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ i neka je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$. Sada možemo izračunati (vidi Sliku 1.12a) duljinu ovog vektora $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Primjetite da za ovako definiranu duljinu vektora vrijedi

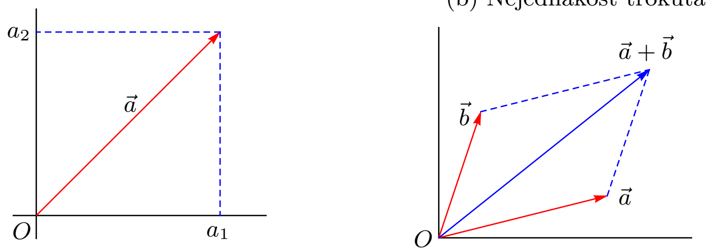
(i) $\|\vec{a}\| \geq 0 \quad \& \quad (\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$,

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| = \mid \lambda \mid \|\vec{a}\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (vidi Sliku 1.12b)

Duljina (norma, intenzitet) vektora može se i općenito definirati:

(a) Norma vektora (b) Nejednakost trokuta



Slika 1.12:

Definicija 1.8. *Neka je X_0 vektorski prostor. Funkciju $\|\cdot\| : X_0 \to [0,\infty)$, koja svakom vektoru $\vec{a} \in X_0$ pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s $\|\vec{a}\|$ ili jednostavno a) zovemo* **norma** *vektora $\vec{a}$ ako vrijedi*

(i) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ [pozitivna definitnost],

(ii) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$ *za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i za svaki* $\vec{a} \in X_0$,

(iii) $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ *za svaki* $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$ [nejednakost trokuta].

Najčešće korištene vektorske norme su[8]

$\|\vec{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + |a_3|$, ($l_1$ norma)

$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, ($l_2$ Euklidova ili euklidska norma)

$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}$, ($l_\infty$ norma ili Čebiševljeva norma)

Zadatak 1.15. Pokažite da spomenute norme imaju sva svojstva navedena u prethodnoj definiciji.

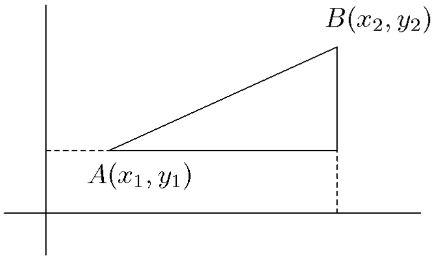
1.4.1 Udaljenost dviju točaka

Udaljenost dviju točaka $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in M$ u ravnini M u kojoj je uveden pravokutni Kartezijev koordinatni sustav možemo izračunati (vidi Sliku 1.13) po formuli

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.3}$$

Ako definiramo radijvektore $\vec{r}_A, \vec{r}_B \in X_0(M)$,

[8] U programskom sustavu *Mathematica* l_2-normu vektora $\vec{a}$ dobivamo naredbom `Norm[a]`, gdje je a lista



Slika 1.13: Udaljenost točaka u ravnini

$$\vec{r}_A = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \qquad \vec{r}_B = x_2\vec{i} + y_2\vec{j},$$

onda udaljenost zapisanu formulom (1.3) možemo zapisati kao

$$d_2(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2, \quad \text{gdje je} \quad \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \tag{1.4}$$

Na sličan način može se definirati i udaljenost dviju točaka preko l_1 ili l_∞ norme sljedećim formulama:

$$d_1(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_1 \qquad d_\infty(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_\infty. \tag{1.5}$$

Koji je geometrijski smisao d_1, d_2 i d_∞ udaljenosti dviju točaka $A, B \in M$?

Primjer 1.8. *U realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ d_2 udaljenost dviju točaka $A = (x_1, \dots, x_n)$, $B = (y_1, \dots, y_n)$ definira se kao $d_2(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Kako bi se definirale odgovarajuće d_1 i d_∞ udaljenosti?*

Zadatak 1.16. Pokažite da funkcije d_i, $i = 1, 2, \infty$ definirane s (1.4)–(1.5) zadovoljavaju sljedeća svojstva

$$\begin{aligned}
(i) &\quad d_i(A,B) \geq 0, \quad \forall A, B \in M, \\
(ii) &\quad d_i(A,B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B, \\
(ii) &\quad d_i(A,B) = d_i(B,A), \quad \forall A, B \in M, \\
(iv) &\quad d_i(A,B) \leq d_i(A,C) + d_i(C,B), \quad \forall A, B, C \in M.
\end{aligned}$$

Zadovoljava li funkcija $d_{LS}(A,B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|_2^2$ navedena svojstva?

Zadatak 1.17. „Jedinična kružnica” sa središtem u $O \in \mathbb{R}^2$ definira se kao skup $\partial K = \{T \in M : \ d(O,T) = 1\}$. Nacrtajte jedinične kružnice ako se udaljenost definira s d_1, d_2 ili d_∞.

Zadatak 1.18. Zadan je trapez $ABCD$ s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$. Odredite četvrti vrh D ako vrijedi $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{DC}$.
Rješenje: $\vec{r}_D = \vec{r}_C - \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_A$, $D(3,3,-4)$.

Zadatak 1.19. Zadan je trokut ABC s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-2,2)$, $C(5,2,-4)$. Odredite duljinu težišnice iz vrha A.
Rješenje: $P_A(4,0,-1)$, $\overrightarrow{AP_A} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $d = \sqrt{57}$.

Zadatak 1.20. Zadan je paralelogram $ABCD$ s vrhovima: $A(-3,2,1)$, $B(3,-1,4)$, $C(5,2,-3)$, $D(-1,5,-6)$. Izračunajte udaljenost točke A do sjecišta njegovih dijagonala.
Rješenje: $S(1,2,-1)$, $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_D - \vec{r}_B), d(A,S) = 2\sqrt{5}$.

Zadatak 1.21. Dokažite da vektor $\vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ s početkom u točki O ima vrh u polovištu dužine $\overline{AB}$.

1.5 Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost

Cauchy – Schwarz – Buniakowsky (CSB) nejednakost, vrlo je važnau različitim primjenama, a može se naći u brojnoj literaturi (vidi primjerice [1, 6, 7, 12, 14]). Pokažimo najprije sljedeću jednostavnu lemu (vidi [7]) pomoću koje ćemo dokazati CSB nejednakost.

Lema 1.1. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + 2bx + c, \quad a,b,c \in \mathbb{R},\ a > 0$ *kvadratna funkcija. Tada vrijedi:*

$$\begin{array}{ll} (i) & b^2 - ac \le 0 \iff f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (ii) & b^2 - ac = 0 \iff f(-\frac{b}{a}) = 0 \quad \& \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}. \end{array}$$

Dokaz. Nultočke kvadratne funkcije f dobiju se iz dobro poznate formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}, \quad D = b^2 - ac.$$

Budući da je $a > 0$ graf ove kvadratne funkcije (parabola) okrenut je prema gore i očigledno vrijedi

$$D = b^2 - ac \leq 0 \Longleftrightarrow f(x) \geq 0.$$

Ako je $D = b^2 - ac = 0$, onda je $f(-\frac{b}{a}) = 0$ i $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ i obrnuto. ♣

Teorem 1.4. (Cauchy – Schwarz – Buniakowsky). *Za proizvoljne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \tag{1.6}$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da je $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

Dokaz.

1. Ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ (odnosno $b_1 = \cdots = b_n = 0$), teorem očigledno vrijedi.

2. Pretpostavimo zato da je barem jedan $a_i \neq 0$ i definirajmo pomoćnu funkciju

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2,$$

koju možemo zapisati u obliku

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c, \qquad a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Kako je zbog $a_i \neq 0$, $a > 0$ i $f(x) \geq 0\, \forall x \in \mathbb{R}$, onda prema prethodnoj lemi mora biti

$$b^2 - ac \leq 0, \tag{1.7}$$

što je zapravo nejednakost (1.6).

Još je preostalo dokazati da u (1.6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da u (1.6), odnosno (1.7), stoji jednakost. Prema prethodnoj lemi tada je $f(-\frac{b}{a}) = 0$, tj. vrijedi

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{b}{a}a_k + b_k\right)^2 = 0,$$

iz čega slijedi

$$-\frac{b}{a}a_k + b_k = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad b_k = \frac{b}{a}a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$. Tada je specijalno

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda a_k = \lambda a,$$
$$c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k)^2 = \lambda^2 a,$$

pa imamo

$$D = b^2 - ac = (\lambda a)^2 - a \cdot \lambda^2 \cdot a = 0,$$

što daje jednakost u (1.7), odnosno (1.6).

♣

Korolar 1.2. (Hölderova nejednakost). *Za proizvoljne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \tag{1.8}$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0\,!$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

Dokaz. **1.** Ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ (odnosno $b_1 = \cdots = b_n = 0$), korolar očigledno vrijedi.

2. Pretpostavimo zato da je barem jedan $a_i \neq 0$. Budući da uz ranije oznake iz (1.7) slijedi $b^2 \leq ac$, odnosno $b \leq |b| \leq \sqrt{a}\,\sqrt{c}$, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= a + 2b + c \leq a + 2\sqrt{a}\,\sqrt{c} + c = \left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^2,\end{aligned} \tag{1.9}$$

što daje (1.8).

Još je preostalo dokazati da u (1.6) stoji jednakost onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$.

($\Longrightarrow$) Pretpostavimo da u (1.8), stoji jednakost. To znači da i u (1.9) stoji jednakost, a to znači da je $b = \sqrt{a}\,\sqrt{c}$, odnosno $b^2 - ac = 0$. Prema Lemi 1.1 vrijedi

$$0 = f(-\tfrac{b}{a}) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\left(-\tfrac{b}{a}\right) + b_k\right)^2,$$

iz čega slijedi $b_k = \lambda a_k$, za svaki $k = 1, \ldots, n$, pri čemu, zbog $a > 0$ i $b \geq 0$, vrijedi $\lambda = \frac{b}{a} \geq 0$.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoji $\lambda \geq 0$, takav da bude $b_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$. Kako je

$$\begin{aligned} a := \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \qquad & \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \lambda^2 a, \\ \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 = & \sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda a_k)^2 = (1+\lambda)^2 a, \end{aligned}$$

i $\sqrt{\lambda^2} = \lambda$ (za $\lambda \geq 0$) vrijedi:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} = (1+\lambda)\sqrt{a} - \sqrt{a} - \lambda\sqrt{a} = 0,$$

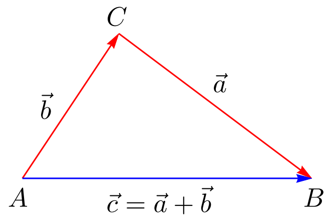
što znači da u (1.8) vrijedi jednakost.

$\square$

Korolar 1.3. (Nejednakost trokuta). *Ako definiramo vektore* $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, *onda Hölderovu nejednakost* (1.8) *možemo zapisati kao*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|, \tag{1.10}$$

gdje je $\|\cdot\|$ *euklidska* ℓ_2 *norma. Pri tome u* (1.10) *jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori* a, b *linearno zavisni.*



Slika 1.14: Nejednakost trokuta

Primjedba 1.8. *Primijetite specijalno ako su zadane točke* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *i ako se udaljenost dviju točaka definira sukladno formuli (1.3), odnosno (1.4), onda nejednakost* (1.10) *daje nejednakost trokuta u* $\mathbb{R}^3$*:*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako točka C *leži na spojnici* $\overline{AB}$*. Naime, vrijedi:*

$$\begin{aligned} d(A, B) = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\| =& \|(\vec{r}_B - \vec{r}_C) + (\vec{r}_C - \vec{r}_A)\| \\ \leq& \|\vec{r}_B - \vec{r}_C\| + \|\vec{r}_C - \vec{r}_A\|\| \\ =& d(C, B) + d(A, C). \end{aligned}$$

Primjer 1.9. *Neka su* x *i* y *realni brojevi takvi da je* $3x + 7y = 1$*. Dokažite da je*

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

Primjenom CSB nejednakosti uz $n = 2$ i primjerice $a_1 = x$, $a_2 = y$, $b_1 = 3$ i $b_2 = 7$, dobivamo da je

$$(3x + 7y)^2 \leq (x^2 + y^2)(3^2 + 7^2),$$

tj.

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{58}.$$

Zadatak 1.22. Neka su $x, y, z \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ takvi da je $x+y+z = 1$. Odredite maksimalnu vrijednost izraza

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1}.$$

Zadatak 1.23. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dokažite:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Zadatak 1.24. Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ vrijedi nejednakost

$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4)\,.$$

Zadatak 1.25. Neka su dana dva trokuta: trokut T_1 sa stranicama a, b, c i trokut T_2 sa stranicama x, y, z. Dokažite da su trokuti T_1 i T_2 slični ako i samo ako vrijedi

$$(\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz})^2 = (a + b + c)(x + y + z).$$

Zadatak 1.26. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$abc(a + b + c) \leq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

Zadatak 1.27. Neka su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta (a, b - katete, c - hipotenuza). Dokažite:

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

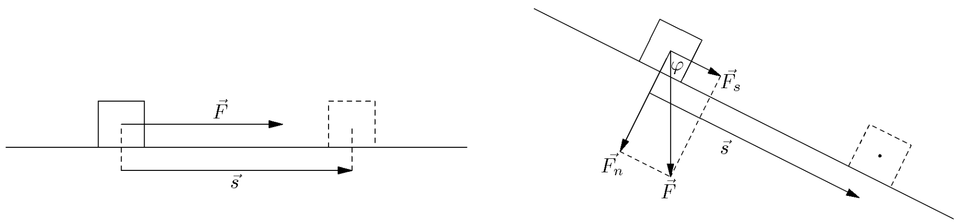
1.6 Skalarni produkt

Motivacija za uvođenje pojma skalarnog produkta vektora je fizikalna definicija rada sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$. Ako rad obavlja sila $\vec{F}$ koja djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda je rad zadan s (vidi Sliku 1.15 (lijevo))

$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| = F\,s,$$

a ako sila $\vec{F}$ ne djeluje u smjeru puta $\vec{s}$, onda rad obavlja samo komponenta $\vec{F}_s$ sile u smjeru puta $\vec{s}$ (vidi Sliku 1.15 (desno)), tj.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_s + \vec{F}_n, \\ W &= \|\vec{F}_s\| \cdot \|\vec{s}\| = (F\cos\varphi)\, s = F\, s\cos\varphi \end{aligned}$$



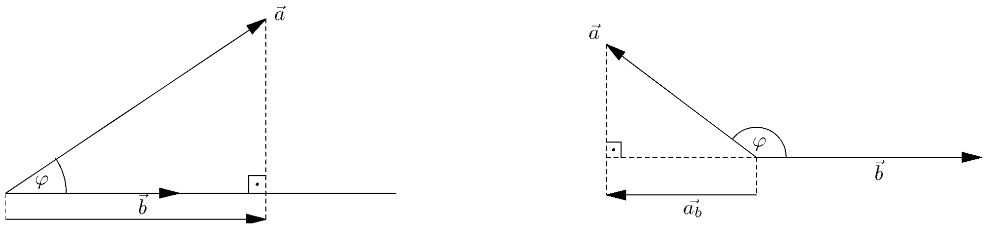
Slika 1.15: Rad sile $\vec{F}$ na putu $\vec{s}$

Primijetite da je sila $\vec{F}_s$ ortogonalna projekcija sile $\vec{F}$ u smjeru vektora puta $\vec{s}$.

Općenito ćemo projekciju vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ označiti s $\vec{a}_b$. Pod skalarnom projekcijom vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ podrazumijevamo (uz oznaku $a := \|\vec{a}\|$)[9]

$$a_b = a\,\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Primijetite da broj $a\cos\varphi$ može biti nula ($a = 0$ ili $\varphi = \frac{\pi}{2}$), pozitivan ($\varphi < \frac{\pi}{2}$) ili negativan ($\varphi > \frac{\pi}{2}$).



Slika 1.16: Projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$

Zadatak 1.28. Pokušajte geometrijski opravdati niže navedena svojstva projekcije vektora

[9] U nekim knjigama se broj a_b naziva „projekcija vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$ ([5])”

a) Projekcija produkta skalara s vektorom jednaka je produktu tog skalara i projekcije vektora
$$(\lambda\,\vec{a})_b = \lambda \vec{a}_b,$$

b) Projekcija zbroja dva vektora jednaka je zbroju projekcija tih vektora
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c.$$

Definicija 1.9. *Skalarni produkt u $X_0(E)$ je operacija $\cdot\, X_0 \times X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ koja paru vektora $\vec{a}$, $\vec{b} \in X_0$ pridužuje broj (skalar), kojeg ćemo označiti s $\vec{a}\cdot\vec{b}$, tako da je*
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}, & \textit{ako je } \vec{a} = \vec{0} \textit{ ili } \vec{b} = \vec{0}, \\ ab\cos\varphi \in \mathbb{R}, & \textit{ako je } \vec{a},\, \vec{b} \neq \vec{0}, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \end{cases}$$
pri čemu je običaj da se i rezultat operacije naziva skalarni produkt.[10]

Koristeći ranije uveden pojam projekcije vektora, skalarni produkt možemo zapisati kao
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\varphi = \begin{cases} a(b\,\cos\varphi) = a\,b_a, \text{ ili} \\ b(a\,\cos\varphi) = b\,a_b. \end{cases}$$
Navedimo neka svojstva skalarnog produkta:

1. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$, [slijedi iz Zadatka 1.28b]
2. $(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$, [slijedi iz Zadatka 1.28a]
3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 \ge 0$ i $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Svojstva 3. i 4. slijede direktno iz Definicije 1.9.

Primjer 1.10. *Lako se na osnovi Definicije 1.9 vidi da vrijedi:*

1. $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = a^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$,
2. $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = a^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$,
3. $(\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}) \quad \cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b}$,
4. $(\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}) \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

[10] engl.: scalar (dot) product, njem.: Skalarprodukt (Ineresprodukt)

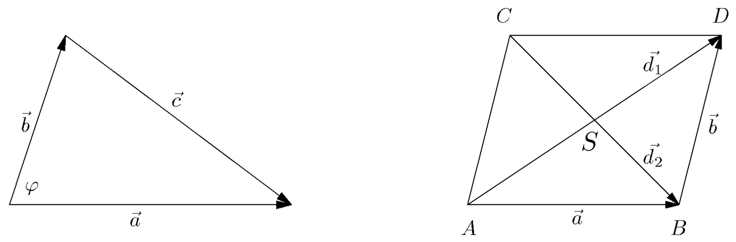
Primjer 1.11. (Poučak o kosinusima). *Dokažimo Poučak o kosinusima. Označimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i kut φ u kosokutnom trokutu kao na Slici 1.17. Množeći skalarno vektor*

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

s vektorom $\vec{c}$ dobivamo

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2 \\ &= a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2. \end{aligned}$$

Slično pokušajte izvesti formule i za druge stranice kosokutnog trokuta.



Slika 1.17: Slika uz Primjer 10 (lijevo) i Primjer 11 (desno)

Primjer 1.12. *Dokažimo da se dijagonale romba raspolavljaju i da su međusobno okomite.*

1. Dokažimo da se dijagonale romba raspolavljaju, tj. da vrijedi: $|\overline{CS}| = |\overline{SB}|$ i $|\overline{AS}| = |\overline{SC}|$.

   Primijetite da su trokuti $\triangle ASB$ i $\triangle SDC$ sukladni jer su im najdulje stranice sukladne, a kutovi uz njih jednaki. (Što znači da su dva geometrijska lika sukladna? Uz koje uvjete su dva trokuta sukladna?) Zato su im i odgovarajuće stranice sukladne iz čega slijedi tražena tvrdnja.

2. Pokažimo da su dijagonale romba međusobno okomite. Iz slike se vidi da je $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$. Tražena tvrdnja slijedi iz činjenice što skalarni produkt

$$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2 = 0$$

iščezava (duljine stranica a, b romba su jednake).

Primjer 1.13. *Načinimo tablicu skalarnog množenja za ortonormiranu bazu* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ *vektorskog prostora* $X_0(E)$

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Direktnom provjerom uz korištenje tablice množenja iz *Primjera 1.13* dobivamo

Teorem 1.5. *Za vektore*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \end{aligned}$$

vrijedi formula[11]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{1.11}$$

Iz definicije skalarnog produkta i norme vektora korištenjem formule (1.11) dobivamo

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \tag{1.12}$$

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a\, b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \tag{1.13}$$

Primjer 1.14. *Pokažimo da su dijagonale četverokuta* $ABCD$ *s vrhovima* $A(1, -2, 2), B(1, 4, 0),$
$C(-4, 1, 1),\ D(-5, -5, 3)$ *međusobno okomite.*

Kako je $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = -6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$, imamo $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Primjer 1.15. *Zadan je trokut* ABC *s vrhovima* $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. *Treba odrediti unutrašnji kut tog trokuta pridružen vrhu* B.

[11] U programskom sustavu *Mathematica* skalarni produkt vektora $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dobivamo naredbom $a\,.\,b$ ili $Dot[a\,.\,b]$, gdje su a, b liste

Kako je $\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 7\vec{i} + \vec{k}$, dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \, \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Z a d a c i

Zadatak 1.29. Pokažite da je zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak dvostrukom zbroju kvadrata duljina njegovih stranica.
Uputa: stranice i dijagonale paralelograma orijentirajte tako da bude: $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$.

Zadatak 1.30. Pokažite da su nasuprotni bridovi pravilnog tetraedra $ABCD$ međusobno okomiti.
Uputa: primijetite da je kut između susjednih bridova 60^o.

Zadatak 1.31. Odredite kut nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta ako su težišnice na krakove međusobno okomite.
Rješenje: $\alpha \approx 37^o$.

Zadatak 1.32. Ako je vektor $\vec{a} + 3\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a} - 5\vec{b}$ i vektor $\vec{a} - 4\vec{b}$ okomit na vektor $7\vec{a} - 2\vec{b}$, odredite kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Rješenje: $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$.

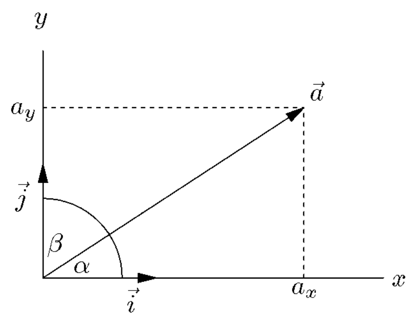
Zadatak 1.33. Odredite kut između jediničnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako se zna da su vektori $\vec{a} + 2\vec{b}$ i $5\vec{a} - 4\vec{b}$ međusobno okomiti.
Rješenje: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 1.34. Pokažite da se visine trokuta sijeku u jednoj točki (ortocentar).

Zadatak 1.35. Pokažite da su vektori $\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.

1.6.1 Kosinusi smjerova

Promatrajmo najprije vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \in X_0(M)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, u ravnini, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut α s pozitivnim smjerim osi x, a kut β s pozitivnim smjerom osi y.



Slika 1.18: Kosinusi smjerova

Očigledno je

$$\begin{aligned} a_1 &= a\cos\alpha, \\ a_2 &= a\cos\beta, \qquad (\text{odnosno zbog } \beta = \tfrac{\pi}{2} - \alpha, \quad a_2 = a\sin\alpha), \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta),$$

odnosno zbog (1.12)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Primijetite da je $\vec{a}\cdot\vec{i} = a\,\cos\alpha$, pa je $a_1 = \vec{a}\cdot\vec{i}$.

Neka je sada $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$ proizvoljni vektor u prostoru, koji u pravokutnom koordinatnom sustavu zatvara kut α s pozitivnim smjerom osi x, kut β s pozitivnim smjerom osi y i kut γ s pozitivnim smjerom osi z. Množeći redom vektor $\vec{a}$ s baznim vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ dobivamo

$$\vec{a}\cdot\vec{i} = a_1, \qquad \vec{a}\cdot\vec{j} = a_2, \qquad \vec{a}\cdot\vec{k} = a_3,$$

iz čega koristeći definiciju skalarnog produkta dobivamo

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a\cos\alpha \\ a_2 &= a\cos\beta \\ a_3 &= a\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \tfrac{a_1}{a} \\ \cos\beta &= \tfrac{a_2}{a} \\ \cos\gamma &= \tfrac{a_3}{a} \end{aligned}\right.$$

odnosno

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = 1. \tag{1.14}$$

1.6.2 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Skup uređenih n-torki realnih brojeva $\mathbb{R}^n$ možemo interpretirati kao točke u n dimenzionalnom prostoru ili kao radij-vektore. Za dvije uređene n-torke realnih brojeva $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ možemo definirati sljedeće računske operacije.

- Zbrajanje $+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

- Množenje sa skalarom $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n);$$

Provjerite da skup vektora $\mathbb{R}^n$ snabdjeven ovakvim zbrajanjem i množenjem sa skalarom ima strukturu vektorskog prostora.

U vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ možemo uvesti skalarni produkt $\langle , \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

čime vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postaje unitarni vektorski prostor.

Euklidska norma $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ vektora $x \in \mathbb{R}^n$ definira se kao

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Euklidsku udaljenost $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dviju točaka $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo kao,

$$d(a, b) = \|b - a\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

U ovom kontekstu Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost možemo zapisati na sljedeći način.

Teorem 1.6. *Za proizvoljne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $a, b \in \mathbb{R}^n$ linearno zavisni.

Zadatak 1.36. Direktno dokažite Teorem 1.6 i navedite njegovo geometrijsko značenje.

Zadatak 1.37. Primjenom Teorema 1.6 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.

Korolar 1.4. *(Hölderova nejednakost) Za proizvoljne vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$ takav da je $b = \lambda a$.

Zadatak 1.38. Primjenom Teorema 1.6 i Korolara 1.4 dokažite sljedeći korolar i navedite njegovo geometrijsko značenje.

Korolar 1.5. *(Nejednakost trokuta) Za proizvoljne točke $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

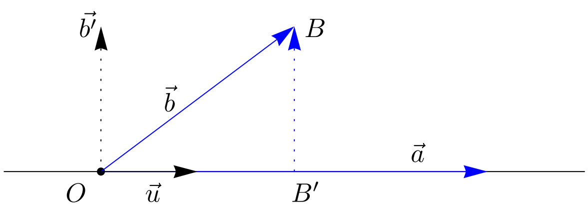
$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako postoji $\lambda \geq 0$ takav da je $b = \lambda a$.

1.7 Projekcija vektora na pravac i ravninu

1.7.1 Projekcija vektora na pravac

Na pravcu p izaberimo fiksnu točku O, vektor $\vec{a}$ i odgovarajući jedinični vektor $\vec{u}$. **Ortogonalnu projekciju** $\overrightarrow{OB'}$ vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ na pravac p dobit ćemo tako da ortogonalno proiciramo točku B na pravac p.



Slika 1.19: Projekcija vektora na pravac

Ako je vektor $\vec{b}$ linearno zavisan s vektorom $\vec{a}$, onda se projekcija vektora $\vec{b}$ podudara sa samim vektorom $\vec{b}$ i vrijedi $\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u}$.

Ako su vektori $\vec{b}$ i $\vec{a}$ linearno nezavisni, onda su vektori $\overrightarrow{OB'}$ i $\vec{u}$ kolinearni, pa postoji $\lambda \in R$, takav da bude

$$\overrightarrow{OB'} = \lambda\, \vec{u}.$$

Iz slike se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} \quad \text{odnosno} \\ &= \lambda\, \vec{u} + \overrightarrow{B'B}\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Množeći skalarno ovu jednakost s vektorom $\vec{u}$ i koristeći činjenicu da su vektori $\overrightarrow{B'B}$ i $\vec{u}$ međusobno okomiti, dobivamo

$$\lambda = \vec{b} \cdot \vec{u}.$$

Dakle, ortogonalna projekcija $\overrightarrow{OB'}$ vektora $\vec{b}$ na pravac p određen vektorom $\vec{a}$ zadana je s

$$\overrightarrow{OB'} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u}. \tag{1.16}$$

Primijetite da je vektor $\overrightarrow{B'B}$ okomit na pravac p, a da iz (1.15) slijedi

$$\vec{b'} := \overrightarrow{B'B} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u}. \tag{1.17}$$

Primijetite da ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ linearno nezavisni vektori, onda vrijedi

(i) $\vec{b'} \neq \vec{0}$,

(ii) $\vec{b'} \perp \vec{u}$,

(iii) $\vec{b'} \cdot \vec{b} > 0$, tj. kut između vektora $\vec{b'}$ i $\vec{b}$ je šiljasti.

Prve dvije tvrdnje lako se mogu provjeriti. Treća tvrdnja slijedi iz

$$\vec{b'} \cdot \vec{b} = b^2 - (\vec{b} \cdot \vec{u})^2 = b^2 \, \sin^2 \alpha,$$

gdje je α kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

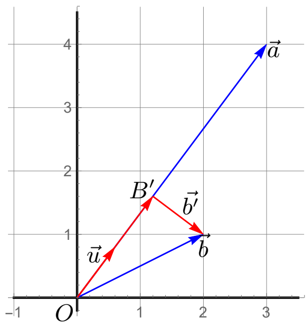
Drugi način dokaza tvrdnje može se pokazati i tako da jednadžbu (1.17) pomnožimo s $\vec{b'}$. Tada je $0 \leq \|\vec{b'}\|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b'}$, a zbog (i) $\vec{b} \cdot \vec{b'} > 0$.

Treći način dokaza tvrdnje može se pokazati i tako da jednadžbu (1.17) pomnožimo s $\vec{b}$ i iskoristimi `CSB` teorem. Naime, tada je

$$\vec{b'} \cdot \vec{b} = b^2 - (\vec{b} \cdot \vec{u})^2 \overset{\texttt{(CSB)}}{\geq} b^2 - b^2 = 0.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi stroga nejednakost.

Primjer 1.16. *Treba odrediti ortogonalnu projekciju vektora $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ na pravac određen vektorom $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.*



Slika 1.20: Projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac određen vektorom $\vec{a}$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\|\vec{a}\| = 5, && \vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \tfrac{3}{5}\vec{i} + \tfrac{4}{5}\vec{j} \\
&\vec{b} \cdot \vec{u} = 2, && \overrightarrow{OB'} = (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u} = 2\vec{u} = \tfrac{6}{5}\vec{i} + \tfrac{8}{5}\vec{j}, \\
&\vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\vec{u} = \tfrac{4}{5}\vec{i} - \tfrac{3}{5}\vec{j}.
\end{aligned}$$

Izračunajte $\|\overrightarrow{B'B}\|$.

Primjedba 1.9. *Neka je $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini M. Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(M)$ dva linearno nezavisna vektora, onda postoje ortonormirani vektori $\vec{u}, \vec{v} \in X_0(M)$,*

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \\
&\vec{v} = \tfrac{\vec{b'}}{\|\vec{b'}\|}, \quad \vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\, \vec{u},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

pri čemu vrijedi

(i) $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\, \vec{u}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{u} > 0,$

(ii) $\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{b}\cdot\vec{v})\,\vec{v}, \qquad \vec{b}\cdot\vec{v} > 0.$

Jednakost (i) slijedi iz (1.18) i činjenice da su $\vec{a}$ i $\vec{u}$ kolinearni vektori jednake orijentacije, pa je $\vec{a}\cdot\vec{u} = \|\vec{a}\|$. Osim toga vrijedi $\vec{a}\cdot\vec{u} = \|\vec{a}\| > 0$ jer $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Jednakost (ii) slijedi iz (1.18) i činjenice da $\vec{b'}$ možemo gledati kao projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{v}$. Nadalje, nejednakost $\vec{b}\cdot\vec{v} > 0$ slijedi iz (1.18) i

$$\vec{b}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{\|\vec{b'}\|}(\vec{b}\cdot\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})(\vec{b}\cdot\vec{u})) \overset{CSB}{>} \tfrac{1}{\|\vec{b'}\|}(\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\|\vec{u}\|^2) = 0,$$

jer su $\vec{b}$ i $\vec{u}$ linearno nezavisni. Istu nejednakost može se pokazati i tako da jednadžbu $\vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u}$ pomnožimo s $\vec{b'}$ i iskoristimo činjenicu da je $\vec{b'} \perp \vec{u}$.

Primjer 1.17. *Zadan je pravac p: $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ i točka T. Odredimo udaljenost točke T do pravca p i projekciju točke T na pravac p.*

Najprije ćemo pravac p napisati u normalnom obliku

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \alpha = \tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \beta = \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \gamma = \tfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Time je ujedno određen jedinični vektor $\vec{u} = -\beta\vec{i} + \alpha\vec{j}$ u smjeru pravca p. Dokažimo ovu tvrdnju. Neka su $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dvije različite točke na pravcu p. To znači da je

$$\alpha x_i + \beta y_i + \gamma = 0, \quad i = 1, 2.$$

Oduzimanjem ove prve od druge jednadžbe, dobivamo

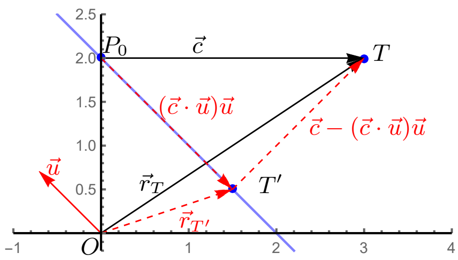
$$\alpha(x_2 - x_1) + \beta(y_2 - y_1) = 0.$$

To znači da je vektor $\vec{n} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ okomit na vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$. Zato je vektor $\vec{u} = -\beta\vec{i} + \alpha\vec{j}$ jedinični vektor u smjeru pravca p.

Nadalje, izaberimo proizvoljnu točku $P_0 = (x_0, y_0)$ na pravcu p tako da za $x_0 \in \mathbb{R}$ odredimo $y_0 = -\frac{(\alpha x_0 + \gamma)}{\beta}$. Označimo $\vec{c} := \vec{r}_T - \vec{r}_{P_0}$ i T' – projekcija točke T na pravac p.

Projekcija vektora $\vec{c}$ na pravac p zadana je s $(\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u}$, a vektor $\overrightarrow{T'T}$ s $\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u}$. Zato je udaljenost točke T do pravca p zadana s

$$d(T, p) = \|\overrightarrow{T'T}\|,$$



Slika 1.21: Udaljenost točke do pravca i projekcija točke na pravac.

a projekcija T' točke T na pravac p zadana je radijvektorom

$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_T - \overrightarrow{T'T}.$$

Primjerice za pravac $p : x + y - 2 = 0$ i točku $T = (3, 2)$ dobivamo $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Ako izaberemo $x_0 = 1$, dobivamo točku $P_0 = (1, 1)$ na pravcu i vektor $\vec{c} = \vec{r}_T - \vec{r}_{P_0} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Zato je $\overrightarrow{T'T} = \vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$; $\quad d_2(T, p) = \|\overrightarrow{T'T}\| = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $\vec{r}_{T_p} = \vec{r}_T - \overrightarrow{T'T} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; $\quad T_p = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. (Može se koristiti modul `Proj[]` iz `UdaljenostiProjekcija.nb`)

1.7.2 Projekcija vektora na ravninu

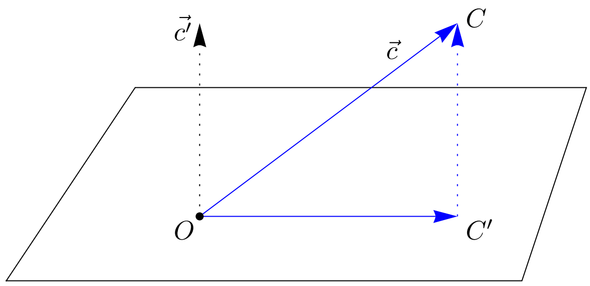
Slično kao u prethodnoj točki, u ravnini M izaberimo fiksnu točku O i dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}, \vec{b}$. Time smo u ravnini M uveli koordinatni sustav s baznim vektorima $\vec{a}, \vec{b}$. **Ortogonalnu projekciju** $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ na ravninu M dobit ćemo tako da ortogonalno projiciramo točku C na ravninu M.

Ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c}$ prikazat ćemo pomoću vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. U tu svrhu prema *Primjedbi 1.9* od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ načinit ćemo novu ortonormiranu bazu $\vec{u}$, $\vec{v}$. Vektor $\overrightarrow{OC'}$ prikažimo kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\overrightarrow{OC'} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Iz slike se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C} \quad \text{odnosno} \\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \overrightarrow{C'C}. \end{aligned} \tag{1.19}$$



Slika 1.22: Projekcija vektora na ravninu

Množeći skalarno ovu jednakost redom s vektorima $\vec{u}$, $\vec{v}$ i koristeći činjenicu da je vektor $\overrightarrow{C'C}$ okomit na vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$, dobivamo

$$\alpha = \vec{c} \cdot \vec{u} \qquad \beta = \vec{c} \cdot \vec{v}.$$

Dakle, ortogonalna projekcija $\overrightarrow{OC'}$ vektora $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ na ravninu M može se odrediti iz formule

$$\overrightarrow{OC'} = (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{c} \cdot \vec{v})\vec{v}. \tag{1.20}$$

Primijetite da je vektor $\overrightarrow{C'C}$ okomit na ravninu M, a da iz (1.19) slijedi

$$\vec{c'} = \overrightarrow{C'C} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} - (\vec{c} \cdot \vec{v})\vec{v}. \tag{1.21}$$

Slično kao u prethodnoj točki, ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X_0(E)$ linearno nezavisni vektori, onda vrijedi

(i) $\vec{c'} \neq \vec{0}$,

(ii) $\vec{c'} \perp \vec{u} \quad \& \quad \vec{c'} \perp \vec{v}$,

(iii) $\vec{c'} \cdot \vec{c} > 0$, tj. kut između vektora $\vec{c'}$ i $\vec{c}$ je šiljasti.

U cilju dokaza tvrdnje (iii) množeći (1.21) s $\vec{c'}$, dobivamo

$$\vec{c'} \cdot \vec{c} \overset{(ii)}{=} \|\vec{c'}\|^2 \overset{(i)}{>} 0.$$

Primjer 1.18. *Odredimo ortogonalnu projekciju vektora* $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ *na ravninu određenu vektorima* $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$.

Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&\|\vec{a}\| = \sqrt{5}, \qquad \vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \tfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} \\
&\vec{b}' = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} = -\tfrac{6}{5}\vec{i} + \tfrac{12}{5}\vec{j} \\
&\|\vec{b}'\| = \tfrac{6}{\sqrt{5}}, \qquad \vec{v} = \tfrac{\vec{b}'}{\|\vec{b}'\|} = -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \\
&\overrightarrow{OD'} = (\vec{d}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{d}\cdot\vec{v})\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}.
\end{aligned}
$$

Primjedba 1.10. *Neka je $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru. Na osnovi razmatranja u prethodnoj točki možemo ustanoviti da je za dani skup linearno nezavisnih vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in X_0(E)$ moguće definirati ortonormiranu bazu $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ u X_0, gdje je*

$$
\begin{aligned}
&\vec{u} = \tfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \\
&\vec{v} = \tfrac{\vec{b}'}{\|\vec{b}'\|}, \quad \vec{b}' = \vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u}, \\
&\vec{w} = \tfrac{\vec{c}'}{\|\vec{c}'\|}, \quad \vec{c}' = \vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{c}\cdot\vec{v})\vec{v}.
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Zbog toga i vektore $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ možemo prikazati u bazi $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, pri čemu su kutevi između vektora $\angle(\vec{a},\vec{u})$, $\angle(\vec{b},\vec{v})$, $\angle(\vec{c},\vec{w})$ šiljasti i vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{u})\,\vec{u}, && (\vec{a}\cdot\vec{u}) > 0 \\
&\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{b}\cdot\vec{v})\,\vec{v}, && (\vec{b}\cdot\vec{v}) > 0 \\
&\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{u})\,\vec{u} + (\vec{c}\cdot\vec{v})\,\vec{v} + (\vec{c}\cdot\vec{w})\,\vec{w}, && (\vec{c}\cdot\vec{w}) > 0.
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

Prva formula u (1.23) *slijedi iz prve formule u* (1.22) *i činjenice da su $\vec{a}$ i $\vec{u}$ kolinearni vektori jednake orijentacije, zbog čega je*

$$(\vec{a}\cdot\vec{u}) = \|\vec{a}\| > 0.$$

Druga formula u (1.23) *slijedi iz druge formule u* (1.22) *i činjenice da je $\vec{b}'$ projekcija vektora $\vec{b}$ na u smjeru vektora $\vec{v}$. Nadalje,*

$$\vec{b}\cdot\vec{v} = \vec{b}'\cdot\vec{v} = \|\vec{b}'\| > 0.$$

Treća formula u (1.23) slijedi iz treće formule u (1.22) i činjenice da je $\vec{c}'$ projekcija vektora $\vec{c}$ u smjeru vektora $\vec{w}$. Osm toga,

$$\vec{c}\cdot\vec{w} = \vec{c}\cdot\frac{\vec{c}'}{\|\vec{c}'\|} = \frac{1}{\|\vec{c}'\|}\vec{c}\cdot\vec{c}' \overset{(iii)}{>} 0.$$

Drugu mogućnost za dokaz tvrdnje dobivamo iz (1.22)*:*

$$0 < \|\vec{c'}\|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c'} = \vec{c} \cdot (\vec{c} \cdot \vec{w})\vec{w} = (\vec{c} \cdot \vec{w})^2$$

U programskom sustavu *Mathematica* načinit ćemo modul $GS[a,b,c]$ koji će prethodno opisanim Gram – Schmidtovim postupkom ortogonalizacije od zadanih linearno nezavisnih vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sagraditi ortonormirani sustav $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

```
In[1]:= GS[a_, b_, c_]:= Module[{u, v, w},
                          u = a/Norm[a];
                             v = b - (b . u) u; v = v/Norm[v];
                                w = c - (c . u) u - (c . v) v;
                                w = w/Norm[w];
                          {u, v, w}]
```

Tako primjerice za vektore

$$\vec{a} = 2\vec{i}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

modul GS daje

$$\vec{u} = \vec{i}, \quad \vec{v} = \vec{j}, \quad \vec{w} = \vec{k},$$

a za vektore

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{b} = 6\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{c} = 2\vec{j} + 4\vec{k},$$

modul GS daje

$$\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}, \quad \vec{v} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}, \quad \vec{w} = \vec{k}.$$

1.8 Gram – Schmidtov postupak ortogonalizacije u $\mathbb{R}^n$

Neka je $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ skup linearno nezavisnih vektora. Tada postoje ortonormirani vektori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \tfrac{a_1}{\|a_1\|}, & & \\
v_2 &= \tfrac{v_2'}{\|v_2'\|}, & v_2' &= a_2 - \langle a_2, v_1\rangle v_1 \\
v_3 &= \tfrac{v_3'}{\|v_3'\|}, & v_3' &= a_3 - \langle a_3, v_1\rangle v_1 - \langle a_3, v_2\rangle v_2 \\
&\ldots & & \\
v_k &= \tfrac{v_k'}{\|v_k'\|}, & v_k' &= a_k - \langle a_k, v_1\rangle v_1 - \cdots - \langle a_k, v_{k-1}\rangle v_{k-1}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Pri tome vrijedi

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \langle a_1, v_1\rangle v_1, \quad \langle a_1, v_1\rangle > 0 \quad \text{[jer je } \langle a_1, v_1\rangle = \langle a_1, \tfrac{a_1}{\|a_1\|}\rangle = \|a_1\| > 0] \\
a_2 &= \langle a_2, v_1\rangle v_1 + \langle a_2, v_2\rangle v_2, \quad \langle a_2, v_2\rangle > 0 \quad \text{[jer je } \langle a_2, v_2\rangle = \tfrac{1}{\|v_2'\|}(\langle a_2, a_2\rangle - 0) > 0] \\
a_3 &= \langle a_3, v_1\rangle v_1 + \langle a_3, v_2\rangle v_2 + \langle a_3, v_3\rangle v_3, \quad \langle a_3, v_3\rangle > 0 \\
\ldots \\
a_k &= \langle a_k, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle a_k, v_k\rangle v_k, \quad \langle a_k, v_k\rangle > 0
\end{aligned}
$$

Sljedeći *Mathematica*-program ortonormira $k \leq n$ vektora $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$.

```
In[1]:= GSn[A_, eps_] := Module[{v = Table[0, {j, Length[A]}]},
                            v[[1]] = A[[1]]/Norm[A[[1]]];
                            Do[
                                v[[j]] = A[[j]] - Sum[(A[[j]].v[[s]]) v[[s]], {s,j-1}];
                                v[[j]] = v[[j]]/Norm[v[[j]]] // N;
                         , {j, Length[A]}];
                         Round[v, -eps]]                        ]
```

Primjer 1.19. *Za vektore* $a_1 = (6, 7, 7, 2, 6)$*,* $a_2 = (0, 2, 1, 5, -6)$*,* $a_3 = (3, 1, 5, 3, -4)$*,* $a_4 = (-7, 1, -5, 7, -5)$ *primjenom modula* ***GSn*** *odredit ćemo ortonormirane vektore s točnošću na 2 decimale.*

Stavimo $k = 4$; eps=.005; $A = Table[a[[i]], \{i, k\}]$ i dobivamo

`GSn[A,eps]=`

{{0.455, 0.53, 0.53, 0.15, 0.455}, {0.02, 0.27, 0.15, 0.625, -0.72},
{0.355, -0.565, 0.61, -0.275, -0.32}, {-0.575, -0.365, 0.405, 0.495, 0.36}}

Poglavlje 6

Dodatak

Neke važne matematičke pojmove, kao što su „pojam nužno i dovoljno”, „princip kontradikcije” i „univerzalni i egzistencijalni kvantifikator”, a koje ćemo često koristiti, pokušat ćemo objasniti na nekoliko jednostavnih primjera.

6.1 Egzistencijalni i univerzalni kvantifikator

Egzistencijalni kvantifikator ($\exists$) čitamo „postoji barem jedan” ili češće samo „postoji”. Primjerice, činjenicu da postoji prirodan broj $p > 1$ koji dijeli broj 9 pišemo: $(\exists p \in \mathbb{N})\ p|9$.

Univerzalni kvantifikator ($\forall$) čitamo „za svaki” ili češće samo „svaki”. Primjerice, ako s $\mathcal{P}$ označimo skup svih prim-brojeva, a s $\mathcal{Q}$ skup svih složenih brojeva, onda vrijedi $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \{1\}$, a činjenicu da je svaki složeni broj $q > 1$ djeljiv s barem jednim prim-brojem pišemo: $(\forall q \in \mathcal{Q})\ (\exists p \in \mathcal{P})\ p|q$.

6.2 Nužni i dovoljni uvjeti

Primjer 6.1. *Iz osnovne škole poznata nam je definicija četverokuta:*
Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki četverokut bio kvadrat*?*

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu sve četiri stranice jednako dugačke. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki romb kvadrat.

Da bi neki četverokut bio kvadrat nužno je da su mu kutevi pravi. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i svaki pravokutnik kvadrat.

Sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat je:

(i) sve njegove stranice jedanako su dugačke;

(ii) svi njegovi kutevi su pravi.

Zato kažemo:

Četverokut je kvadrat onda i samo onda ako su sve njegove stranice jednako dugačke i ako su svi njegovi kutevi pravi.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan", ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat? Pokušajete definirati neki drugi sustav nužnih i dovoljnih uvjeta da bi neki četverokut bio kvadrat.

Primjer 6.2. *Iz srednje škole poznata nam je definicija prim-broja (prostog broja):*

Prosti brojevi ili prim-brojevi su svi prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a strogo su veći od broja 1.

Što su nužni i dovoljni uvjeti da bi neki prirodni broj bio prim-broj*?*

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka s brojem 1. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 8 prim-broj.

Da bi neki prirodni broj bio prim-broj nužno je da je djeljiv bez ostatka sam sa sobom. Je li to i dovoljno? Nije, jer bi to značilo da je i broj 4 prim-broj.

Nužni i dovoljni uvjeti da bi prirodni broj $p \in \mathbb{N}$ bio prim-broj su:

(i) broj p djeljiv je bez ostatka s 1;

(ii) broj p djeljiv je bez ostatka sam sa sobom;

(iii) broj p nije djeljiv bez ostatka ni s jednim drugim prirodnim brojem;

(iv) $p > 1$.

Zato kažemo:

Prirodni broj $p > 1$ je prim-broj onda i samo onda ako je djeljiv samo s 1 i sam sa sobom.

Svaki od navedenih uvjeta je „nužan”, ali ne i dovoljan. Je li navedeni sustav uvjeta jedini sustav nužnih i dovoljnih uvjeta koji određuje skup prim-brojeva?

6.3 Princip kontradikcije

Princip kontradikcije zasniva se na Aristotelovom principu isključenja trećeg: „Neka tvrdnja je istinita ili lažna, a treća mogućnost ne postoji”.

Primjer 6.3. *U prostoriji se nalazi 400 studenata.*

Tvrdnja T: *Barem dva studenta imaju na isti dan rođendan.*

Tvrdnja $\overline{T}$: *Svi studenti imaju rođendan na različite datume.*

Budući da godina ima 365 (ili eventualno 366) dana, tvrdnja $\overline{T}$ *nije istinita. Zato je prema principu kontradikcije tvrdnja* T *istinita.*

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1999.

[3] J. S. Golan, *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*, Dordrecht : Kluwer, 2004.

[4] L. Hogben, *Handbook of Linear Algebra*, Boca Raton : Chapman & Hall, 2007.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017, `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=707`.

[6] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.

[7] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[8] R. E. Larson, R. P. Hostetler, *Calculus With Analytic Geometry* ., Heath and Company, Lexington : D. C., 1982.

[9] L. Leithold, *The Calculus With Analytic Geometry : Part 1*, Harper & Row, New York, 1976.

[10] S. Lipschitz, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.

[11] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[12] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. B. ckensdörfer Ehlers, K. Schelkes, *Analysis 1, 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[13] R. Scitovski, M. B. Alić, *Grupiranje podataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016, `http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/ASP-2016.pdf`.

[14] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America, 2004.

[15] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[16] E. B. Vinber, *A Course in Algebra*, Providence : American Mathematical Society, 2003.

[17] Š. Ungar, *Ne baš tako kratak Uvod u TEXs naglaskom na pdfLATEX*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2019, http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=798.

[18] F. Zhang, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.