Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Dragan Jukić, Rudolf Scitovski

M A T E M A T I K A I

(PREPRAVLJENO IZDANJE)

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Dragan Jukić, Rudolf Scitovski

M A T E M A T I K A I

(PREPRAVLJENO IZDANJE)

Osijek, 2017.

Dr. Dragan Jukić
Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku
Trg Lj. Gaja 6
HR-31 000 Osijek
e-mail: jukicd@mathos.hr

Dr. Rudolf Scitovski
Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku
Trg Lj. Gaja 6
HR-31 000 Osijek
e-mail: scitowsk@mathos.hr

Recenzenti:

Prof. dr. sc. Davor Butković
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku
Prof. dr. sc. Šime Ungar
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku

Lektorica:

Ivanka Ferčec
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 140804058

ISBN 978-953-6032-18-1

Ovaj udžbenik objavljuje se uz suglasnost Senata Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku pod brojem 21/17.

Tisak: STUDIO HS Internet d.o.o., Osijek

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik temelji se na predavanjima koje smo posljednjih godina držali na prvoj godini tehničkih fakulteta *Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku*, kao i na pristupu sličnih udžbenika kod nas, ali i na pristupu više udžbenika zapadnoeuropskih i američkih sveučilišta navedenih u popisu literature. Pri tome nastojali smo napraviti cjeloviti materijal, koji se odnosi na funkcije, diferencijalni račun i linearnu algebru, ali tako da pristup svim važnijim pojmovima bude maksimalno pojednostavljen. Dokazani su samo jednostavniji teoremi, a za složenije dokaze preporučena je odgovarajuća postojeća literatura na hrvatskom jeziku. Neki važni, a složeniji pojmovi dani su u *Dodatku* na kraju knjge.

Svi pojmovi objašnjavaju se na brojnim primjerima, ilustracijama i zadacima, pa će korištenjem ove knjige i slabiji studenti, kao i oni koji su orijentirani na samostalan rad, moći uspješno savladati predviđeno gradivo. Sve važne definicije, teoremi i korolari istaknuti su u tekstu plavom bojom. Pri tome posebno su navedene i numerirane *Primjedbe*, koje pobliže objašnjavaju neki pojam ili daju njegovo proširenje.

Udžbenik sadržava ukupno 264 primjera, 202 slike i 482 zadatka. Većina zadataka su elementarni i prate osnovni tekst, a njihova rješenja, često ilustrirana odgovarajućom slikom, dana su na kraju knjige. Uz rješenja dane su i upute za rješavanje složenijih zadataka, koji su u funkciji proširenja znanja iz nekih područja, a koji se studentima mogu davati kao seminarski radovi.

Oznaka svakog poglavlja, kao i svakog pripadnog elemenata (definicija, teorem, korolar, formula, primjedba, primjer, zadatak) počinje s jednim ili dva velika štampana slova, koja aludiraju na naziv poglavlja.

Na kraju knjige nalazi se indeks osnovnih pojmova.[1]

Zahvaljujemo se recenzentima Davoru Butkoviću i Šimi Ungaru na korisnim sugestijama i prijedlozima u cilju pojednostavljivanja i popravljanja teksta. Također, zahvaljujemo se Alfonsu Baumgartneru za unos većeg dijela teksta u LaTeX-u, Ivanu Soldi za postavljanje i izradu nove verzije teksta i slika te Snježani Majstorović i Tomislavu Maroševiću za korekciju cijelog teksta.

Osijek, 29. rujna 2017.

Dragan Jukić
Rudolf Scitovski

[1] Za elektronsko pregledavanje udžbenika Adobe Readerom možete koristiti sljedeće pogodnosti:

- klikom na naslov nekog poglavlja u *Sadržaju* dolazite na to poglavlje. Povratak na isto mjesto odakle ste krenuli omogućuje se držanjem tipke Alt pa nakon toga pritiskom tipke <;
- klikom na oznaku nekog teorema, leme, definicije, slike, tablice, primjedbe, primjera ili zadatka u tekstu odlazite na taj objekt. Povratak je na prethodno opisani način;
- klikom na oznaku neke reference u tekstu odlazite na tu referencu u *Literaturi* na kraju knjige. Povratak je na prethodno opisani način;
- klikom na oznaku stranice u *Indeksu* na kraju knjige odlazite na taj pojam u knjizi. Povratak je na prethodno opisani način.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod: pripremni materijal

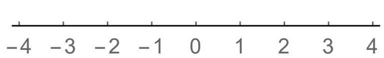
U ovom poglavlju navest ćemo neke osnovne matematičke pojmove koji se koriste u daljnjem tekstu, a za koje se inače pretpostavlja da su čitatelju poznati iz srednje škole.

1.1 Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

Prirodni brojevi. S prirodnim brojevima $1, 2, 3, \ldots$ upoznali smo se u ranom djetinjstvu. Skup svih prirodnih brojeva označavamo s $\mathbb{N}$. Prirodne brojeve znamo zbrajati i množiti, a rezultat tih računskih operacija opet je prirodan broj pa kažemo da je skup $\mathbb{N}$ **zatvoren** s obzirom na te dvije operacije.

Cijeli brojevi. Kao što znamo, razlika dvaju prirodnih brojeva ne mora biti prirodan broj. Zbog toga se uvode 0 (*nula*) i negativni prirodni brojevi: $-1, -2, -3, \ldots$. Brojeve $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ nazivamo **cijelim brojevima,** a skup svih cijelih brojeva označavamo sa $\mathbb{Z}$, tj. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Cijeli se brojevi mogu prikazati na pravcu pomoću pravilno raspoređenih točaka, kao na slici.



Slika 1.1

Uočimo da je skup $\mathbb{Z}$ zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja.

Racionalni brojevi. Kao što znamo, jednadžba $ax = b$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z}$, nema uvijek rješenje u skupu $\mathbb{Z}$. Zbog toga se skup $\mathbb{Z}$ proširuje skupom racionalnih brojeva. Skup svih racionalnih brojeva označava se s $\mathbb{Q}$ i definira na sljedeći način: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Cijeli broj m može se reprezentirati razlomkom $\frac{m}{1}$, pa racionalni brojevi sadrže cijele, a ovi prirodne brojeve, tj. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Racionalni brojevi se zbrajaju i množe prema formulama:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Primjer 1.1. *Pokažimo da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj:*
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, takvi da je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ i da je njihova najveća zajednička mjera 1 (pišemo $M(m,n) = 1$). Kvadriranjem dobivamo $2n^2 = m^2$, odakle zaključujemo da je m^2 pa i m paran broj. To znači da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. Sada imamo

$$2n^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad 2n^2 = (2k)^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2k^2,$$

odakle zaključujemo da su n^2 i n parni brojevi. Dakle, m i n su parni brojevi pa prema tome djeljivi s 2, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je $M(m,n) = 1$. Prema tome, $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Iracionalni brojevi. Jednostavni primjeri kao što je primjerice duljina dijagonale kvadrata sa stranicom 1 govore nam da postoje brojevi koji nisu racionalni. To su **iracionalni brojevi**. Skup svih iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{I}$.

Osim broja $\sqrt{2}$ također su nam dobro poznati i iracionalni brojevi $\pi = 3.14159265\ldots$ i $e = 2.718281828459\ldots$.

Realni brojevi. Racionalne i iracionalne brojeve nazivamo zajedno **realni brojevi** i označavamo s $\mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Osim toga je $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ i $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

U skupu realnih brojeva definirane su operacije zbrajanje $(+)$ i množenje $(\cdot)$, tj. za svaka dva realna broja x i y jednoznačno su određeni realni brojevi $x + y$ i $x \cdot y$. Te operacije imaju sljedeća svojstva:

(A1) Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x+y)+z = x+(y+z)$ (*zakon asocijacije za zbrajanje*).

(A2) Postoji samo jedan realan broj $0 \in \mathbb{R}$ (neutralni element za zbrajanje-**nula**) takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + 0 = 0 + x = x$.

(A3) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji samo jedan $-x \in \mathbb{R}$ (inverzni element s obzirom na zbrajanje) takav da je $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(A4) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + y = y + x$ (*zakon komutacije za zbrajanje*).

(A5) Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(xy)z = x(yz)$ (*zakon asocijacije za množenje*).

(A6) Postoji samo jedan realan broj $1 \in \mathbb{R}$ (neutralni element za množenje-**jedan**) takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

(A7) Za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, postoji jedinstven element $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ (inverzni element za množenje) takav da je $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

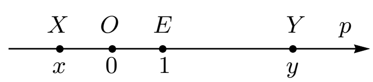
(A8) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $xy = yx$ (*zakon komutacije za množenje*).

(A9) Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $x(y + z) = xy + xz$ (*zakon distribucije množenja prema zbrajanju*).

Primjedba 1.1. *Općenito, svaku uređenu trojku* $(S, +, \cdot)$ *koju čine proizvoljan neprazan skup* S*, binarne operacije* $(+)$ *i* $(\cdot)$ *koje imaju prethodnih devet svojstava nazivamo* **polje**.

Sva navedena svojstva ima i skup $\mathbb{Q}$*, tj. skup racionalnih brojeva je polje. Skupovi* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z}$ *s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja nisu polja.*

Brojevni pravac. Na pravcu p odaberimo točku O. Na taj način pravac p podijeljen je na tri dijela: na skup točaka koje su lijevo od O, točku O i na skup točaka koje se nalaze desno od O. To je slično kao što je skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva podijeljen na skup $\mathbb{R}_-$ strogo negativnih realnih brojeva, nulu i skup $\mathbb{R}_+$ strogo pozitivnih realnih brojeva. Ta analogija omogućava nam smještanje skupa $\mathbb{R}$ na pravac p. U tu svrhu, desno od točke O odaberimo bilo koju točku $E \in p$. Točki O pridružimo realan broj 0, a točki E broj 1.



Slika 1.2

Svakoj točki $Y \in p$ koja se nalazi desno od točke O pridružimo strogo pozitivan realan broj y takav da je $|\overline{OY}| = y\,|\overline{OE}|$. Na sličan način, točki $X \in p$ koja se nalazi lijevo od točke O pridružimo strogo negativan realan broj x takav da je $|\overline{OX}| = -x\,|\overline{OE}|$. Tako je uspostavljena bijekcija između skupa svih točaka pravca p i skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Pravac p kome su ovako pridruženi realni brojevi zovemo **brojevni pravac**. Strelicu na desni kraj pravca stavljamo samo iz razloga da se istaknu pozitivni realni brojevi.

Uređaj na $\mathbb{R}$. Bilo koja dva realna broja možemo usporediti. Realan broj x je manji od realnog broja y (pišemo $x < y$ ili $y > x$) onda i samo onda ako se na brojevnom pravcu x nalazi lijevo od y. Ako je ili $x < y$ ili $x = y$, pišemo $x \leq y$. Relacija uređaja „$\leq$" ima sljedeća svojstva:

(A10) Za bilo koja dva realna broja $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.

(A11) $x \leq y$ i $y \leq x$, onda i samo onda ako je $x = y$.

(A12) Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$ (tranzitivnost).

Nadalje, relacija uređaja je u harmoniji sa zbrajanjem i množenjem, tj. vrijedi

(A13) Ako je $x \leq y$, onda za svaki $z \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + z \leq y + z$.

(A14) $(0 \leq x \text{ i } 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy$.

Kažemo da je neprazan skup S **uređeno polje** kad god operacije zbrajanja $(+)$ i množenja $(\cdot)$ imaju prethodno navedenih 14 svojstava. Primijetite da je i skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva uređeno polje s obzirom na uobičajeno zbrajanje i množenje, dok skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu.

1.1.1 Intervali

Često upotrebljavani skupovi u matematičkoj analizi jesu intervali. To su skupovi realnih brojeva koji imaju svojstvo da njihovi elementi zadovoljavaju određene nejednakosti.

Otvoreni interval realnih brojeva (a, b), određen s dva realna broja a, b, $a < b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, tj.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Zatvoreni interval ili **segment** realnih brojeva $[a, b]$, određen s dva realna broja a, b, $a \leq b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leq x \leq b$, tj.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

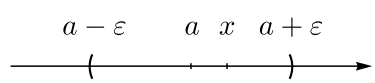
Pored otvorenih i zatvorenih intervala definiraju se **poluotvoreni intervali**

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \qquad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

i **beskonačni intervali**

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}. \end{aligned}$$

Otvorenom okolinom realnog broja a nazivamo svaki otvoreni interval realnih brojeva koji sadrži broj a. **Simetrična otvorena okolina** realnog broja a je otvoreni interval kojemu je a sredina (*Slika 1.3*). Sve simetrične okoline broja a su oblika $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, i nazivamo ih ε-**okolinama** broja a. Duljina ε-okoline je 2ε. Zamijetite da realan broj x pripada ε-okolini broja a onda i samo onda ako je $|x - a| < \varepsilon$.



Slika 1.3

1.1.2 Supremum i infimum

Definicija 1. *Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$* odozgo omeđen *ili* ograničen*, ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in S$. Svaki broj M s navedenim svojstvom nazivamo* gornja međa *ili* majoranta *skupa S. Ako skup S nije odozgo omeđen, kažemo da je* odozgo neomeđen.

Kažemo da je skup $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen *ili* ograničen*, ako postoji realan broj m takav da je $x \geq m$ za svaki $x \in S$. Svaki broj m s* *navedenim svojstvom nazivamo* donja međa *ili* minoranta *skupa S. Ako skup S nije odozdo omeđen, kažemo da je* odozdo neomeđen.

Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen, *ako je i odozgo i odozdo omeđen. U protivnom se kaže da je S* neomeđen.

Primjer 1.2. *Skup $\mathbb{N}$ svih prirodnih brojeva nije odozgo omeđen jer za svaki realan broj M postoji prirodan broj veći od M. Skup $\mathbb{N}$ je omeđen odozdo; za minorantu je dovoljno uzeti bilo koji realan broj manji ili jednak jedan.*

Primjer 1.3. *Skupovi (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ su omeđeni, dok su skupovi $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ omeđeni samo odozgo, a skupovi (a,∞), $[a,\infty)$ samo odozdo.*

Primjer 1.4. *Skup $S = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ je omeđen i odozdo (primjerice s 0) i odozgo (primjerice s 1). Skup $B = \left\{\frac{1}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}$ također je omeđen i odozdo (primjerice s 0) i odozgo (primjerice s 1).*

Svaki odozgo omeđen skup S ima više majoranti, pa se postavlja pitanje egzistencije najmanje majorante skupa S. Analogno se može postaviti i pitanje egzistencije najveće minorante odozdo omeđenog skupa.

Definicija 2. *Najmanju majorantu skupa S nazivamo* supremum *i označavamo sa $\sup S$. Ako je $\sup S \in S$, nazivamo ga* maksimalnim *elementom skupa S i označavamo s $\max S$.*

Najveću minorantu skupa S nazivamo infimum *i označavamo s $\inf S$. Ako je $\inf S \in S$, nazivamo ga* minimalnim *elementom skupa S i označavamo s $\min S$.*

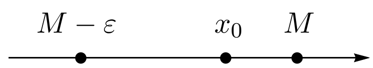
Skup $\mathbb{R}$ ima sljedeće važno svojstvo:

(A15) Svaki odozgo omeđen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum, a svaki odozdo omeđen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima infimum.

Primjedba 1.2. *Primijetimo:*

(i) M je supremum skupa S onda i samo onda ako je M majoranta od S i ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0 \leq M$ (vidi Sliku 1.4),

(ii) *m je infimum skupa S onda i samo onda ako je m minoranta od S i ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $m + \varepsilon > x_0 \geq m$.*



Slika 1.4: Supremum skupa S

Primjer 1.5. $\sup(a, b) = b \notin (a, b)$, $\inf(a, b) = a \notin (a, b)$, $\sup[a, b] = b = \max[a, b]$, $\inf[a, b] = a = \min[a, b]$.

Iz prethodnog primjera se vidi da $\sup S$ i $\inf S$ mogu, ali i ne moraju pripadati skupu S.

Primjer 1.6. *Skup S iz* Primjera 1.4 *je omeđen i* $\inf S = \frac{1}{2}$, $\sup S = 1$. *Kako je $\frac{1}{2} \in S$, onda je $\frac{1}{2}$ ujedno i minimalni element skupa S. Skup S nema maksimalni element. Načinite sličnu analizu skupa B iz istog primjera.*

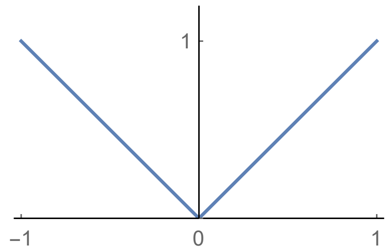
Zadatak 1.1. *Pokažite da vrijedi:*

a) $\max\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$, *b)* $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0 \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
c) $\max\{\sin x : x \in \mathbb{R}\} = 1$, *d)* $\min\{\sin x : x \in \mathbb{R}\} = -1$,
e) $\max\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}$, *f)* $\min\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} = -\sqrt{2}$.

1.2 Apsolutna vrijednost realnog broja

Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}$ definira se **apsolutna vrijednost** $|x|$ broja x formulom:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Slika 1.5: *Graf funkcije $x \mapsto |x|$*

Primjedba 1.3. *Graf funkcije $x \mapsto |x|$ prikazan je na Slici 2.5. Geometrijski, $|x|$ znači udaljenost točke na brojevnom pravcu, koja predstavlja realan broj x, od ishodišta (vidi Sliku 1.6).*

(a) $x < 0$ (b) $x > 0$

Slika 1.6

Iz definicije apsolutne vrijednosti vidi se da je $|-x| = |x|$ i $x \leq |x|$. Nadalje, uočimo da je $|x| = \sqrt{x^2}$.

Pomoću jednakosti $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, lako je provjeriti sljedeća svojstva apsolutne vrijednosti:

1) $|xy| = |x||y|$,
2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$,
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
4) $|x - y| \leq |x| + |y|$,
5) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, $a > 0$,
6) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Ilustracije radi, pokažimo treće svojstvo apsolutne vrijednosti, koje je poznato pod nazivom **nejednakost trokuta**:

$$\begin{aligned} |x+y| &= \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2|x||y| + y^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} \\ &= |x| + |y|. \end{aligned}$$

Zadatak 1.2. *Dokažite preostala svojstva apsolutne vrijednosti.*

Primjer 1.7. *Riješimo jednadžbu $|3x - 1| = 2x + 5$.*

a) za $3x - 1 \geq 0$ vrijedi
$3x - 1 = 2x + 5$,
$x = 6$.

b) za $3x - 1 < 0$ vrijedi
$1 - 3x = 2x + 5$,
$x = -\frac{4}{5}$.

Primjer 1.8. *Riješimo nejednadžbu* $|3x-1| < 2x+5$.
Zamijetite da mora biti $2x+5>0$. *Pomoću svojstva 5 dobivamo*

$$|3x-1| < 2x+5 \Leftrightarrow -2x-5 < 3x-1 < 2x+5 \Leftrightarrow -4 < 5x \text{ i } x < 6 \Leftrightarrow x \in \left(-\tfrac{4}{5}, 6\right).$$

Zadatak 1.3. *Riješite jednadžbe i nejednadžbe:*

a) $|x+1| = 3x-9$, *b)* $|x-1| = 3x-9$,

c) $|3x+1| < 2x+5$, *d)* $|3x+1| > 2x+5$.

Zadatak 1.4. *Pokažite da vrijedi:*

a) $x \in [2,4] \Rightarrow 2x+3 \in [7,11]$, *b)* $x \in [2,4] \Rightarrow \dfrac{1}{2x+3} \in [1/11, 1/7]$,

c) $x-5 \in [-2,2] \Rightarrow x \in [3,7]$, *d)* $x \in [x_0-a, x_0+a] \Leftrightarrow |x-x_0| \le a$,

e) $|x-3| < 1 \Rightarrow 6 < x+4 < 8$, *f)* $|x-3| < 1 \Rightarrow 1/8 < 1/(x+4) < 1/6$,

g) $|x-1| < 2 \Rightarrow 0 < |2x-3| < 5$, *h)* $|x-1| < 1 \Rightarrow x \in (-1,3)$.

Pogreške. Pri mjerenju neke veličine dolazi do pogrešaka zbog nesavršenosti mjernih instrumenata i naših osjetila.

Neka je a stvarna (prava) vrijednost neke veličine, a $a^\star$ njezina aproksimacija (približna vrijednost). Razliku $(a-a^\star)$ nazivamo **pogreška aproksimacije**. Apsolutnu vrijednost pogreške aproksimacije nazivamo **apsolutna pogreška aproksimacije** i označavamo s

$$\Delta a^\star = |a-a^\star|.$$

Primjer 1.9. $a^\star = 1.412$ *je aproksimacija broja* $a=\sqrt{2}$ *s apsolutnom pogreškom aproksimacije* $\Delta a^\star = |\sqrt{2}-1.412| < 0.00222$.

Ako je $|a-a^\star| \le \varepsilon$, onda vrijedi:

$$-\varepsilon \le a-a^\star \le \varepsilon \Rightarrow a^\star-\varepsilon \le a \le a^\star+\varepsilon,$$

pa često, naročito u thenici, pišemo $a = a^\star \pm \varepsilon$.

Omjer između apsolutne pogreške $\Delta a^\star$ i apsolutne vrijednosti $|a^\star|$ aproksimacije $a^\star$ ($a^\star \neq 0$) nazivamo **relativna pogreška aproksimacije** i označavamo s $\delta a^\star$, tj.

$$\delta a^\star = \frac{\Delta a^\star}{|a^\star|}.$$

Ako relativnu pogrešku pomnožimo sa 100 dobivamo relativnu pogrešku u postocima.

Primjer 1.10. *Lako se može provjeriti da relativna pogreška u prethodnom primjeru iznosi* $\delta a^\star \approx 0.002$ *odnosno* 0.2%.

1.3 Matematička indukcija

Talijanski matematičar G. Peano (1858 – 1931) izložio je 1889. godine sustav aksioma koji u cijelosti karakterizira i omogućava aksiomatsku izgradnju algebre skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Mi navodimo samo jedan aksiom, poznat pod nazivom **princip matematičke** ili **potpune indukcije**:

> *Neka* $M \subseteq \mathbb{N}$ *podskup od* $\mathbb{N}$ *s ova dva svojstva:*
>
> *(i)* $1 \in M$
>
> *(ii)* $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \in M \quad \Rightarrow \quad n+1 \in M.$
>
> *Tada je* $M = \mathbb{N}$.

Ako želimo dokazati da neka tvrdnja T_n, koja ovisi o prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$, vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, s M označimo skup svih prirodnih brojeva $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi tvrdnja T_n. Zatim napravimo sljedeća tri koraka:

1° **baza indukcije** $(n = 1)$: Pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$,

2° **induktivna pretpostavka** $(n = k)$: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj k,

3° **korak indukcije** $(n = k+1)$: Koristeći induktivnu pretpostavku, pokažemo da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$.

Nakon toga prema principu matematičke indukcije zaključujemo da je $M = \mathbb{N}$, tj. da tvrdnja T_n vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.11. *Pokažimo matematičkom indukcijom da za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi formula:*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1° $(n = 1)$*: Budući da je* $1 = \frac{1(1+1)}{2}$*, formula vrijedi za* $n = 1$.

2° $(n = k)$*: Pretpostavimo da da je* $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

U trećem koraku treba pokazati da formula vrijedi i za prirodan broj $k+1$*, tj. da je* $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

3° $(n = k + 1)$: Pomoću induktivne pretpostavke dobivamo

$$(1 + 2 + \cdots + k) + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2}.$$

Dakle, prema principu matematičke indukcije formula vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.12. *Dokažimo da za svaki realan broj $x > -1$ i za svaki prirodan broj n vrijedi* **Bernoullijeva nejednakost***:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

1° $(n = 1)$: Kako je $(1 + x)^1 = 1 + x$, nejednakost vrijedi za $n = 1$.

2° $(n = k)$: Neka je $(1 + x)^k \geq 1 + kx$.

3° $(n = k+1)$: Množenjem induktivne pretpostavke s brojem $1+x > 0$ dobivamo

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x.$$

Dakle, principom matematičke indukcije dokazana je Bernoullijeva nejednakost.

Primjedba 1.4. *Često je potrebno pokazati da tvrdnja T_n vrijedi, ne za svaki prirodan broj n, već za sve cijele brojeve n koji su veći ili jednaki od nekog cijelog broja n_0. U tu svrhu, bazu indukcije $(n = 1)$ treba zamijeniti s novom bazom $(n = n_0)$, tj. u prvom koraku umjesto za $n = 1$ treba pokazati da tvrdnja vrijedi za $n = n_0$.*

Zadatak 1.5. *Pokažite da za sve $x > -1$, $x \neq 0$ i za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi stroga Bernoullijeva nejednakost.*

Primjer 1.13. *Pokažimo matematičkom indukcijom da je $5^n + 2^{n+1}$ djeljiv s 3 za svaki cijeli broj $n \geq 0$.*

1° $(n = 0)$: Za $n = 0$ tvrdnja je istinita, jer je $5^0 + 2^{0+1} = 3$.

2° $(n = k)$: Pretpostavimo da je broj $5^k + 2^{k+1}$ djeljiv s 3, tj. da postoji prirodan broj l takav da je $5^k + 2^{k+1} = 3l$.

3° $(n = k + 1)$: Sada pomoću induktivne pretpostavke dobivamo:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 2^{(k+1)+1} &= 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = 2 \cdot 5^k + 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} \\ &= 2(5^k + 2^{k+1}) + 3 \cdot 5^k = 2 \cdot 3 \cdot l + 3 \cdot 5^k = 3\left(2 \cdot l + 5^k\right). \end{aligned}$$

Dakle i broj $5^{k+1} + 2^{(k+1)+1}$ je djeljiv s 3.

Primjer 1.14. *Pokažimo da je* $2^n > 2n + 1$, *za svaki prirodan broj* $n \geq 3$*:*

1° $(n = 3)$*: Kako je* $2^3 = 8 > 2 \cdot 3 + 1$, *tvrdnja vrijedi za* $n = 3$.

2° $(n = k)$*: Neka je* $k \geq 3$ *i* $2^k > 2k + 1$.

3° $(n = k + 1)$*: Iz induktivne pretpostavke dobivamo:*

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = 4k + 2 = 2k + 2k + 2 > 2k + 3 = 2(k + 1) + 1.$$

Zadatak 1.6. *Pokažite metodom matematičke indukcije da su sljedeće tvrdnje točne za svaki prirodan broj* n*:*

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$,
2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$,
3. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$,
4. $3 + 4 + 5 + \cdots + (n + 2) = \frac{1}{2}n(n + 5)$,
5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$,
7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$,
8. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) = \frac{1}{3}n(n + 1)(4n - 1)$,
9. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$,
10. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$,
11. $n! \geq 2^{n-1}$, *gdje je* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n - 1) \cdot n$
    (Funkciju $n \mapsto n!$ *čitamo* en - faktorijela*).*

Zadatak 1.7. *Pomoću kalkulatora pronađite najmanji prirodan broj* n_0 *za koji je* $\log{(n_0)!} > n_0$ *i zatim dokažite da je* $\log n! > n$ *za svaki* $n > n_0$.

Zadatak 1.8. *Pokažite da se za tvrdnju*

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$

može dokazati korak indukcije. Unatoč tome, ova tvrdnja nije istinita niti za jedan $n \in \mathbb{N}$ *(vidi* Zadatak 1.6*). Ovaj primjer pokazuje da dokaz samo koraka indukcije nije dovoljan za dokaz tvrdnje.*

1.4 Kompleksni brojevi

Mnogi matematički problemi, kao primjerice jednadžba $x^2 + 1 = 0$, nemaju rješenje u polju realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Zbog toga se javlja potreba za njegovim proširenjem do novog polja $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – **polja kompleksnih brojeva** u kojem će svaka jednadžba oblika

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdje su $a_n, \ldots, a_1, a_0$ bilo koji realni brojevi, imati rješenje. Pitanje je da li je to moguće!

Primjedba 1.5. *Potrebu za proširenjem polja realnih brojeva među prvima je uočio talijanski matematičar G. Cardano (1501–1576). On je rješavajući jedan geometrijski problem dobio jednakost*

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right) \cdot \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 40$$

iz koje se vidi da je produkt „nerealnih brojeva" realan broj.

Definicija kompleksnih brojeva će mnoge iznenaditi:

Definicija 3. *Skup* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *u kome je definirano zbrajanje:*

$$\left(\forall\ (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2\right) \qquad (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \tag{1.1}$$

i množenje:

$$\left(\forall\ (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2\right) \qquad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \tag{1.2}$$

zovemo skup kompleksnih brojeva *i označavamo s* $\mathbb{C}$*, a njegove elemente zovemo* kompleksnim brojevima*.*

Za dva kompleksna broja (a, b) *i* (c, d) *kažemo da su* jednaka *i pišemo* $(a, b) = (c, d)$ *onda i samo onda ako je* $a = c$ & $b = d$*.*

Na prvi pogled definicija množenja u $\mathbb{C}$ je dosta neprirodna. Međutim, postoje vrlo duboki razlozi za upravo takvu definiciju.

Zadatak 1.9. *Provjerite da je* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *polje u kome je kompleksan broj* $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$ *neutralni element za zbrajanje (nula), kompleksan broj* $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$ *neutralni element za množenje (jedinica), a inverzni element za množenje kompleksnog broja* $z = (a, b) \neq (0, 0)$ *je kompleksan broj* $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Kompleksan broj $i = (0, 1)$ zovemo **imaginarna jedinica**. On je rješenje jednadžbe: $x^2 = -1_{\mathbb{C}}$:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1_{\mathbb{C}}.$$

Nije teško provjeriti da je skup $R' = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja „+" i množenja „·" kompleksnih brojeva te da je $(R', +, \cdot)$ polje. Preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to R'$, definirano formulom $\varphi(a) = (a, 0)$, je bijekcija sa skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ na R' i prevodi algebarsku strukturu polja $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ na algebarsku strukturu polja $(R', +, \cdot)$, tj.

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{i} \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Na taj način je polje realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ „uronjeno" u polje kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Zbog toga polje realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ identificiramo s poljem $(R', +, \cdot)$, a kompleksan broj $(a, 0)$ kraće označavamo s a. Sada kompleksan broj

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

možemo pisati u tzv. **algebarskom obliku**:

$$z = a + bi,$$

gdje je $i = (0, 1)$. Broj a zovemo **realan dio** i označavamo s $\operatorname{Re} z$, a broj b zovemo **imaginaran dio** kompleksnog broja $z = a + bi$ i označavamo s $\operatorname{Im} z$.

Primjer 1.15. $z = 2 - 4i$, $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -4$;
$z = -\sqrt{2} + 4i$, $\operatorname{Re} z = -\sqrt{2}$, $\operatorname{Im} z = 4$.

Primjedba 1.6. *Primijetite da su dva kompleksna broja $z = a + bi$, $w = c + di$ jednaka onda i samo onda ako je $a = c$ & $b = d$, tj. ako su im jednaki i realni i imaginarni dijelovi.*

U skladu s navedenim dogovorom, definicije zbrajanja (1.1) i množenja (1.2) kompleksnih brojeva možemo zapisati u obliku:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i\,.$$

Nemojte pamtiti pravilo za množenje, već primijetite da se dva kompleksna broja množe kao dva binoma („svaki sa svakim"), imajući na umu da je $i^2 = -1$.

Primjer 1.16. *Izvršimo naznačene operacije:*
a*)* $(2+3i)+(4-5i)$, b*)* $(2+3i)(3-2i)$.

a) $(2+3i)+(4-5i) = (2+4)+(3-5)i = 6-2i$,

b) $(2+3i)(3-2i) = (2\cdot 3 - 3\cdot(-2)) + (2\cdot(-2)+3\cdot(3))i = 12+5i$.

Primjer 1.17. *U ovom primjeru želimo ukazati na čestu pogrešku. Naime, formula* $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ *koja vrijedi za realne brojeve* $a \geq 0$ *i* $b \geq 0$ *nije točna kada su oba broja (a i b) negativna. Evo primjera:*

Pravilno: $\sqrt{-4}\sqrt{-4} = 2i2i = 4i^2 = 4(-1) = -4$,

Nepravilno: $\sqrt{-4}\sqrt{-4} = \sqrt{(-4)(-4)} = \sqrt{16} = 4$,

Pri tome kod računanja korijena uvijek smo uzeli predznak „+".

Zadatak 1.10. *Odredite realan i imaginaran dio kompleksnog broja:*

a) $z = (3+2i)+(-5+4i)$, *b)* $z = (8-5i)+(2-3i)$,
c) $z = (-4+5i)-(2-i)$, *d)* $z = -(5-3i)-(-3-4i)$,
e) $z = (4+3i)(-1+2i)$, *f)* $z = (5-3i)(3+4i)$,
g) $z = (-3i)(5i)$, *h)* $z = (1-i)(1+i)$,
i) $z = i^{42}$, *j)* $z = i^{23}$,
k) $z = i^{157}$, *l)* $z = (-i)^{50}$,
m) $z = \sqrt{12}+\sqrt{-50}$, *n)* $z = \sqrt{-3}\sqrt{-6}$.

Kompleksno-konjugiran broj kompleksnog broja $z = a+bi$ je $\bar{z} = a - bi$ (čitaj: *ze potez* ili *ze nadvučeno*).

Primjer 1.18. *Za* $z = 2+\sqrt{5}i$, $\bar{z} = 2-\sqrt{5}i$, *a za* $z = -2-\sqrt{5}i$, $\bar{z} = -2+\sqrt{5}i$.

Primjer 1.19. *Produkt nekog kompleksnog broja* $z = a+bi$ *i njemu kompleksno konjugiranog broja* $\bar{z} = a-bi$ *je realan broj:*

$$z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2+b^2.$$

Zadatak 1.11. *Pokažite da za sve* $z, w \in \mathbb{C}$ *vrijedi:*

a) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$,
b) $\bar{\bar{z}} = z$,
c) $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$,

d) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \forall n \in \mathbb{N}$,

e) $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

Vrijede li jednakosti: $\mathrm{Re}\,(z \cdot w) = \mathrm{Re}\, z \cdot \mathrm{Re}\, w$, $\mathrm{Im}\,(z \cdot w) = \mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, w$ *?*

Realan broj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazivamo **modul, norma** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja $z = a + bi$ (vidi *Sliku 1.7*). Primijetite da je $|z|^2 = z\bar{z}$.

Primjer 1.20. *Odredimo one kompleksne brojeve z za koje vrijedi $|z| + z = 2 + i$.*

Potražimo rješenja u obliku $z = a + bi$. U tom slučaju zadana jednadžba glasi $\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 2 + i$, odakle prema definiciji jednakosti kompleksnih brojeva dobivamo: $\sqrt{a^2 + b^2} + a = 2$ i $b = 1$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu $b = 1$, dobivamo $\sqrt{a^2 + 1} + a = 2$, odakle je $a = \frac{3}{4}$, tj. $z = \frac{3}{4} + i$.

Zadatak 1.12. *Pokažite da za sve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi:*

a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$,

b) $-|z| \leq \mathrm{Re}\, z \leq |z|$, $\quad -|z| \leq \mathrm{Im}\, z \leq |z|$,

c) $|z + w| \leq |z| + |w|$, $\quad |z - w| \leq |z| + |w|$,

d) $||z| - |w|| \leq |z - w|$,

e) $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z \cdot \bar{w})$.

Dijeljenje kompleksnih brojeva definira se formulom

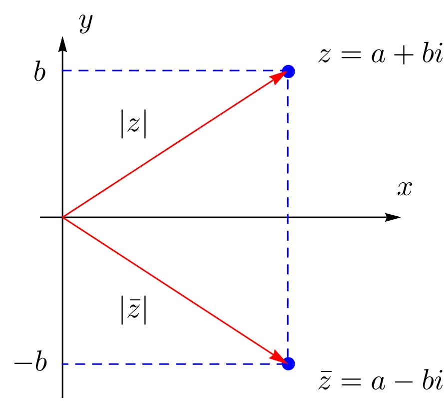
$$\frac{w}{z} := w \cdot z^{-1},$$

gdje je z^{-1} inverzni element kompleksnog broja $z = a+bi$ $(z \neq 0)$. Kako je (provjerite) $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i = \bar{z}/(z \cdot \bar{z})$, to je $\frac{w}{z} = w \cdot \bar{z}/(z \cdot \bar{z})$. Dakle, da bi se našao kvocijent $\frac{w}{z}$, dovoljno je pomnožiti brojnik i nazivnik sa $\bar{z}$.

Primjer 1.21. *Zapišimo u algebarskom obliku kompleksne brojeve:* a) $\frac{1}{1+i}$, b) $\frac{3+2i}{5-i}$.

a) $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, *b)* $\frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i}\frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i+2i^2}{25+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Svakom kompleksnom broju $z = a + bi$ odgovara jedinstvena točka (a, b) ravnine i obrnuto, svakoj točki (a, b) ravnine odgovara jedinstveni kompleksan broj $z = a + bi$. Ravninu u kojoj je svakom kompleksnom broju pridružena točka nazivamo **Gaussova** ili **kompleksna ravnina** (*Slika 1.7*).



Slika 1.7

Brojevi z i $\bar{z}$ simetrično su smješteni u odnosu na realnu os.

Primjedba 1.7. *Kompleksnu ravninu ne treba doživljavati kao neku „imaginarnu" tvorevinu. Naime, radi se o običnoj Euklidovoj ravnini s koordinatnim sustavom u kojoj su još dodatno definirane operacije zbrajanja i množenja među točkama (odnosno među vektorima).*

Primjer 1.22. *Odredimo skup točaka* (x, y) *ravnine koje zadovoljavaju jednadžbu* $yi + (5i - x^2)i + 5 = 0$.
Jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentom obliku $(y - x^2)i = 0$, *odakle je* $y = x^2$. *Dakle, traženi skup točaka je parabola s jednadžbom* $y = x^2$.

Zadatak 1.13. *Skicirajte dio ravnine za koji vrijedi:*
a) $|z-1-i| \leq 2 \;\&\; |z-1| < 1$, *b)* $|z+1| = |z-1|$, *c)* $|z+2| < |z+4|$.

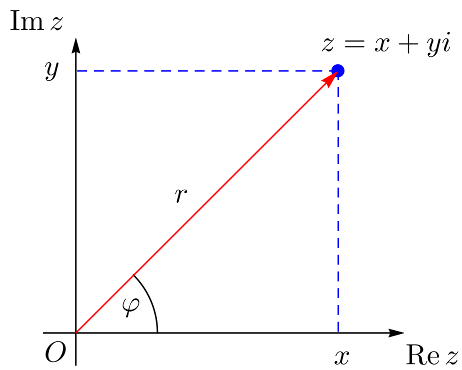
1.4.1 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Sa *Slike 1.8* vidimo da je $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, gdje je $r = |z|$, a φ kut što ga spojnica od ishodišta O do točke (x, y) u Gaussovoj ravnini zatvara s pozitivnim smjerom realne osi.

Prema tome, kompleksan broj $z = x + iy$ možemo zapisati u tzv. **trigonometrijskom obliku**:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Kut φ zovemo **argument kompleksnog broja** z i označavamo ga s $\arg z$.



Slika 1.8

Primijetite da je parom (r, φ) potpuno određen kompleksan broj, kao što je to ranije u algebarskom obliku bilo određeno parom (x, y). Primijetite također da je argument φ kompleksnog broja z određen do na $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jer su funkcije sin i cos periodične s temeljnim periodom 2π.

Primjer 1.23. *Provjerite identitete:*

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right), \quad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} - i\sin\tfrac{\pi}{4}\right),$$
$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}\right), \quad \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} - i\sin\tfrac{\pi}{6}\right).$$

Jednakost kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku opisana je sljedećim teoremom.

Teorem 1.1. *Dva kompleksna broja z_1, z_2, zadana u trigonometrijskom obliku*

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

jednaka su onda i samo onda ako je

$$r_1 = r_2 \quad \& \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,$$

gdje je k neki cijeli broj.

Pomoću dobro poznatih adicijskih formula iz trigonometrije:

$$\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$
$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \pm \cos\varphi_1\sin\varphi_2,$$

lako je provjeriti pravila za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva zadanih u trigonometrijskom obliku, dana ovim teoremom (vidi *Sliku 1.9*)

Teorem 1.2. *Neka je*

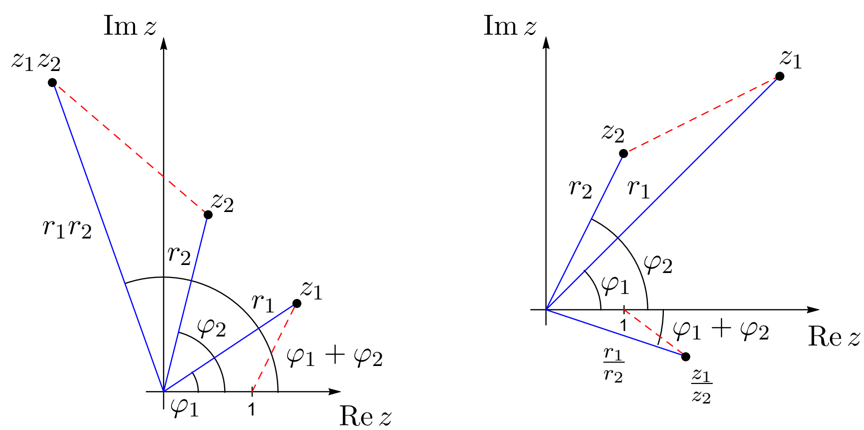
$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Tada vrijedi:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \quad z_2 \neq 0.$$

(a) *Množenje* (b) *Dijeljenje*



Slika 1.9

Koristeći se metodom matematičke indukcije lako je dokazati sljedeći korolar.

Korolar 1.1. *Neka je* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Tada za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Specijalno za $r = 1$ *vrijedi* **Moivreova formula***:*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Primjer 1.24. *Odredimo trigonometrijski oblik kompleksnog broja* $z = \frac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}+i)^5}$.

Kako je (vidi *Primjer 1.23*) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, potenciranjem dobivamo:

$$(1+i)^6 = 2^3(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}), \quad (\sqrt{3}+i)^5 = 2^5\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right).$$

Koristeći *Teorem 1.2* dobivamo:

$$z = \frac{2^3}{2^5}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{2} - \tfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{2} - \tfrac{5\pi}{6}\right)\right) = \tfrac{1}{4}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right).$$

Zadatak 1.14. *Matematičkom indukcijom pokažite da za kompleksan broj* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \neq 0$, *vrijedi formula*

$$z^{-n} = r^{-n}\left(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\right), \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Definicija 4. *Za kompleksan broj* z *kažemo da je* n-ti korijen iz kompleksnog broja w *ako je* $z^n = w$.

Primjer 1.25. *Ako u Moivreovu formulu stavimo* $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, *dobit ćemo jednakost*

$$\left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + i\sin\tfrac{2\pi}{n}\right)^n = (\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

ili

$$\left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + i\sin\tfrac{2\pi}{n}\right)^n = 1,$$

jer je $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$. *Prema tome, kompleksan broj*

$$z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

je n*-ti korijen iz jedinice. Tada je i svaki od brojeva* $z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{n-1}$, *tj. brojeva*

$$\cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

također n*-ti korijen iz jedinice.*

Sljedeći teorem govori nam da kompleksan broj $w \neq 0$ ima točno n različitih n-tih korijena.

Teorem 1.3 (Moivreov teorem)**.** *Neka je* $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*,* $r \neq 0$*, kompleksan broj zapisan u trigonometrijskom obliku. Tada jednadžba* $z^n = w$*,* $n \in \mathbb{N}$*, ima točno* n *različitih rješenja*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dokaz. Neka je $z = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Da bi bilo

$$[\varrho(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

tj. $\varrho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mora biti $\varrho^n = r$ & $n\psi = \varphi + 2k\pi$, odnosno

$$\varrho = \sqrt[n]{r} \quad \& \quad \psi = \tfrac{\varphi+2k\pi}{n},$$

gdje je k bilo koji cijeli broj. Prema tome, rješenja jednadžbe $z^n = w$ glase

$$z_k = \sqrt{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sada pokažimo da postoji točno n različitih rješenja. Svaki cijeli broj k možemo zapisati u obliku $k = nq + s$, gdje je $0 \leq s < n$. Kako je

$$\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} = \tfrac{\varphi+2(nq+s)\pi}{n} = \tfrac{\varphi+2s\pi}{n} + 2q\pi,$$

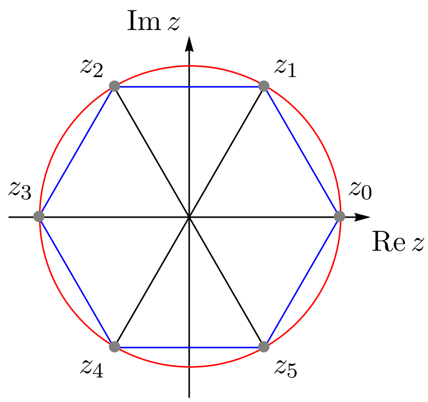
a funkcije sin i cos periodične s temeljnim periodom 2π, zaključujemo da je $z_k = z_s$.

Prema tome, imamo točno n različitih n-tih korijena kompleksnog broja z koje možemo dobiti za $k = s = 0, 1, \ldots, n-1$. $\square$

Primijetimo da argumenti korijena

$$\tfrac{\varphi}{n}, \tfrac{\varphi+2\pi}{n}, \tfrac{\varphi+4\pi}{n}, \ldots, \tfrac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}$$

čine aritmetički niz s diferencijom $\frac{2\pi}{n}$ i da je modul svakog korijena jednak $\sqrt[n]{r}$. To znači da korijeni $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ čine vrhove pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu sa središtem u ishodištu i radijusa $\sqrt[n]{r}$.



Slika 1.10

Primjer 1.26. *Odredimo sve šeste korijene kompleksnog broja $w = 1$.*
Traženi korijeni su

$$z_k = \sqrt[6]{1}\left(\cos\tfrac{0+2k\pi}{6} + i\sin\tfrac{0+2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Lako se može pokazati da su to brojevi $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (vidi Sliku 1.10*).*

Zadatak 1.15. *Izračunajte i grafički prikažite sve četvrte korijene kompleksnog broja $w = -16$.*

Zadatak 1.16. *Riješite jednadžbe u skupu $\mathbb{C}$:*

a) $z^3 = 1 - i$,
b) $z^2 + (3 - i)z + 2 - i = 0$,
c) $z^2 - 2iz - 1 - 8i = 0$.

1.5 Binomna formula

Binomna formula služi za računanje n-te potencije binoma $(a + b)$. Za razumijevanje ove formule potrebno je poznavati faktorijele i binomne koeficijente. Krenimo redom.

Faktorijeli. Umnožak prvih n prirodnih brojeva zovemo **en-faktorijela** i označavamo s $n!$. Dakle, $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Po dogovoru se uzima da je $0! = 1$.

Primjer 1.27. *Provjerite:*

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Zamijetite da je $n! = (n-1)! \cdot n$. Tako je primjerice $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$. Faktorijeli rastu veoma brzo. Tako primjerice $70!$ ima 101 znamenku:

$$\begin{aligned} 70! = \; & 1197857166996989179607278372168909873645893814254642 58\\ & 57555362864628009582789845319680000000000000000 \end{aligned}$$

Binomni koeficijenti. Za cijele brojeve n i k, $0 \leq k \leq n$, definiramo **binomne koeficijente** $\binom{n}{k}$ (čitaj: *n povrh k*) formulom

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Primjer 1.28. *Navedimo nekoliko primjera:*

a) $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1(2 \cdot 1)} = \frac{6}{2} = 3,$

b) $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)1} = \frac{6}{2} = 3,$

c) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = \frac{24}{4} = 6.$

Zadatak 1.17. *Pokažite da je* $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$.

Binomni koeficijenti imaju sljedeća dva svojstva:

1. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$ (*simetrija binomnih koeficijenata*).

Drugo svojstvo slijedi iz definicije binomnih koeficijenata. Dokažimo prvo svojstvo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \; & \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] \\ = \; & \frac{n!(n+1)}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Binomni se koeficijenti mogu zapisati u obliku tzv. **Pascalovog trokuta**:

n	Binomni koeficijenti										
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1
$\vdots$											

Svaki red započinje i završava brojem 1. U bilo kojem redu, drugi broj jednak je zbroju prvog i drugog broja iz prethodnog reda, treći broj se dobiva zbrajanjem drugog i trećeg broja iz prethodnog reda itd. Ta pravilnost slijedi iz prvog svojstva binomnih koeficijenata.

Zadatak 1.18. *Dokažite matematičkom indukcijom po n da n-člani skup S ima $\binom{n}{k}$ k-članih podskupova, $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Teorem 1.4 (Binomna formula[1])**.** *Neka su $a, b \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n.\end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.

1° ($n = 1$): Budući da je $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$, formula vrijedi za $n = 1$.

2° ($n = k$): Pretpostavimo da binomna formula vrijedi za $n = k$.

3° ($n = k+1$): Ako iskoristimo induktivnu pretpostavku i prvo svojstvo binomnih koeficijenata, dobivamo:

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\ &= (a+b)\left[\binom{k}{0} a^k b^0 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^1 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^0 b^k\right] \\ &= \binom{k}{0} a^{k+1} b^0 + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] a^k b^1 + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] a^{k-1} b^2 + \cdots \\ &\quad + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right] a^1 b^k + \binom{k}{k} a^0 b^{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0} a^{k+1} b^0 + \binom{k+1}{1} a^k b^1 + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k+1} a^0 b^{k+1},\end{aligned}$$

odakle vidimo da formula vrijedi i za $n = k + 1$.

[1] Binomna formula za $n = 2$ bila je poznata već Euklidu (300 god. prije Krista). Mnogi su ljudi radili na njezinom dokazu, a prvi ga je načinio Abel oko 1825.

Time je dokazana binomna formula. $\square$

Primjer 1.29.

$$\begin{aligned}(x+2)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4\cdot 2 + \binom{5}{2}x^3\cdot 2^2 + \binom{5}{3}x^2\cdot 2^3 + \binom{5}{4}x\cdot 2^4 + \binom{5}{5}2^5 \\ &= 1\cdot x^5 + 5\cdot x^4\cdot 2 + 10\cdot x^3\cdot 410\cdot x^2\cdot 8 + 5\cdot x\cdot 16 + 1\cdot 32 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.\end{aligned}$$

Primjer 1.30. *Odredimo koeficijent uz x^4 u izrazu $(\sqrt{x}+x^2)^n$.*
Primijetimo da je $(k+1)$-vi član $(k=0,1,\ldots,n)$ $(\sqrt{x})^{n-k}\left(x^2\right)^k = x^{(n+3k)/2}$. Na osnovi zahtjeva $\frac{n+3k}{2}=4$ dobivamo $k=\frac{8-n}{3}$.

	$n>8$ *ili* $n=7,6,4,3,1$	$n=8\,(k=0)$	$n=5\,(k=1)$	$n=2\,(k=2)$
koef. uz x^4	0	1	5	1

Zadatak 1.19. *Odredite koeficijent uz x^8 u izrazu $\left(2x^3-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5$.*

Zadatak 1.20. *Dokažite:*

a) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0,$

b) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$

Poglavlje 2

Funkcije

Pojam funkcije jedan je od najvažnijih matematičkih pojmova, koji se uvodi i izučava već krajem osnovne i tijekom cijele srednje škole. Zato bi većina materijala ovog poglavlja čitatelju trebala biti poznata već od ranije. U ovoj knjizi razmatrat ćemo samo realne funkcije jedne realne varijable.

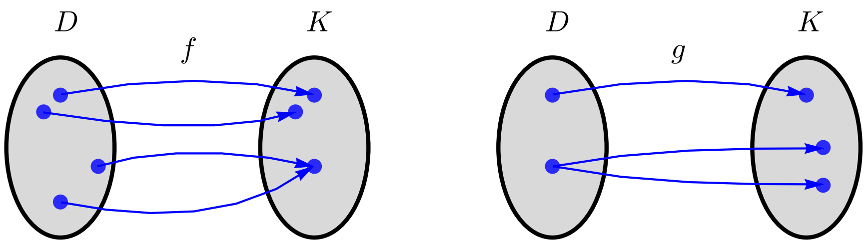
2.1 Pojam funkcije

Definicija 5. *Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$ zovemo* funkcija *ili* preslikavanje *sa D u K i pišemo*

$$f : D \to K \quad \text{ili} \quad x \mapsto f(x), \quad x \in D.$$

Primjedba 2.1. *Izraz „točno jedan" iz* Definicije 5 *znači da svakom elementu $x \in D$ mora biti pridružen jedan, ali ne smiju biti pridružena dva ili više elemenata iz skupa K.*

(a) *Postupak f je funkcija* (b) *Postupak g nije funkcija (Zašto?)*



Slika 2.1

Skup D iz *Definicije 5* zovemo **domena** ili **područje definicije**, a skup K **kodomena** ili **područje vrijednosti** funkcije f. Domenu D funkcije f često označavamo i s $\mathcal{D}(f)$. Svakom $x \in D$ odgovarajući (jedinstveni) pridruženi element $y \in K$ označavamo s $f(x)$ i zovemo **slika elementa** x ili **vrijednost funkcije** f **u točki** x. Skup svih vrijednosti funkcije f, tj. skup

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

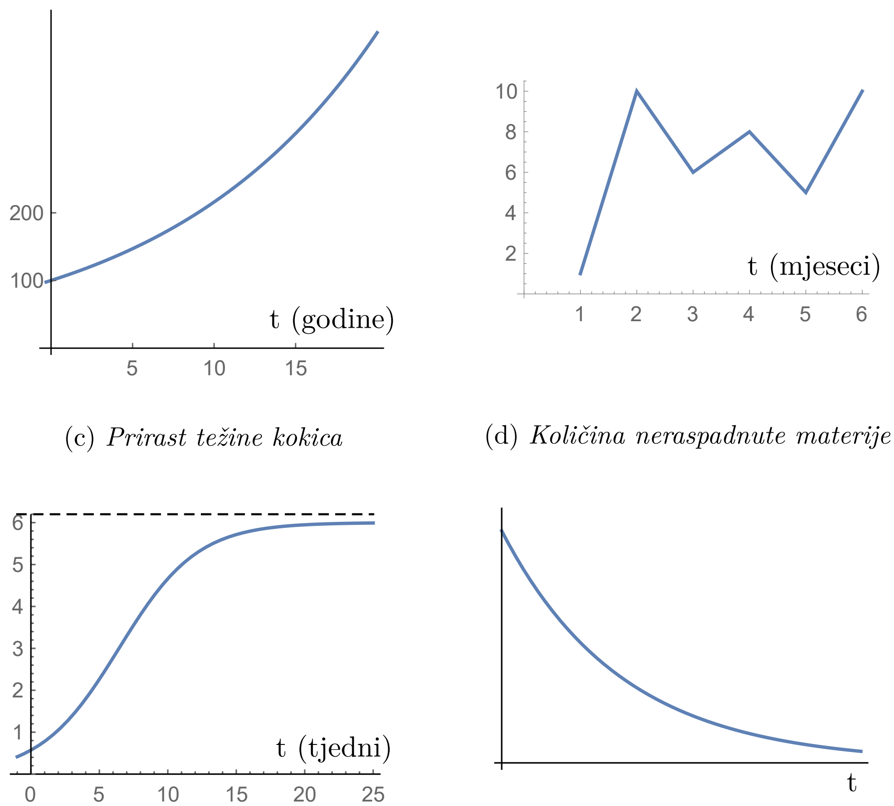
zovemo **slika funkcije** f. Prema *Definiciji 5* je $\mathcal{R}(f) \subseteq K$. Simbol x, koji označava proizvoljni element iz D zovemo **nezavisna varijabla** ili **argument**, a $f(x)$ **zavisna varijabla**.

Graf Γ_f funkcije $f : D \to K$ je skup svih uređenih parova $(x, f(x))$, $x \in D$, tj.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq D \times K.$$

Funkcija $f : D \to K$ može biti zadana na različite načine: grafički (tj. pomoću grafa ili dijagrama), tablicom, formulom, itd.

Primjer 2.1. *Na* Slici 2.2 *funkcije su zadane grafovima.* Slika 2.2a *prikazuje godišnje stanje početnog kapitala od* 100 *Kn uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 5%.* Slika 2.2b *prikazuje mjesečnu realizaciju prodaje piva.* Slika 2.2c *prikazuje tjedni rast jedne vrste kokica, a* Slika 2.2d *količinu još neraspadnute tvari nekog radioaktivnog materijala.*



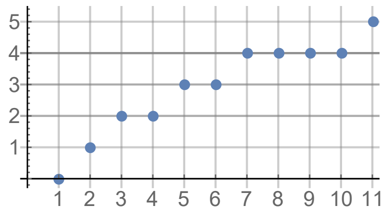
(a) *Stanje kapitala* (b) *Realizacija prodaje piva* (c) *Prirast težine kokica* (d) *Količina neraspadnute materije*

Slika 2.2: *Grafovi nekih funkcija*

Primjer 2.2. *Svakom prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$ pridružit ćemo broj prostih brojeva manjih ili jednakih n. Tako dobivamo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, koju možemo prikazati tablicom*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
$f(n)$	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	$\cdots$

ili odgovarajućim grafom u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu (vidi Sliku 2.3). Inače, nije poznata formula kojom bi bila opisana ova funkcija.



Slika 2.3: *Broj prostih brojeva manjih ili jednakih n*

Zadatak 2.1. *Izradi program na računalu, koji će za zadani $n \in \mathbb{N}$ izračunati vrijednost ove funkcije.*

Primjer 2.3. *Površina S kruga je funkcija njegovog radijusa r. Svakoj vrijednosti $r \in (0, \infty)$ pridružena je točno jedna vrijednost površine $S(r) \in (0, \infty)$ zadane formulom $S(r) = \pi r^2$.*

Primjer 2.4. *Promotrimo funkciju $i_D : D \to D$, zadanu formulom $i_D(x) = x$. Ona svakom elementu iz domene D pridružuje taj isti element. Funkciju i_D zovemo* identiteta *ili* identičko preslikavanje.

Funkciju $f : D \to K$ zadanu formulom $f(x) = c$, $x \in D$, nazivamo konstantno preslikavanje *ili jednostavno* konstanta. *Ona svakom elementu iz domene D pridružuje jedan te isti element c iz kodomene K.*

Neka je $f : D \to K$ funkcija. Ako je $D \subseteq \mathbb{R}$ onda kažemo da je f **funkcija jedne realne varijable**, a ako je $K \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je f **realna funkcija**.

Ako je realna funkcija realne varijable zadana formulom $x \mapsto f(x)$, bez isticanja njezine domene i kodomene, onda se za njenu kodomenu uzima skup $\mathbb{R}$, a za domenu se uzima skup svih realnih brojeva x za koje je $f(x)$ realan broj. U tom slučaju domenu ovakve funkcije često još nazivamo prirodno područje definicije.

Primjer 2.5. *Slobodan pad tijela u vakuumu opisan je funkcijom*

$$s(t) = \frac{g}{2}\,t^2, \quad g \approx 9.81\,\mathrm{ms}^{-2},$$

gdje je t vrijeme (u sekundama), a $s(t)$ put (u metrima) koji tijelo prijeđe od početka padanja (za $t = 0$).

U matematičkom smislu domena funkcije s je $\mathcal{D}(s) = \mathbb{R}$. Međutim, iz fizikalnih razloga za domenu treba uzeti skup $[0, \infty)$ (Zašto?).

Zadatak 2.2. *Tijelo u vakuumu slobodno pada s visine* $h_0 = 490.5$ m *od trenutka* $t = 0$. *Njegova udaljenost od zemlje u trenutku* t *zadana je funkcijom*

$$h(t) = h_0 - \frac{g}{2}t^2.$$

a) Kada će tijelo pasti na zemlju? b) Što je fizikalno smislena domena funkcije h*?*

Definicija 6. *Kažemo da su funkcije* $f : A \to B$ *i* $g : C \to D$ *jednake i pišemo* $f = g$ *ako vrijedi:* $\quad A = C, \quad B = D$ *i* $f(x) = g(x)$ *za svaki* $x \in A$ *(odnosno* C*).*

Prema navedenoj definiciji funkcije f i g nisu jednake ako se ne podudaraju u domeni ili ako se ne podudaraju u kodomeni ili ako postoji barem jedan x, takav da je $f(x) \neq g(x)$.

Primjer 2.6. *Dvije funkcije* f *i* g *definirane formulama* $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$ *i* $g(x) = x - 4$ *nisu jednake jer je* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$, *a* $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, *bez obzira što je* $f(x) = g(x)$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$. *Za razliku od toga funkcije* u *i* v *zadane formulama*

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2, \qquad v(x) = \frac{1}{2}(x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})$$

su jednake. Dokažite!

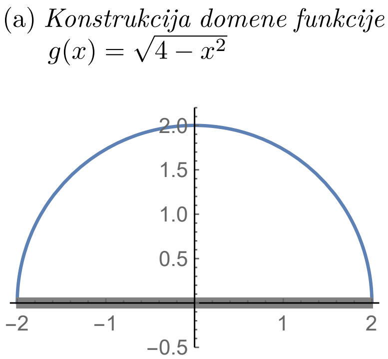
Primjer 2.7. *Odredimo domene funkcija* f, g *i* h *zadanih formulama* $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $h(x) = \frac{1}{\log(x-3)}$.
Za $x = 2$ *funkcija* f *ne postiže realnu vrijednost pa je prirodno područje definicije ove funkcije* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

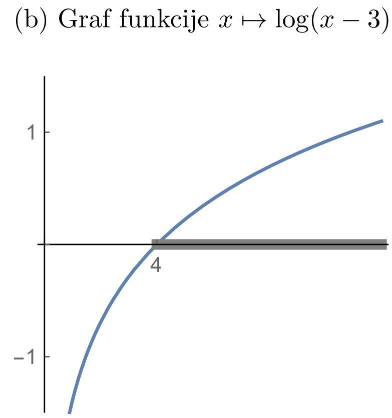
Prirodno područje definicije funkcije g *određeno je zahtjevom da argument korijenske funkcije mora biti nenegativan:* $4 - x^2 \geq 0$. *Crtanjem grafa funkcije* $x \mapsto 4 - x^2$ (Slika 2.4a) *vidimo da je to ispunjeno za svaki* $x \in [-2, 2]$. *Dakle* $\mathcal{D}(g) = [-2, 2]$.

Prirodno područje definicije funkcije h *određeno je svojstvima i oblikom logaritamske funkcije* $x \mapsto \log(x - 3)$ *(vidi* Sliku 2.4b*). Zato moraju biti ispunjena sljedeća dva zahtjeva:*

$$x - 3 > 0 \quad \& \quad \log(x - 3) \neq 0,$$

iz čega zaključujemo da mora biti $x > 3$ *i* $x \neq 4$. *Dakle,* $\mathcal{D}(h) = (3, \infty)\backslash\{4\}$.





Slika 2.4: *Grafičko određivanje domene funkcije*

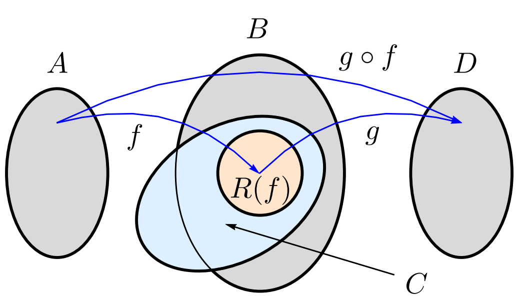
Zadatak 2.3. *Odredite prirodno područje definicije sljedećih funkcija:*
a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, *b)* $f(t) = \frac{\sqrt{t-2}}{t^2-16}$, *c)* $f(u) = \frac{1}{\sqrt{|u|-u}}$,
d) $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$, *e)* $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{|x-3|}}$, *f)* $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u-|u|}}$.

2.1.1 Kompozicija funkcija

Definicija 7. *Neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$ dvije funkcije, takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq C$. Tada funkciju $h : A \to D$ definiranu formulom*

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

označavamo s $g \circ f$ i zovemo kompozicija *funkcija f i g.*



Slika 2.5: *Kompozicija funkcija*

Primjer 2.8. *Prihod od prodaje ulaznica za nogometnu utakmicu ovisi o broju navijača. Broj navijača ovisi o broju pobjeda domaćina u prethodnim susretima. Dakle, prihod od prodaje ulaznica je funkcija broja pobjeda u prethodnim utakmicama.*

Ovdje smo funkciju prihoda dobili „slaganjem” dviju funkcija: funkcije koja pokazuje broj navijača u ovisnosti o broju pobjeda i funkcije koja pokazuje prihod od prodanih ulaznica u ovisnosti o broju navijača.

Primjer 2.9. *Zadane su funkcije:*

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad && f(x) = \tfrac{1}{x}, \\ &g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && g(x) = 2x - 1. \end{aligned}$$

Zbog $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\} \subseteq \mathbb{R}$*, definirana je kompozicija* $g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$*:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\tfrac{1}{x}\right) = 2\tfrac{1}{x} - 1 = \tfrac{2}{x} - 1.$$

Nasuprot tome, kompozicija $f \circ g$ *nije definirana. Naime, kako je* $\mathcal{R}(g) = \mathbb{R}$*, a* $0 \notin \mathcal{D}(f)$*, ne može se definirati kompozicija* $f \circ g$*.*

Primjer 2.10. *Zadane su funkcije:*

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad && f(x) = x + 1 \\ &g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && g(x) = 2x. \end{aligned}$$

Lako se vidi da su definirane kompozicije $f \circ g$ *i* $g \circ f$*, te da je*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2.$$

I u *Primjeru 2.9* i u *Primjeru 2.10* vidi se da općenito ne vrijedi zakon komutacije za kompoziciju funkcija (čak i u slučaju ako su obje kompozicije definirane).

Primjer 2.11. *Zadan je konačan skup* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i funkcija* $f : S \to S$*, tako da je* $f(1) = 2$*,* $f(2) = 5$*,* $f(3) = 4$*,* $f(4) = 1$*,* $f(5) = 3$*, što kraće pišemo*

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Neka su zadane još dvije takve funkcije $g, h : S \to S$*:*

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad h := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tada možemo definirati sve moguće kompozicije: $f \circ f$, $f \circ g$, $f \circ h$, $g \circ f$, $g \circ g$, $g \circ h$, $h \circ f$, $h \circ g$, $h \circ h$. *Primjerice*

$$f \circ g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad g \circ h := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primijetite da je $f \circ h = h \circ f = i_S$*. Pronađite ostale kompozicije.*

Zadatak 2.4. *Odredite prirodno područje definicije funkcije zadane formulom:*

a) $f(x) = \frac{2x^2 - \log(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}$, *b)* $f(x) = \frac{4x+7}{6x^2+13x-5}$, *c)* $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$,

d) $f(t) = \frac{\sqrt{t^2-4}}{\sqrt{t-4}}$, *e)* $f(s) = \sqrt{|s-3|}$, *f)* $f(\lambda) = \frac{1}{|\lambda - 1|}$.

2.1.2 Inverzna funkcija

Primjer 2.12. *Razmotrimo jednostavnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ *(vidi* Poglavlje 1.2 *i* Sliku 1.5*, str. 7). Za svaki* $a > 0$ *jednadžba* $f(x) = a$ *nema jedinstveno rješenje jer za* $x_1 = -a$ *i* $x_2 = a$ *vrijedi*

$$f(x_1) = f(x_2) = a.$$

Ova funkcija ima svojstvo da različitim vrijednostima argumenata pridružuje istu vrijednost. Nasuprot tome, funkciju koja različitim vrijednostima argumenata pridružuje različite vrijednosti zovemo injektivna funkcija.

Definicija 8. *Kažemo da je funkcija* $f : D \to K$ injekcija *(ili 1-1 preslikavanje), ako*

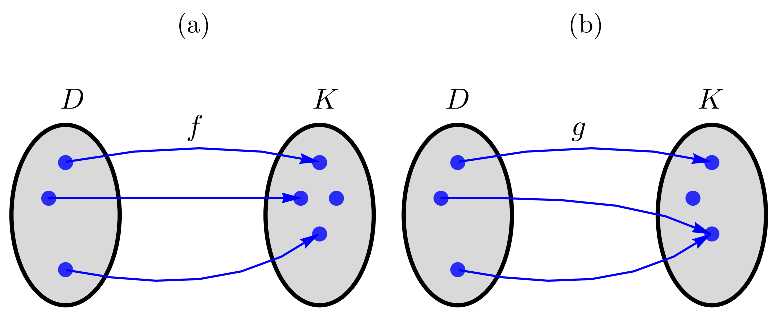
$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in D).$$

Primjedba 2.2. *Prema* Definiciji 8 *funkcija* $f : D \to K$ *je* injekcija *onda i samo onda ako*

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \quad (\forall x_1, x_2 \in D). \tag{2.1}$$

Zapis (2.1) češće koristimo za ispitivanje injektivnosti funkcije.

Primjer 2.13. *Funkcija* f *na Slici 2.6a je injekcija, dok funkcija* g *prikazana na Slici 2.6b nije injekcija.*

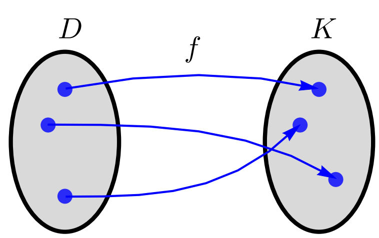


Slika 2.6

Zadatak 2.5. *Neka je D skup svih studenata u dvorani, a K skup svih njihovih imena. Funkciju $f : D \to K$ definirat ćemo tako da svakom studentu pridružimo njegovo ime. Da li je tako definirana funkcija nužno injekcija? Kada je, a kada nije?*

Definicija 9. *Kažemo da je funkcija $f : D \to K$* surjekcija[1] *ako je $\mathcal{R}(f) = K$.*

Primjer 2.14. *Na Slici 2.7 Prikazana je jedna surjekcija.Funkcije prikazane na Slici 2.6 nisu surjekcije.*



Slika 2.7

Primjer 2.15. *Funkcije f, g, h iz* Primjera 2.11, *str. 33 su injekcije i surjekcije.*

Primjedba 2.3. *Iz* Definicije 9 *vidljivo je da neka funkcija $f : D \to K$ nije surjekcija onda i samo onda ako je $K \setminus \mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, tj. ako postoji neki $y \in K$, takav da je $f(x) \neq y$ za svaki $x \in D$.*

[1] francuski: sur=na

Definicija 10. *Kažemo da je funkcija $f : D \to K$* bijekcija *(ili* obostrano jednoznačno preslikavanje*) ako je ona i injekcija i surjekcija.*

Primjer 2.16. *Funkcije f, g, h iz* Primjera 2.11, *str. 33 su bijekcije sa S na S.*

Zadatak 2.6. *Bijekciju $f : S \to S$ konačnog skupa S na sama sebe zovemo* permutacija skupa *S. Koliko različitih permutacija ima skup S iz* Primjera 2.11*? Pokažite da je skup svih permutacija skupa S snabdjeven binarnom operacijom $\circ$ grupa.*

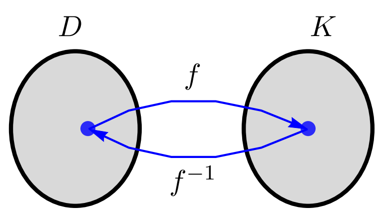
Zadatak 2.7. *Zadane su funkcije:*

$$\begin{aligned} &a) \quad f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(x) := x^2, \\ &b) \quad g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty), \quad g(x) := x^2, \\ &c) \quad h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) := 2x + 3. \end{aligned}$$

Koja od njih je injekcija, koja surjekcija, a koja bijekcija?

Neka je $f : D \to K$ bijekcija. Tada zbog surjektivnosti za svaki element $y \in K$ postoji element $x \in D$, takav da je $f(x) = y$. Zbog injektivnosti funkcije f taj element x je jedinstven.

Definicija 11. *Neka je $f : D \to K$ bijekcija. Tada postoji funkcija $f^{-1} : K \to D$ definirana formulom $f^{-1}(y) := x$, gdje je $x \in D$ jedinstveni element takav da je $f(x) = y$. Funkciju f^{-1} zovemo* inverzna funkcija *funkcije f.*



Slika 2.8: *Inverzna funkcija*

Prema definiciji, za funkciju f i njenu inverznu funkciju f^{-1} vrijedi:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x, \quad \forall x \in D \\ f(f^{-1}(y)) &= y, \quad \forall y \in K. \end{aligned} \tag{2.2}$$

To znači da je

$$f^{-1} \circ f = i_D \quad \& \quad f \circ f^{-1} = i_K.$$

Teorem 2.1. *Funkcija $f : D \to K$ je bijekcija onda i samo onda ako postoji funkcija $g : K \to D$, takva da je*

(i) $f \circ g = i_K$, *tj.* $f(g(x)) = x$ *za svaki* $x \in K$ *i*

(ii) $g \circ f = i_D$, *tj.* $g(f(x)) = x$ *za svaki* $x \in D$.

Pri tome, funkcija g nužno je jednaka funkciji f^{-1}.

Dokaz. ($\Rightarrow$). Dovoljno je uzeti $g = f^{-1}$.
($\Leftarrow$). Neka funkcija $g : K \to D$ ima svojstva (i) - (ii). Iz (i) zaključujemo da je f surjekcija. Pokažimo da je f i injekcija. Neka je $f(x_1) = f(x_2)$. Tada je također $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, odakle je zbog svojstva (ii) $x_1 = x_2$. Dakle, f je bijekcija.
Preostaje pokazati da je $g = f^{-1}$. Za svaki $x \in K$ iz (i) dobivamo $f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(x)$, odakle slijedi $g(x) = f^{-1}(x)$. $\square$

Primjer 2.17. *Funkcije f i h iz* Primjera 2.11, *str. 33 međusobno su inverzne funkcije jer je*

$$f\circ h=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=i_S,$$

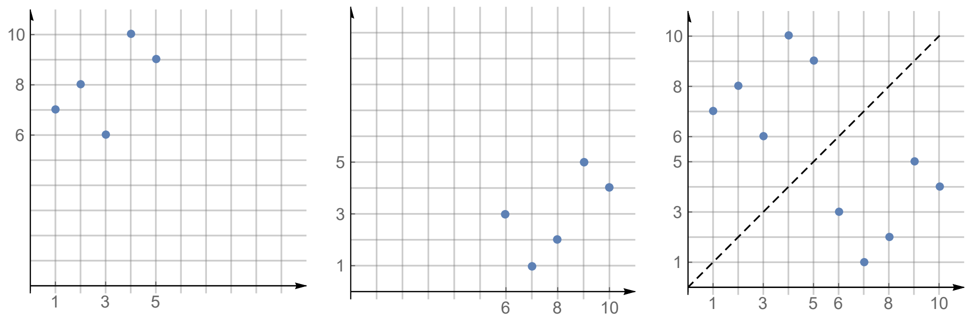
$$h\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=i_S,$$

Na sličan način pronađite inverznu funkciju funkcije g iz istog primjera.

Primjer 2.18. *Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ i funkcija $f : A \to B$ slično kao u* Primjeru 2.11, *str. 33:*

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) *Graf* Γ_f (b) *Graf* Γ_f^{-1} (c) *Graf* Γ_f *i* Γ_f^{-1}



Slika 2.9: *Grafovi* Γ_f *i* $\Gamma_{f^{-1}}$

Graf Γ_f funkcije f prikazan je na *Slici 2.9a*. Kako je f bijekcija sa A na B, onda postoji inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$, a njezin graf prikazan je na *Slici 2.9b*. Ako oba grafa prikažemo u jednom koordinatnom sustavu *(Slika 2.9c)*, možemo primijetiti da su tada grafovi Γ_f i $\Gamma_{f^{-1}}$ osno simetrični obzirom na simetralu I. i III. kvadranta. Zato poznavajući graf funkcije f možemo skicirati i graf funkcije f^{-1} bez izračunavanja njenih vrijednosti. Ovo geometrijsko svojstvo grafova Γ_f i $\Gamma_{f^{-1}}$ kasnije ćemo često koristiti. Nacrtajte grafove funkcija f i h iz prethodnog primjera.

Navedimo postupak pomoću kojeg u većini slučajeva možemo ispitati je li funkcija $f : D \to K$ bijekcija i tada pronaći njenu inverznu funkciju f^{-1}:

Jednadžbu $f(x) = y, \quad y \in K$, gdje je $x = f^{-1}(y)$ rješavamo po x.

1) Ako za neki $y \in K$ rješenje ne postoji, onda f nije surjekcija.

2) Ako za neki $y \in K$ rješenje nije jedinstveno, onda f nije injekcija.

3) Ako rješenje postoji i jedinstveno je za svaki $y \in K$, onda je f bijekcija a $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ je inverz od f.

Primjer 2.19. *Odredimo inverznu funkciju linearne funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

Rješavanjem jednadžbe $2x + 3 = y$ po x, za svaki $y \in \mathbb{R}$ dobivamo jedinstveno rješenje $x = \frac{y-3}{2}$. Dakle, f je bijekcija, a njena inverzna funkcija zadana je formulom $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.

Provjerite da za navedene funkcije f i f^{-1} vrijede formule (2.2).

2.2 Neka svojstva realnih funkcija

U daljnjem tekstu razmatrat ćemo realne funkcije jedne realne varijable

$$f : D \to K \ \ (D, K \subseteq \mathbb{R}).$$

Za takve dvije funkcije možemo definirati:

(i) zbroj funkcija $f + g\colon D \to \mathbb{R}$,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

(ii) razliku funkcija $f - g\colon D \to \mathbb{R}$,

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x),$$

(iii) produkt funkcija $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$,

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x),$$

(iv) kvocijent funkcija $f/g\colon D^* \to \mathbb{R}$, $D^*{=}\{x \in D : g(x){\neq}0\}$,

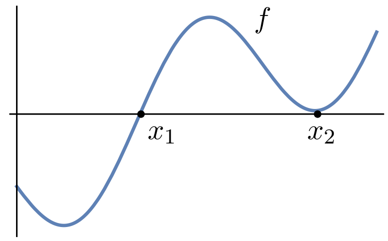
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Prilikom proučavanja toka funkcije promatrat ćemo njene promjene pri čemu ćemo pretpostaviti da se nezavisna varijabla kreće od najmanjih do najvećih vrijednosti iz domene. Pri tome, bit će potrebno uvesti neke česte pojmove: a) nul-točke, b) parnost i neparnost, c) konveksnost, konkavnost i točke infleksije, d) monotonost, e) lokalni ekstremi, f) ograničenost, infimum i supremum, g) globalni ekstrem, te h) periodičnost.

a) Nul-točke funkcije

Definicija 12. *Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je $x_0 \in D$* nul-točka *funkcije f, ako je $f(x_0) = 0$.*

Ako je x_0 nul-točka funkcije f, onda graf funkcije Γ_f ima zajedničku točku s apscisom (Γ_f siječe ili dodiruje apscisu u točki x_0).



Slika 2.10: *Točke x_1 i x_2 su nul-točke funkcije*

Ako funkcija na nekom intervalu prima pozitivne [odnosno negativne] vrijednosti, njezin graf je na tom intervalu iznad [odnosno ispod] apscise.

b) Parnost funkcije. Ovo svojstvo razmatra se samo u slučaju ako je domena D funkcije skup simetričan obzirom na ishodište, tj. ako ona ima svojstvo: $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Definicija 13. *Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$,* parna *ako je*

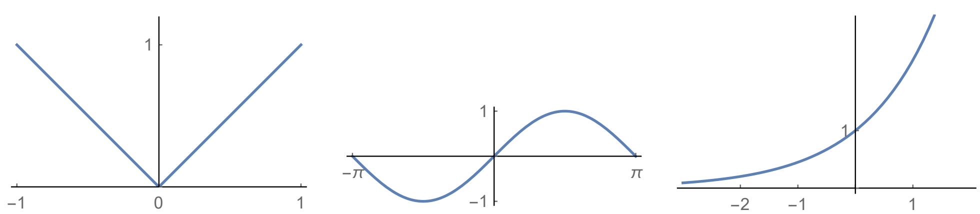
$$f(-x) = f(x) \quad \text{za svaki } x \in D.$$

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neparna *ako je*

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{za svaki } x \in D.$$

Primjer 2.20. *Funkcije $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^x$ definirane su na čitavom $\mathbb{R}$. Funkcija $x \mapsto |x|$ je parna jer je $|-x| = |x|$, funkcija $x \mapsto \sin x$ je neparna jer je $\sin(-x) = -\sin x$, a funkcija $x \mapsto e^x$ nije ni parna ni neparna.*

(a) $x \mapsto |x|$ (b) $x \mapsto \sin x$ (c) $x \mapsto e^x$



Slika 2.11

Primjedba 2.4. *Graf parne funkcije osno je simetričan obzirom na ordinatu (vidi* Sliku 2.11a*), a graf neparne funkcije centralno je simetričan obzirom na ishodište koordinatnog sustava (vidi* Sliku 2.11b*).*

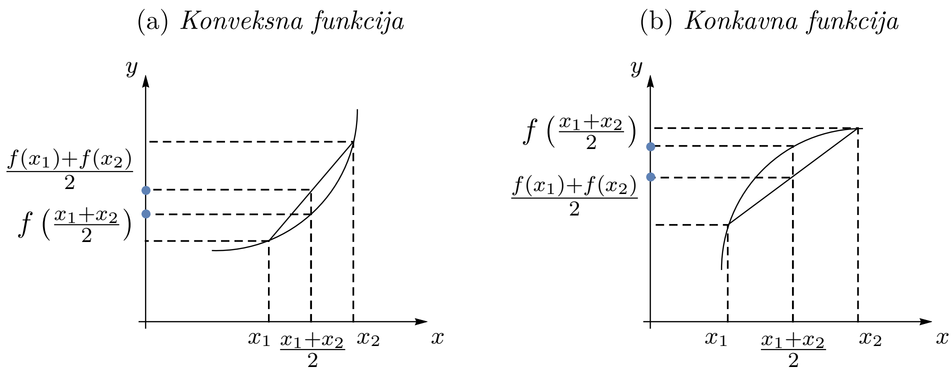
c) Konveksnost, konkavnost i točke infleksije

Definicija 14. *Kažemo da je funkcija $f: D \to \mathbb{R}$* konveksna *na intervalu $(a,b) \subseteq D$ ako je*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \quad \text{za sve } x_1, x_2 \in (a,b) \tag{2.3}$$

Ako u (2.3) stoji znak „$\geq$”, kažemo da je funkcija f konkavna *na intervalu (a,b). Ako u (2.3) umjesto znaka „$\leq$” stoji znak „$<$”, onda kažemo da je funkcija f* strogo konveksna *na intervalu (a,b). Analogno se definira i pojam* stroge konkavnosti *funkcije na intervalu.*

Primjedba 2.5. *Može se pokazati da je funkcija f konveksna [konkavna] na intervalu (a,b) onda i samo onda ako je područje iznad [ispod] grafa funkcije konveksan skup*[2] *(vidi* Sliku 2.12*).*



Slika 2.12

Prilikom skiciranja grafa funkcije $f: D \to K$ važne su i točke u kojima se „mijenja konveksnost”. To su tzv. točke infleksije. Preciznije, kažemo da je točka $c \in D$ **točka infleksije** funkcije f ako postoji realan broj $\delta > 0$, takav da je f strogo konveksna na $(c-\delta, c)$ i strogo konkavna na $(c, c+\delta)$ ili da je f strogo konkavna na $(c-\delta, c)$ i strogo konveksna na $(c, c+\delta)$.

[2]Za podskup ravnine S kažemo da je konveksan ako ima svojstvo: $(\forall A, B \in S) \Longrightarrow (\overline{AB} \subset S)$.

Primjer 2.21. *Funkcija* $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$, *ima točku infleksije u ishodištu koordinatnog sustava jer je konveksna na segmentu* $[-\pi, 0]$, *a konkavna na segmentu* $[0, \pi]$ *(vidi* Sliku 2.11b*).*

d) Monotonost funkcije

Definicija 15. *Kažemo da je funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$ monotono rastuća *na intervalu* $(a, b) \subseteq D$ *ako*

$$(x_1, x_2 \in (a, b)) \ \& \ (x_1 < x_2) \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2). \tag{2.4}$$

Ako u (2.4) umjesto znaka „$\leq$" stoji znak „$\geq$", kažemo da je funkcija f monotono padajuća *na intervalu* (a, b).

Ako u (2.4) umjesto znaka „$\leq$" stoji znak „$<$", kažemo da je funkcija f *na intervalu* (a, b) strogo monotono rastuća. *Analogno se definira i pojam strogo monotono padajuće funkcije na intervalu.*

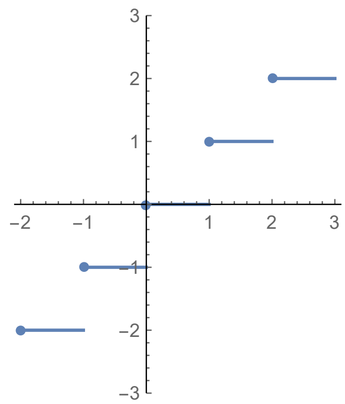
Zadatak 2.8. *Pokažite da je funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *monotono rastuća, odnosno padajuća, na intervalu* $(a, b) \subseteq D$ *ako i samo ako*

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2 \in (a, b)) \quad \& \quad (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0, \quad \textit{odnosno} \\ &(x_1, x_2 \in (a, b)) \quad \& \quad (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \leq 0. \end{aligned}$$

Primjer 2.22. *Funkciju* $[\ ]: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiranu formulom*

$$[x] := \textit{najveći cijeli broj} \ \leq x.$$

nazivamo „najveće cijelo". Tako je primjerice $[1] = 1$, $[1.2] = 1$, $[-2.3] = -3$ *itd. Zbog oblika njezinog grafa ovu funkciju zovemo još i* stepenasta funkcija *jer njezin graf podsjeća na stepenice (vidi* Sliku 2.13*). Funkcija najveće cijelo je monotono rastuća, ali ne i strogo monotono rastuća funkcija.*



Slika 2.13: *Graf funkcije* $x \mapsto [x]$

Primjer 2.23. *Funkciju* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c > 0$ *nazivamo* razlomljena linearna funkcija*. Njezino prirodno područje definicije je* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. *Označimo* $\Delta := ad - bc$. *Vrijedi:*

(i) *ako je* $\Delta = 0$, *funkcija je konstantna;*

(ii) *ako je* $\Delta < 0$, *funkcija je strogo monotono padajuća na intervalima* $(-\infty, -\frac{d}{c})$ *i* $(-\frac{d}{c}, +\infty)$*;*

(iii) *ako je* $\Delta > 0$, *funkcija je strogo monotono rastuća na intervalima* $(-\infty, -\frac{d}{c})$ *i* $(-\frac{d}{c}, +\infty)$.

(i) Pokažimo najprije da je za $\Delta = 0$ funkcija konstanta. Uvjet $\Delta = ad - bc = 0$, možemo pisati kao $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Označimo $m := \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Tada je $a = mc$ i $b = md$, pa vrijedi

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md}{cx+d} = m.$$

(ii) Uočimo najprije da $\Delta < 0 \;\Rightarrow\; bc - ad > 0$. Dokaz ćemo rastaviti na dva dijela.

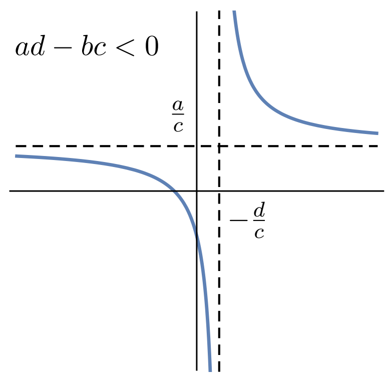
- Ako su $x_1, x_2 \in (-\infty, -\frac{d}{c})$, takvi da je $x_1 < x_2$, onda zbog $cx_1 + d < 0$ i $cx_2 + d < 0$ vrijedi:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{ax_1+b}{cx_1+d} - \frac{ax_2+b}{cx_2+d} = \frac{(bc-ad)(x_2-x_1)}{(cx_1+d)(cx_2+d)} > 0, \quad (*)$$

  pa je $f(x_1) > f(x_2)$. Dakle funkcija je padajuća na intervalu $(-\infty, -\frac{d}{c})$ (vidi *Sliku 2.14*).

- Ako su $x_1, x_2 \in (-\frac{d}{c}, +\infty)$, takvi da je $x_1 < x_2$, onda zbog $cx_1 + d > 0$ i $cx_2 + d > 0$ također vrijedi $(*)$ pa je opet $f(x_1) > f(x_2)$. Dakle funkcija je padajuća na intervalu $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ (vidi *Sliku 2.14*).

(iii) Ova tvrdnja dokazuje se analogno. Pokušajte!



Slika 2.14: *Graf razlomljene linearne funkcije: hiperbola*

Zadatak 2.9. *Nacrtajte grafove sljedećih razlomljenih linearnih funkcija:*

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, *b)* $f(x) = \frac{-2x+6}{-x+3}$, *c)* $f(x) = \frac{-x+1}{3x+2}$.

Zadatak 2.10. *Koje su od sljedećih funkcija monotono rastuće, monotono padajuće, strogo monotono rastuće, strogo monotono padajuće?*

a) $x \mapsto -3x+9,\ x \in \mathbb{R}$, *b)* $x \mapsto x^3,\ x \in \mathbb{R}$, *c)* $x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$,

d) $x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}$, *e)* $x \mapsto \dfrac{1}{x},\ x > 0$, *f)* $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ -x+2, & x \geq 1. \end{cases}$

Teorem 2.2. *Ako je funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *strogo monotona, onda je ona injektivna.*

Dokaz ovog teorema neposredno slijedi iz *Definicije 8* i *Definicije 15*. Primijetite, međutim, da obrat ovog teorema ne vrijedi. U tu svrhu skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x+1, & x > 1. \end{cases}$$

e) Lokalni ekstremi funkcije

Definicija 16. *Kažemo da funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a, b)$ postiže* lokalni minimum *ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ broja x_0 takva da je*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \textit{za svaki } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

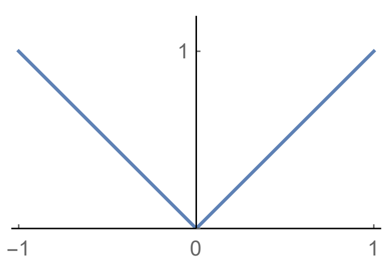
Funkcija f u točki $x_0 \in (a, b)$ postiže lokalni maksimum *ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ broja x_0 takva da je*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{za svaki } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

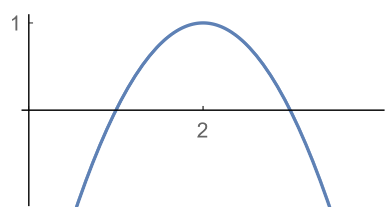
Ukoliko vrijede stroge nejednakosti za $x \neq x_0$, onda govorimo o strogom lokalnom minimumu*, odnosno* strogom lokalnom maksimumu*.*

Primjer 2.24. *Funkcija $x \mapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}$, postiže samo jedan lokalni minimum u točki* 0 (Slika 2.15a)*. Funkcija $x \mapsto 1 - (x - 2)^2$, $x \in \mathbb{R}$, postiže samo jedan lokalni maksimum u točki* 2 (Slika 2.15b)*. Funkcija $x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, postiže beskonačno mnogo lokalnih minimuma i lokalnih maksimuma* (Slika 2.15c)*.*

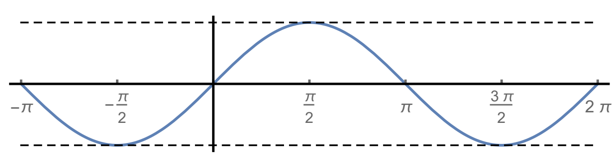
(a) $x \mapsto |x|,\ x \in \mathbb{R}$



(b) $x \mapsto 1-(x-2)^2$



(c) $x \mapsto \sin x,\ x \in \mathbb{R}$



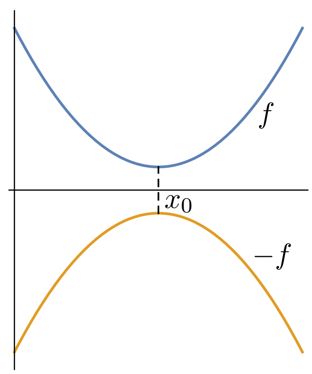
Slika 2.15

Primjedba 2.6. *Budući da u svaku okolinu $\mathcal{O}(x_0)$ broja x_0 možemo smjestiti jednu simetričnu okolinu (uvijek postoji $\delta > 0$, takav da je $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathcal{O}(x_0)$), onda* Definiciju 16 *možemo i ovako zapisati:*

> *Kažemo da funkcija $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a, b)$ postiže lokalni minimum ako postoji realan broj $\delta > 0$, takav da za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vrijedi: $f(x) \geq f(x_0)$, tj.*
>
> $$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0). \tag{2.5}$$

Slično se može definirati i lokalni maksimum.

Primijetimo još da ako funkcija f u točki x_0 ima lokalni minimum, onda funkcija $-f$ u istoj točki ima lokalni maksimum (vidi Sliku 2.16*).*



Slika 2.16: *Lokalni maksimum funkcije $(-f)$ postiže se u točki u kojoj funkcija f postiže lokalni minimum*

f) Ograničenost, infimum i supremum funkcije

Definicija 17. *Kažemo da je realna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$*

(i) ograničena odozdo*, ako postoji broj $m \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$f(x) \geq m \quad \text{za svaki } x \in D \tag{2.6}$$

(ii) ograničena odozgo*, ako postoji broj $M \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$f(x) \leq M \quad \text{za svaki } x \in D \tag{2.7}$$

(iii) ograničena*, ako je ograničena i odozdo i odozgo.*

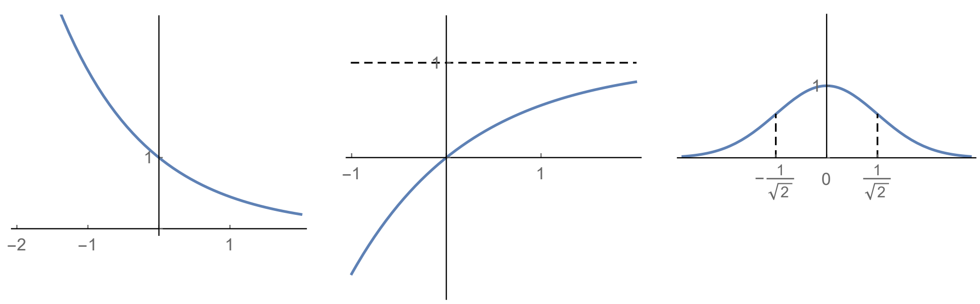
Svaki takav broj m za koji vrijedi (2.6) zovemo donja ograda, a svaki takav broj M za koji vrijedi (2.7) zovemo gornja ograda *funkcije f.*

Primjer 2.25. *Funkcija $x \mapsto e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, ograničena je odozdo ali ne i odozgo. Njena donja ograda je svaki nepozitivan realan broj* (Slika 2.17a)*.*

Funkcija $x \mapsto 1 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, ograničena je odozgo, ali ne i odozdo. Njena gornja ograda je svaki realan broj $M \geq 1$ (Slika 2.17b)*.*

Funkcija $x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ograničena je i odozdo (svakim nepozitivnim realnim brojem) i odozgo (svakim realnim brojem $M \geq 1$). Dakle, ova funkcija je ograničena (Slika 2.17c)*.*

(a) $x \mapsto e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $x \mapsto 1 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ (c) $x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$



Slika 2.17: *Ograničene i neograničene funkcije*

Primjedba 2.7. *Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ odozdo ograničena brojem $m \in \mathbb{R}$, a odozgo brojem $M \in \mathbb{R}$, onda je*

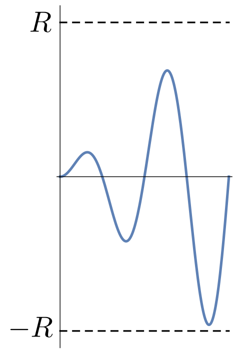
$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{za svaki } x \in D.$$

Ako označimo $R := max\{|m|, |M|\}$, onda vrijedi

$$-R \leq f(x) \leq R, \quad \text{za svaki } x \in D,$$

što možemo pisati kao (vidi Sliku 2.18*).*

$$|f(x)| \leq R, \quad \text{za svaki } x \in D. \tag{2.8}$$



Slika 2.18: *Ograničena funkcija*

Teorem 2.3. *Suma i produkt ograničenih funkcija ponovno je ograničena funkcija.*

Dokaz. Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$ ograničene funkcije. Tada prema *Primjedbi 2.7* postoje brojevi $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$|f(x)| \leq R_1 \ \ \& \ \ |g(x)| \leq R_2 \quad \text{za svaki } x \in D.$$

Koristeći nejednakost trokuta imamo:

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq R_1 + R_2, \quad (\text{za svaki } x \in D).$$

Uz oznaku $R := R_1 + R_2$ dobivamo

$$|(f+g)(x)| \leq R \quad \text{za svaki } x \in D.$$

Dokaz za produkt funkcija je analogan. □

Definicija 18. *Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$*

(i) ograničena odozdo, onda njenu najveću donju ogradu nazivamo infimum i označavamo $\inf\limits_D f$.

(ii) ograničena odozgo, onda njenu najmanju gornju ogradu nazivamo supremum i označavamo $\sup\limits_D f$.

Uočimo da je

$$\inf_D f = \inf\{f(x) : x \in D\} \qquad \text{i} \qquad \sup_D f = \sup\{f(x) : x \in D\}.$$

Primjer 2.26. *Infimum funkcije $x \mapsto e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, iz* Primjera 2.25 *je* 0*, a supremum ne postoji. Supremum funkcije $x \mapsto 1 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, je* 1*, a infimum ne postoji. Infimum funkcije $x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, je* 0*, a supremum* 1.

g) Globalni ekstrem

Definicija 19. *Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D$ postiže* globalni minimum *na D ako je $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in D$.*

Analogno se definira i globalni maksimum *na D. Ukoliko za svaki $x \neq x_0$ vrijede stroge nejednakosti, govorimo o* strogom globalnom ekstremu*.*

Primjer 2.27. *Nijedna od funkcija iz* Primjera 2.25 *ne postiže globalni minimum. Globalni maksimum postiže jedino funkcija $x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, i to u točki* 0.

Primjedba 2.8. *Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D$ postiže globalni minimum, onda vrijedi $f(x_0) = \inf\limits_{x \in D} f(x)$.*

Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D$ postiže globalni maksimum, onda vrijedi $f(x_0) = \sup\limits_{x \in D} f(x)$.

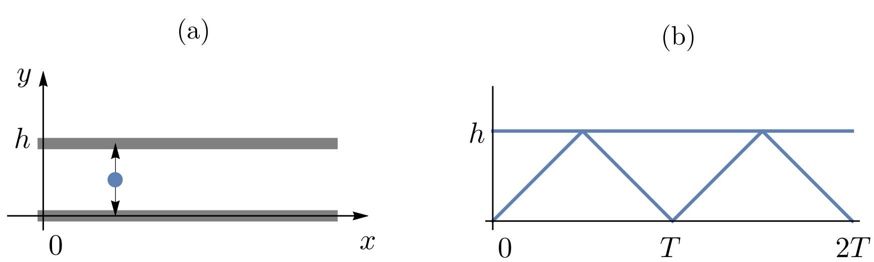
h) Periodičnost

Definicija 20. *Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$* periodična *ako postoji pozitivan broj $T \in \mathbb{R}$, takav da je*

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{za svaki } x \in D. \tag{2.9}$$

Najmanji od brojeva T za koji je ispunjeno (2.9) nazivamo temeljni period *funkcije f.*

Primjer 2.28. *Elastična kuglica u vakuumu bez prisustva sile teže udara u dvije paralelne stijenke postavljene na udaljenosti h* (Slika 2.19a).



Slika 2.19: *Periodična funkcija*

Funkcija koja daje trenutnu udaljenost kuglice od donje stijenke je periodična funkcija čiji graf je prikazan na Slici 2.19b.

2.3 Elementarne funkcije

Mnoge funkcije koje se javljaju u različitim primjerima sastavljene su na neki način od tzv. osnovnih elementarnih funkcija:

a) opća potencija $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

b) eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$, $a > 0$,

c) logaritamska funkcija $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$,

d) trigonometrijske funkcije: sin, cos, tg, ctg,

e) ciklometrijske funkcije: arcsin, arccos, arctg, arcctg.

Definicija 21. Elementarnim funkcijama *nazivamo one funkcije koje se dobivaju iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja) i konačnog broja komponiranja osnovnih elementarnih funkcija.*

Primjer 2.29. *Navedimo nekoliko primjera elementarnih funkcija:*

$$f(x) = \frac{2x^2 - \ln(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}, \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$
$$h(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}, \quad k(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}.$$

Detaljnije ćemo proanalizirati neke elementarne funkcije.

2.3.1 Opća potencija

Općom potencijom zovemo funkciju

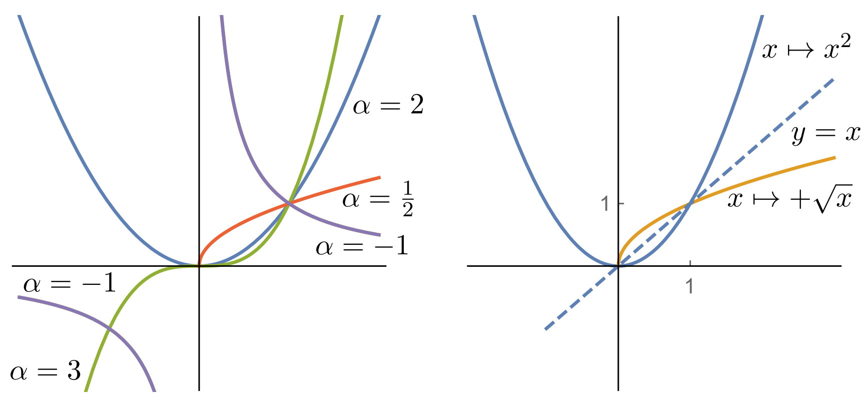
$$x \mapsto x^\alpha, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

U nekim slučajevima (kao primjerice: $\alpha = 2$) domena opće potencije može se proširiti na čitav skup $\mathbb{R}$. Specijalno, ako je

- $\alpha \in \mathbb{N}$, opća potencija može se proširiti na čitav skup $\mathbb{R}$,
- $\alpha \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, opća potencija može se proširiti na skup $\mathbb{R} \backslash \{0\}$,
- $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, prirodno područje definicije ovisi o tome jesu li p, q parni ili neparni. Tako je primjerice opća potencija $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ definirana za $x \geq 0$, a opća potencija $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Na *Slici 2.20a* prikazano je nekoliko općih potencija za različite vrijednosti eksponenta α.

(a) *Opća potencija* (b) Funkcije $x \mapsto x^2$ i $x \mapsto +\sqrt{x}$



Slika 2.20: *Grafovi nekih općih potencija*

Funkcija $x \mapsto x^2$ nije injekcija na $\mathbb{R}$ jer primjerice u točkama -2 i 2 prima istu vrijednost i po *Definiciji 11*, str. 36 nema inverznu funkciju. Zato ćemo definirati novu funkciju $F\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$. Funkcija F je **restrikcija** (**suženje**) funkcije f na skup $[0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ i ona je injekcija (pa i bijekcija). Njena inverzna funkcija je $F^{-1} : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, $\quad F^{-1}(x) = \sqrt{x}$, jer je

$$F(F^{-1}(x)) = F(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{i}$$

$$F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x.$$

Grafovi funkcija F i F^{-1} prikazani su u jednom koordinatnom sustavu na *Slici 2.20b*. Slično kao u *Primjeru 2.18*, str. 37 vidi se da su grafovi Γ_F i $\Gamma_{F^{-1}}$ osno simetrični obzirom na simetralu I. i III. kvadranta, tj. obzirom na pravac $y = x$.

2.3.2 Polinomi

Funkciju $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0 \qquad (2.11)$$

nazivamo **polinomom n-tog stupnja na** $\mathbb{R}$. Brojeve $a_i \in \mathbb{R}$ nazivamo **koeficijenti** polinoma. Specijalno broj a_n nazivamo **najstariji** ili **vodeći**, a a_0 **slobodni** koeficijent. Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom **normiran**. Navedimo bez dokaza sljedeći teorem (vidi [7]):

Teorem 2.4. *Dva polinoma* $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ *i* $R_m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ *su jednaki onda i samo onda ako je*

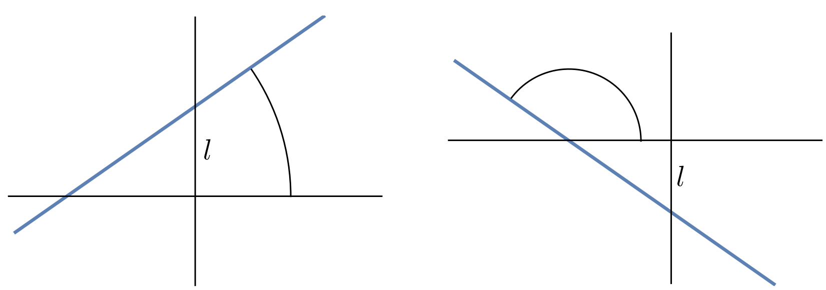
(i) $m = n$, *te*

(ii) $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Primjedba 2.9. *Polinom* $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ *kome su svi koeficijenti jednaki 0 naziva se* nul-polinom. *Ako je samo slobodni koeficijent različit od nule, govorimo o* polinomu 0-tog stupnja. *Polinom stupnja 1 naziva se još i* linearna funkcija[3], *polinom stupnja 2* kvadratna funkcija, *itd.*

Primjer 2.30. *U raznim primjenama često se koristi polinom prvog stupnja ili linearna funkcija* $f(x) = kx + l$. *Njezin graf je pravac. Koeficijent* k *naziva se* koeficijent smjera *i predstavlja tangens kuta što ga pravac* Γ_f *zatvara s pozitivnim smjerom apscise. Ako je* $k > 0$, *taj kut je šiljasti, a ako je* $k < 0$, *taj kut je tupi* (Slika 2.21). *Slobodni koeficijent* l *predstavlja odsječak pravca* Γ_f *na ordinati* (Slika 2.21).

(a) $k > 0$ (b) $k < 0$



Slika 2.21: *Rastuća i padajuća linearna funkcija*

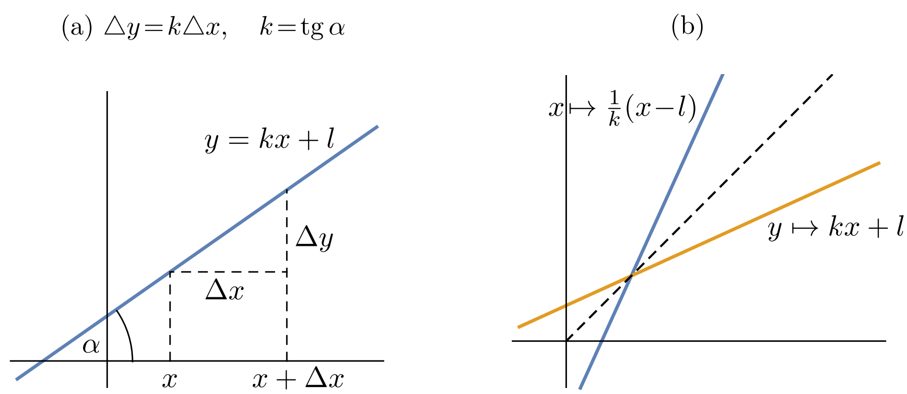
Primjedba 2.10. *Linearna funkcija je jedina funkcija koja ima svojstvo da je promjena (prirast) zavisne varijable y proporcionalna promijeni nezavisne varijable x. Koeficijent proporcionalnosti je baš koeficijent smjera k. Naime, ako se nezavisna varijabla x promijeni za* Δx,

[3] U matematičkoj literaturi pod linearnom funkcijom obično se podrazumijeva funkcija $f(x) = ax$ jer ona ima svojstvo linearnosti $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. To svojstvo nema tzv. afina funkcija $g(x) = kx + l$. Ipak, tradicionalno u primjerima za ovu funkciju rabi se naziv „linearna funkcija" pa ćemo i mi dalje koristiti ovaj termin.

onda će se zavisna varijabla promijeniti za Δy*, pa će biti* (Slika 2.22a)

$$y + \Delta y = k(x + \Delta x) + l.$$

Kako je $y = kx + l$*, odavde dobivamo* $\Delta y = k\Delta x$*.*



Slika 2.22

Zadatak 2.11. *Pokažite da je inverzna funkcija linearne funkcije* $f(x) = kx + l$, $k \neq 0$, *zadana s*

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{k}(x - l).$$

Inverzna funkcija linearne funkcije $f(x) = l$ *(za* $k = 0$*) ne postoji. Zašto? Grafovi* Γ_f *i* $\Gamma_{f^{-1}}$ *prikazani u jednom koordinatnom sustavu međusobno su osno simetrični obzirom na simetralu I. i III. kvadranta (pravac* $y = x$*)* (Slika 2.22b).

Zadatak 2.12. *Odredite udaljenost proizvoljne točke* $T_0 = (x_0, y_0)$ *do pravca* $y = kx + l$, $k \neq 0$*. Odredite* normalu *(pravac okomit na zadani pravac) kroz točku* T_0*.*

Primjedba 2.11. *Osim* eksplicitno $y = kx + l$*, jednadžbu pravca često zapisujemo u tzv.* implicitnom *obliku:*

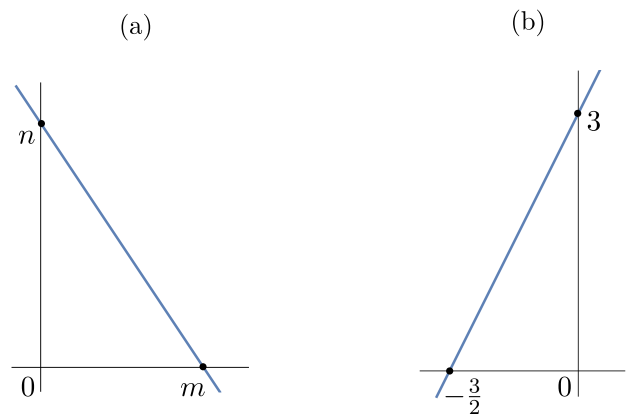
$$ax + by + c = 0$$

ili segmentnom *obliku*

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Ovdje je broj m odsječak na osi x, a broj n odsječak na osi y (vidi Sliku 2.23a*).*

Primjerice, linearna funkcija $y = 2x + 3$ ima implicitni oblik: $2x - y + 3 = 0$ i segmentni oblik $\frac{x}{-3/2} + \frac{y}{3} = 1$, a njezin graf prikazan je na Slici 2.23b*.*



Slika 2.23: *Segmentni oblik jednadžbe pravca*

Primjer 2.31. *Polinom drugog stupnja*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

najčešće nazivamo kvadratna funkcija*. Njezin graf je* parabola *s tjemenom u točki $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$.*

Nul-točke kvadratne funkcije mogu se dobiti rješavanjem pripadne kvadratne jednadžbe

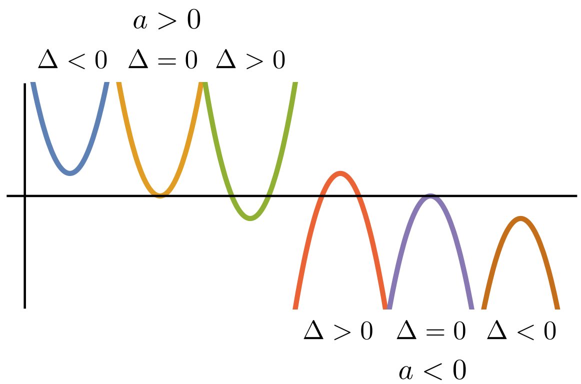
$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

čija se rješenja eksplicitno mogu izraziti formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Rješenja x_1, x_2 mogu biti realna i međusobno različita ($\Delta > 0$), realna i međusobno jednaka ($\Delta = 0$) ili kompleksno-konjugirana ($\Delta < 0$). Broj Δ nazivamo diskriminanta *kvadratne jednadžbe.*

Ako je $a > 0$, kvadratna funkcija je konveksna, a ako je $a < 0$, konkavna. Na Slici 2.24 *prikazani su svi mogući položaji koje može zauzeti graf kvadratne funkcije u koordinatnom sustavu.*



Slika 2.24: *Mogući položaji grafa kvadratne funkcije*

Zadatak 2.13. *Za zadanu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skicirajte graf Γ_f i odredite skupove $S^+ = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$, $S^- = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$.*

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$, *b)* $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$,

c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$, *d)* $f(x) = x^5 - 6x^4 + 22x^2 + 15x$.

Zadatak 2.14. *Ako je kvadratna jednadžba normirana: $x^2+px+q = 0$, pokažite da vrijede Vièteove[4] formule:*

$$x_1 + x_2 = -p \quad \& \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Kako izgledaju Vièteove formule za nenormiranu kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$?

Primjer 2.32. *Često je potrebno kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2+bx+c$ svesti na tzv. potpuni kvadrat (kanonski oblik)*

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

Točka $T(h, k)$ tada je tjeme odgovarajuće parabole. Primjerice, za kvadratnu funkciju $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ imamo

$$f(x) = 2\left(x^2 - x + \tfrac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2}\right] = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{5}{2}.$$

Zadatak 2.15. *Svedite na potpuni kvadrat i skicirajte grafove sljedećih kvadratnih funkcija. Odredite njihova tjemena i nul-točke.*

a) $f(x) = -2x^2-2x-2$, *b)* $g(x) = \frac{1}{3}x^2-2x+\frac{7}{2}$, *c)* $h(x) = 5x^2-10x-2$.

[4] François Viète (1540-1603), francuski matematičar

Općenito, za polinom n-tog stupnja najčešće se vežu sljedeći problemi:

- mogućnost jednostavnog računanja vrijednosti polinoma u nekoj točki;
- određivanje nul-točaka polinoma;
- problem interpolacije: za $(n+1)$ točaka $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ treba odrediti polinom n-tog stupnja P_n, tako da bude $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Prva dva problema detaljnije ćemo razmotriti u ovom poglavlju, a o trećem problemu možete vidjeti u *Dodatku 8.1.*

Hornerova shema

Pretpostavimo da je zadan polinom

$$P_5(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 1$$

i da treba izračunati njegovu vrijednost u točki $a \in \mathbb{R}$. Možemo pisati

$$P_5(a) = ((((2a - 3)a + 5)a + 1)a - 4)a + 1.$$

Treba dakle, najstariji koeficijent pomnožiti s a i tome dodati sljedeći koeficijent polinoma. Tako dobiveni rezultat ponovno treba pomnožiti s a i tome dodati sljedeći koeficijent itd. Cijela procedura može se zapisati u obliku tablice (Hornerova[5] shema), koja za $a = 3$ izgleda ovako

$a = 3$	2	-3	5	1	-4	1
	-	6	9	42	129	375
	2	3	14	43	125	**376**

Dakle, $P_5(3) = 376$.

Primjer 2.33. *Primjenom Hornerove sheme izračunajmo vrijednost polinoma* $P_6(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 5x - 1$ *za* $x = -1$ *i* $x = 2$.

[5] William Georg Horner (1786-1837) njemački matematičar, objavio je ovaj algoritam 1819. godine, ali je još 1804. talijanski matematičar Paolo Ruppini (1765-1822) dao sličan postupak.

-1	1	0	-2	3	0	-5	-1
	-	-1	1	1	-4	4	1
	1	-1	-1	4	-4	-1	**0**

2	1	0	-2	3	0	-5	-1
	-	2	4	4	14	28	46
	1	2	2	7	14	23	**45**

Dakle, $P_6(-1) = 0$, $P_6(2) = 45$. Broj (-1) ujedno je i nul-točka polinoma P_6.

Zadatak 2.16. *Izračunajte vrijednost polinoma*

$$P_5(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 7x - 16$$

za $x = 2, -3, 12$.

Zadatak 2.17. *Pokažite da Hornerova shema za polinom P daje (posljednji redak u tablici) koeficijente polinoma Q koji predstavlja kvocijent pri dijeljenju polinoma P s polinomom 1. stupnja $(x-a)$, kao i ostatak r pri tom dijeljenju, tj.*

$$\frac{P(x)}{x-a} = Q(x) + \frac{r}{x-a}, \quad x \neq a.$$

Izradite program koji će učitati stupanj n polinoma P, njegove koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i broj a, te dati vrijednost polinoma P u točki a.

Primjedba 2.12. *Ako je Q kvocijent, a r ostatak pri dijeljenju polinoma P s polinomom 1. stupnja $(x-a)$, onda vrijedi*

$$P(x) = Q(x)(x-a) + r. \tag{2.12}$$

Lako se vidi da je pri tome ostatak r jednak vrijednosti polinoma P u točki a. Tako za polinom P_6 iz Primjera 2.33 *vrijedi*

$$P_6(x) = (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 14x + 23)(x-2) + 45, \qquad P_6(2) = 45.$$

Ako je $r = 0$, onda je $x = a$ nul-točka polinoma P i vrijedi

$$P(x) = Q(x)(x-a). \tag{2.13}$$

U tom slučaju polinom 1. stupnja $x \mapsto (x-a)$ nazivamo korijen faktor.

Nul-točke polinoma

U *Primjeru 2.31*, str. 54 vidjeli smo da rješenja kvadratne jednadžbe mogu biti i kompleksni brojevi. Tako su primjerice rješenja kvadratne jednadžbe $x^2+1=0$ kompleksni brojevi $x_1=-i$, $x_2=i$. To može biti motivacija za proširenje funkcije-polinoma (2.11) na polje kompleksnih brojeva. Funkciju $P_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definiranu formulom

$$z\mapsto P_n(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0,\quad n\in\mathbb{N}_0,\quad a_i\in\mathbb{R},\quad a_n\neq 0$$

nazivamo polinomom n-tog stupnja u polju $\mathbb{C}$. Općenito se i koeficijenti polinoma mogu uzimati iz $\mathbb{C}$, ali mi ćemo se zadržati samo na razmatranju polinoma s realnim koeficijentima.

Sada možemo reći da je kompleksan broj $z_0\in\mathbb{C}$ nul-točka polinoma P_n ako vrijedi $P_n(z_0)=0$.

Teorem 2.5 (Osnovni teorem algebre[6]). *Neka je $n\in\mathbb{N}$ i $P_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $P_n(z):=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$ polinom n-tog stupnja. Tada postoje ne nužno različiti kompleksni brojevi $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ takvi da je*

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)\cdots(z-z_n)\qquad \textit{za svaki } z\in\mathbb{C}. \tag{2.14}$$

Primjedba 2.13. *Ovaj teorem daje egzistenciju n nul-točaka polinoma n-tog stupnja. Prikaz (2.14) zovemo* faktorizacija *polinoma P_n. Ako je primjerice $z_1=z_2\neq z_j$ za svaki $j>2$, onda kažemo da je z_1 dvostruka nul-točka. Općenito, kažemo da je $z_0\in\mathbb{C}$* k-struka nul-točka*, ako postoji neki polinom q takav da je*

$$q(z_0)\neq 0\ \ \&\ \ P(x)=(z-z_0)^kq(x)\ \ \textit{za svaki } x\in\mathbb{R} \tag{2.15}$$

tj. ako je polinom P djeljiv s $(x-z_0)^k$, a nije djeljiv s $(x-z_0)^{k+1}$.

[6] Njemački matematičar Carl Friedrich Gauss (1777-1855) prvi je dokazao ovaj teorem u svojoj disertaciji i to kao mladić od 22 godine. Mnogi smatraju Gaussa najvećim matematičarem svih vremena. Osim toga, bavio se fizikom i astronomijom, pa je tako s 18 godina uveo metodu najmanjih kvadrata za proračun putanja kometa i asteroida na osnovi podataka mjerenja. Također, u toj dobi pokazao kako konstruirati pravilni sedamnaesterokut. Upravo to je bio motiv da mu se u njegovom rodnom gradu Braunschweigu postavi spomenik s postoljem u obliku pravilnog sedamnaesterokuta. S 24 godine publicirao je knjigu „Disquisitiones arithmeticae" koja je imala duboki utjecaj na razvoj teorije brojeva. Carl Friedrich Gauss također je dao važan doprinos razvoju diferencijalne geometrije, teorije kompleksnih funkcija, otkriću neeuklidske geometrije, a moderna statistička teorija ne može se zamisliti bez pojma Gaussove normalne slučajne varijable.

Primjer 2.34. *Polinom* $P_4(x) = x^4 - 4x^2$ *možemo zapisati u faktoriziranom obliku* $P_4(x) = (x-0)^2(x-2)(x+2)$. *Dakle,* $x_1 = 0$ *je dvostruka nul-točka ovog polinoma s* $q(x) = (x-2)(x+2)$. *Istovremeno,* $x_2 = 2$ *i* $x_3 = -2$ *su jednostruke nul-točke.*

Teorem 2.6. *Ako je* $z_1 \in \mathbb{C}$ *nul-točka realnog polinoma* $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, *onda je i kompleksno-konjugirani broj* $\overline{z}_1 \in \mathbb{C}$ *također nul-točka tog polinoma. Nadalje, izraz* $(x - z_1)(x - \overline{z}_1)$ *može se zapisati u obliku kvadratnog trinoma s realnim koeficijentima.*

Dokaz. Iz $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z_1^k = 0$ konjugiranjem dobivamo

$$0 = \overline{P_n(z_1)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_1^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k \overline{z_1^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}_1^k = P_n(\overline{z}_1).$$

Dakle, $\overline{z}_1$ je također nul-točka polinoma P_n. Ako je $z_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda je $\overline{z}_1 = \alpha - i\beta$ pa vrijedi

$$(x - z_1)(x - \overline{z}_1) = x^2 - (z_1 + \overline{z}_1)x + z_1 \cdot \overline{z}_1 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

□

Primjedba 2.14. *Na osnovi* Teorema 2.6 *zaključujemo da svaki realan polinom možemo općenito faktorizirati kao*

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{\lambda_s},$$

$$\text{gdje je } (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) + 2(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) = n,$$

pri čemu su x_r, $r = 1, \ldots, k$, *realne nul-točke višestrukosti* α_r. *Svaki od faktora* $x^2 + p_i x + q_i$ *je* ireducibilan na $\mathbb{R}$, *tj. nijedan od njih ne može se prikazati u obliku produkta dva polinoma u* $\mathbb{R}$ *takvih da je stupanj svakog od njih barem 1.*

Mi ćemo se zadržati samo na problemu određivanja realnih nul-točaka polinoma. U tim točkama graf polinoma siječe ili dodiruje os x. To općenito već za polinom trećeg stupnja nije jednostavan posao. U većini slučajeva numeričkim metodama (vidi *Primjer 6.8*, str. 146 ili detaljnije [29]) možemo dobiti aproksimaciju nul-točke. Ipak za neke specijalne slučajeve moguće je dobiti egzaktne vrijednosti nul-točaka algebarskim putem. Vrijedi:

Teorem 2.7. *Ako normirani polinom s cijelim koeficijentima ima racionalnih nul-točaka, one su djelitelji slobodnog koeficijenta.*

Primjer 2.35. *Pronađimo sve nul-točke polinoma*

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 31x + 70.$$

Prema *Osnovnom teoremu algebre* ovaj polinom ima 3 nul-točke. Najprije ćemo koristeći *Teoremu 2.7* pronaći sve racionalne nul-točke. Kandidati za njih su djelitelji broja 70: ± 1, ± 2, ± 5, ± 7, ± 10, ± 14, ± 35, ± 70. Prema Hornerovoj shemi izračunat ćemo $P(2)$:

2	1	-4	-31	70
	-	2	-4	-70
	1	-2	-35	**0**

Dakle $P(2) = 0$ i prva nul-točka je $x_1 = 2$. Osim toga, prema (2.13) vrijedi

$$x^3 - 4x^2 - 31x + 70 = (x-2)(x^2 - 2x - 35).$$

Ostale dvije nul-točke pronaći ćemo rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 - 2x - 35 = 0$. Dobivamo $x_2 = -5$, $x_3 = 7$. Faktorizirani oblik polinoma P glasi

$$P(x) = (x-2)(x+5)(x-7).$$

Primjer 2.36. *Pronađimo sve nul-točke polinoma*

$$P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2.$$

Kao i u prethodnom primjeru, najprije ćemo potražiti racionalne nul-točke. Ovaj polinom ne zadovoljava uvjete *Teorema 2.7* (nije normiran). Zato ćemo jednadžbu

$$6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad (*)$$

pomnožiti sa 6^2:

$$6^3x^3 + 11 \cdot 6^2x^2 - 3 \cdot 6^2x - 6^2 \cdot 2 = 0$$

i uvesti supstituciju $6x = y$. Tako dobivamo jednadžbu

$$y^3 + 11y^2 - 18y - 72 = 0 \qquad (**)$$

Sada korijene jednadžbe $(**)$ tražimo među djeliteljima broja 72: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 9, ± 12, ± 18, ± 24, ± 36, ± 72. Prema Hornerovoj shemi izračunat ćemo vrijednost lijeve strane jednadžbe $(**)$ za $y = -2$

-2	1	11	-18	-72
	-	-2	-18	72
	1	9	-36	**0**

Dakle, jedan korijen jednadžbe (∗∗) je $y_1 = -2$. Ostala dva pronaći ćemo rješavanjem jednadžbe $y^2 + 9y - 36 = 0$. Dobivamo $y_2 = -12$, $y_3 = 3$. Nakon toga iz supstitucije $6x = y$ dobivamo sve nul-točke polinoma P: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{1}{2}$. Faktorizirani oblik polinoma P glasi

$$P(x) = 6\left(x + \tfrac{1}{3}\right)(x+2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = (3x+1)(x+2)(2x-1).$$

Primjer 2.37. *Pronađimo sve nul-točke polinoma*

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 4x + 8.$$

Prema *Osnovnom teoremu algebre* ovaj polinom ima 5 nul-točaka. Kao i u prethodnom primjeru najprije ćemo koristeći *Teorem 2.7* potražiti racionalne nul-točke. Kandidati za njih su djelitelji broja 8: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Prema Hornerovoj shemi izračunat ćemo $P(2)$:

2	1	-2	0	0	-4	8
	-	2	0	0	0	-8
	1	0	0	0	-4	**0**

Dakle, $P(2) = 0$ i prva nul-točka je $x_1 = 2$. Osim toga, prema (2.13) vrijedi

$$x^5 - 2x^4 - 4x + 8 = (x-2)(x^4 - 4).$$

Ostale dvije nul-točke pronaći ćemo rješavanjem bikvadratne jednadžbe $x^4 - 4 = 0$, odnosno $(x^2-2)(x^2+2) = 0$. Dobivamo $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -i\sqrt{2}$, $x_5 = i\sqrt{2}$. Faktorizirani oblik polinoma P glasi

$$P(x) = (x-2)(x^2-2)(x^2+2).$$

Zadatak 2.18. *Odredite realne nul-točke sljedećih polinoma i napišite njihov faktorizirani oblik:*

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$, *b)* $P(x) = x^4 + 5x^3 - 38x^2 - 168x$,

c) $P(x) = 30x^3 - 23x^2 - 7x + 6$, *d)* $P(x) = 24x^4 - 38x^3 + 3x^2 + 17x - 6$.

Zadatak 2.19. *Matematičkom indukcijom pokažite da svaki polinom n-tog stupnja ($n \in \mathbb{N}$) ima najviše n realnih nul-točaka.*

Primijetite da to znači da se može dogoditi i da polinom nema nijednu realnu nul-točku.

2.3.3 Racionalne funkcije

Funkciju

$$Q(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}, \tag{2.16}$$

nazivamo racionalna funkcija. Ako je $m < n$, govorimo o pravoj racionalnoj funkciji, a ako je $m \geq n$, o nepravoj racionalnoj funkciji. Ako je $n = 0$, funkcija Q postaje polinom.

Primjer 2.38. *Funkcija*

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c > 0$$

je neprava racionalna funkcija. Nazivamo je razlomljena linearna funkcija*. Već ranije u* Primjeru 2.23*, str. 43 pokazali smo da je u ovisnosti o predznaku broja $\Delta = ad - bc$ ova funkcija po dijelovima rastuća, padajuća ili stacionarna (konstantna). Njena domena je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$, ima jednu vertikalnu asimptotu $x = -\frac{d}{c}$ i jednu horizontalnu asimptotu $y = \frac{a}{c}$. Njezin graf prikazan je na* Slici 2.14*, str. 44.*

Svaku nepravu racionalnu funkciju možemo zapisati (dijeljenjem) u obliku zbroja jednog polinoma i prave racionalne funkcije:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_s(x)}{P_n(x)}, \quad s < n.$$

Za pravu racionalnu funkciju $Q(x) = \frac{r(x)}{p(x)^k}$ $(k \geq 1)$ kažemo da je parcijalni razlomak ako je p ireducibilan polinom u $\mathbb{R}$. Vrijedi:

Teorem 2.8. *Svaku pravu racionalnu funkciju moguće je na jedinstven način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.*

U kojem obliku treba tražiti parcijalne razlomke neke prave racionalne funkcije, kao i dokaz ovog teorema, može se naći u [7]. Ovdje navodimo samo nekoliko ilustrativnih primjera.

Primjer 2.39. *Pravu racionalnu funkciju*

$$Q(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

treba rastaviti na parcijalne razlomke.

Najprije treba pronaći realne nul-točke polinoma u nazivniku koristeći *Teorem 2.7.* Dobivamo $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Sada nazivnik funkcije Q možemo faktorizirati: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. Rastav na parcijalne razlomke tražit ćemo u sljedećem obliku:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Množenjem ove jednadžbe s $(x-1)(x-2)(x-3)$ dobivamo

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 3x^2 + 2x + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Uvrštavajući u prethodnu jednadžbu redom nul-točke nazivnika, dobivamo:

$$\begin{array}{llll} x = 1: & 6 = A(1-2)(1-3) & \Rightarrow & A = 3 \\ x = 2: & 17 = B(2-1)(2-3) & \Rightarrow & B = -17 \\ x = 3: & 34 = C(3-1)(3-2) & \Rightarrow & C = 17 \end{array}$$

Dakle,

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{3}{x-1} - \frac{17}{x-2} + \frac{17}{x-3}.$$

Primjer 2.40. *Pravu racionalnu funkciju*

$$Q(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$

treba rastaviti na parcijalne razlomke.

Polinom u nazivniku ima samo jednu realnu nul-točku $x_0 = -2$. Zato ga možemo faktorizirati kao $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + 1)(x + 2)$. Rastav na parcijalne razlomke tražit ćemo u sljedećem obliku:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Množenjem prethodne jednadžbe s $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$ dobivamo:

$$x^2 - 3x + 2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dalje nećemo moći postupiti kao u prethodnom primjeru. Umjesto toga iskoristit ćemo teorem o jednakosti dva polinoma (*Teorem 2.4*, str. 52) i izjednačiti koeficijente uz jednake potencije. Dobivamo:

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & & & = & 1 \\ & & 2B & + & C & = & -3 \\ A & & & + & 2C & = & 2 \end{array}$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo $A = \frac{12}{5}$, $B = -\frac{7}{5}$, $C = -\frac{1}{5}$. Dakle,

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{\frac{12}{5}}{x+2} - \frac{\frac{7}{5}x + \frac{1}{5}}{x^2+1}.$$

Zadatak 2.20. *Rastavite na parcijalne razlomke*

a) $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+1)}$, *b)* $\dfrac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$,

c) $\dfrac{x+1}{x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6}$, *d)* $\dfrac{2x^2 + 7x + 1}{x^4 - x^2}$.

2.3.4 Eksponencijalna funkcija

Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definiranu formulom

$$f(x) = a^x, \quad a > 0 \tag{2.17}$$

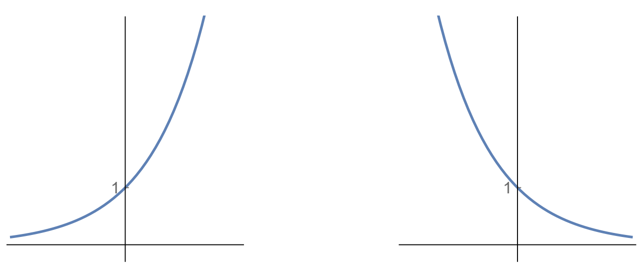
nazivamo eksponencijalna funkcija s bazom a.

Primjedba 2.15. *Ako bi bilo $a < 0$, onda bi primjerice za $x = \frac{1}{2}$ funkcija definirana s (2.17) primala kompleksne vrijednosti. Za $a = 1$ ova funkcija bi degenerirala u konstantu $x \mapsto 1$.*

Eksponencijalna funkcija je bijekcija iz $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$, čiji graf uvijek prolazi točkom $(0, 1)$.

Ako je $a > 1$, eksponencijalna funkcija (2.17) je rastuća, a ako je $0 < a < 1$, ona je padajuća (vidi *Sliku 2.25*).

(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$



Slika 2.25: *Graf eksponencijalne funkcije*

Istaknimo još osnovna svojstva eksponencijalne funkcije. Za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(i) $f(x_1+x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$, tj. $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\cdot a^{x_2}$,

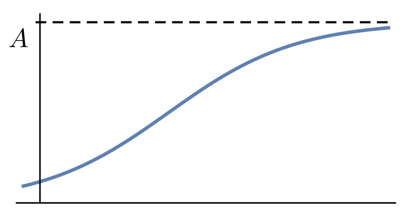
(ii) $f(x_1 - x_2) = f(x_1)/f(x_2)$, tj. $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$,

(iii) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1\cdot x_2}$.

Primjer 2.41. *Prema Malthusovoj teoriji neograničenog rasta, broj živih bića raste eksponencijalno po zakonu* $t \mapsto be^{ct}$, *gdje su* $b, c\,(c > 0)$ *parametri.*

Pod idealnim uvjetima broj bakterija u kulturi raste eksponencijalno. Rast tumora također je eksponencijalan. Količina neraspadnute materije nekog radioaktivnog materijala opisana je također eksponencijalnom funkcijom. Stanje kapitala prilikom složenog ukamaćivanja također se opisuje eksponencijalnom funkcijom (vidi [7]).

Primjer 2.42. *Takozvana* logistička funkcija $f(t) = \frac{A}{1+be^{-ct}}$ *često se koristi u primijenjenim istraživanjima: rast broja živih bića u uvjetima ograničenih resursa, prirast žive mase (kokica, svinja), difuzija novog proizvoda u marketingu itd. Njen graf prikazan je na* Slici 2.26.



Slika 2.26: *Graf logističke funkcije*

Zadatak 2.21. *Skicirajte grafove sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = 2^x$, *b)* $f(x) = 2^{-x}$, *c)* $f(x) = 4 - 2^{-x}$,

d) $f(x) = 2^{|x|}$, *e)* $f(x) = 2^{x+3}$, *f)* $f(x) = 2^x + 2^{-x}$,

g) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, *h)* $f(x) = \frac{2}{2^x+2^{-x}}$, *i)* $f(x) = \frac{2}{2^x-2^{-x}}$.

Zadatak 2.22. *Riješite eksponencijalne jednadžbe:*

a) $9^{2x+5} = 27\cdot 3^{x-1}$, *b)* $3^{x+1} - 4\cdot 3^{x-1} = 45$,

c) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$.

2.3.5 Logaritamska funkcija

Eksponencijalna funkcija

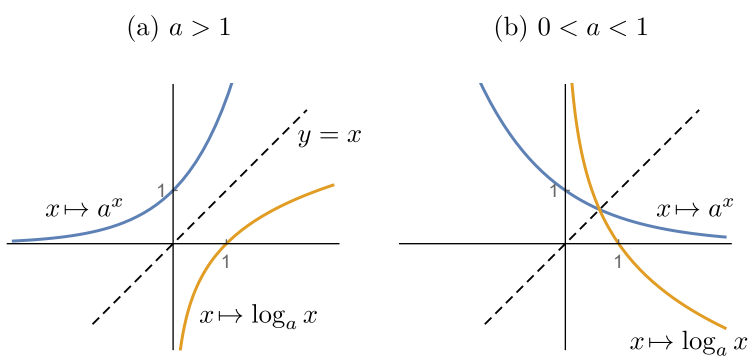
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\quad f(x)=a^x,\quad a>0\ \text{ i }\ a\neq 1$$

je bijekcija pa prema tome ima inverznu funkciju f^{-1} koju označavamo s $\log_a$:

$$\log_a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\quad a>0,\quad a\neq 1 \tag{2.18}$$

Pri tome $\log_a(x)$, $x>0$, pišemo kao $\log_a x$ i zovemo logaritam broja x po bazi a.

Poznavajući graf eksponencijalne funkcije, graf funkcije $\log_a$ možemo dobiti tako da napravimo osno simetričnu sliku grafa eksponencijalne funkcije obzirom na simetralu I. i III. kvadranta, tj. pravca $y=x$ (vidi *Sliku 2.27* i usporedi s *Primjerom 2.18*, str. 37). Iz slike se vidi da je logaritamska funkcija za $a>1$ strogo rastuća, a za $0<a<1$ strogo padajuća funkcija. Jedina nul-točka logaritamske funkcije $x\mapsto\log_a x$ je $x_0=1$ jer je $a^0=1$.



Slika 2.27: *Graf logaritamske funkcije*

Primjedba 2.16. *Primjenjujući formule (2.2) na eksponencijalnu funkciju $f(x)=a^x$ i logaritamsku funkciju $f^{-1}(x)=\log_a x$ dobivamo korisne formule:*

$$a^{\log_a x} = x,\quad x>0, \tag{2.19}$$

$$\log_a a^x = x,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Iz formule (2.19) vidimo da je $\log_a x$ eksponent kojim treba potencirati bazu a da se dobije broj x. Tako je, primjerice,

$$\begin{aligned} &\log_2 32 = 5 && \text{jer je} \quad 2^5 = 32, \\ &\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4 && \text{jer je} \quad \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-4} = 81, \\ &\log_5 \tfrac{1}{125} = -3 && \text{jer je} \quad 5^{-3} = \tfrac{1}{125}. \end{aligned}$$

Koristeći osnovna svojstva eksponencijalne funkcije f, dobivamo **osnovna svojstva logaritamske funkcije** f^{-1}:

(i) $f^{-1}(x_1 \cdot x_2) = f^{-1}(x_1) + f^{-1}(x_2)$, tj.

$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

(ii) $f^{-1}(\frac{x_1}{x_2}) = f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)$, tj.

$\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2$,

(iii) $\log_a x_1^{x_2} = x_2 \log_a x_1$,

(iv) $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$.

Evo kratkog obrazloženja navedenih svojstava.

(i) Ako označimo $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$, onda prema (2.19) vrijedi: $x_1 = a^{y_1}$, $x_2 = a^{y_2}$. Zato je $x_1 \cdot x_2 = a^{y_1+y_2}$, odakle je prema (2.20) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = y_1 + y_2$.

(ii) Ova jednakost dokazuje se analogno (i).

(iii) Kako je $x_1^{x_2} = (a^{\log_a x_1})^{x_2} = a^{x_2 \log_a x_1}$, pomoću (2.20) dobivamo traženu jednakost.

(iv) Logaritmiranjem jednakosti $x = a^{\log_a x}$ po bazi b i primjenom (iii) dobivamo traženu jednakost.

Primjer 2.43. *Riješimo logaritamsku jednadžbu*

$$\log_4(x+6) - \log_4(x-1) = \log_4 10 - \log_4 2.$$

Koristeći prethodno navedena pravila, dobivamo

$$\log_4 \frac{x+6}{x-1} = \log_4 5 \;\Rightarrow\; \frac{x+6}{x-1} = 5 \;\Rightarrow\; x = \frac{11}{4}.$$

Zadatak 2.23. *Pronađite realna rješenja jednadžbi:*

a) $\log_5 x^2 = -2$, *b)* $\log_6(2x-3) = \log_6 12 - \log_6 3$,

c) $\log_x 10 = 10$, *d)* $\frac{1}{2}\log_5(x-2) = 3\log_5 2 - \frac{3}{2}\log_5(x-2)$,

e) $\log_2 \sqrt{x} = \sqrt{\log_2 x}$, *f)* $\log_a(x-4) - \log_a(3x-10) = \log_a(\frac{1}{x})$.

Zadatak 2.24. *Ako je* $\log_a 7 = 0.8$ *i* $\log_a 3 = 0.5$*, izrazite kao decimalni broj:*

$$a)\ \log_a \frac{7}{3}, \quad b)\ \log_a \sqrt[4]{3}, \quad c)\ \log_a 63.$$

Zadatak 2.25. *Skicirajte grafove funkcija*

a) $f(x) = \log_3(x-2)$, *b)* $f(x) = \log_2(3-x)$,

c) $f(x) = \log_2 x^2$, *d)* $f(x) = \log_2 |x|$,

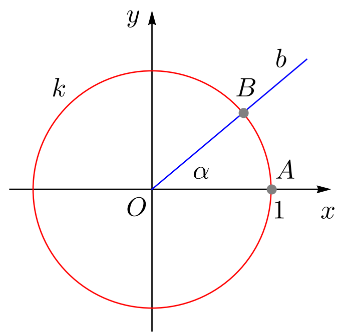
e) $f(x) = |\log_2 x|$, *f)* $f(x) = 2 + \log_3(x-1)$.

Primjedba 2.17. *Najčešće se koriste:*

- dekadski *ili* Briggsovi *logaritmi* $(a = 10)$*. Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se piše* $x \mapsto \log x$*;*
- prirodni *ili* Napierovi *logaritmi* $(a = e)$*. Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se piše* $x \mapsto \ln x$*;*
- diadski *logaritmi* $(a = 2)$*. Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se označava s* $x \mapsto ld\, x$*.*

2.3.6 Trigonometrijske funkcije

Najprije ćemo kazati nekoliko riječi o pojmu kuta i mjeri kuta. U središte O pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava postavimo kružnicu radijusa 1 (jedinična kružnica). Uočimo dva polupravca: a (podudara se s pozitivnim smjerom osi x) i b (vidi *Sliku 2.28*). Dio ravnine omeđen polupravcima a, b nazivamo kut s vrhom u O i kracima a, b i označavamo s $\sphericalangle(a,b)$. Ako se od polupravca a do polupravca b dolazi rotacijom u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu (pozitivan smjer), onda govorimo o pozitivnom kutu. U suprotnom govorimo o negativnom kutu. Kutove obično označavamo malim grčkim slovima: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.



Slika 2.28: *Jedinična kružnica*

Kutna ili *geometrijska* jedinica za mjeru kuta je jedan stupanj (^{o}). Za kut do čijeg se drugog kraka dolazi rotacijom u pozitivnom smjeru za 360-ti dio „potpunog okreta” kažemo da ima mjeru od jednog stupnja (1^o).[7] Tako primjerice pravi kut ima 90^o, ispruženi kut 180^o, a puni kut 360^o. Stupanj se dijeli na minute ($'$), a minute na sekunde ($''$) prema odnosu:

$$1^o = 60', \quad 1' = 60''.$$

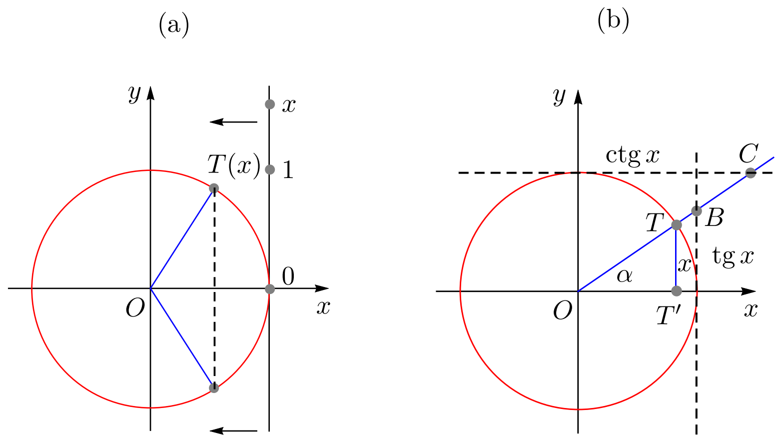
Lučna ili *analitička* mjera kuta je jedan radijan. Svakom pozitivno [negativno] orijentiranom kutu pridružuje se pozitivan [negativan] broj koji odgovara duljini luka jedinične kružnice. Tako primjerice pozitivno orijentiranom pravom kutu odgovara $\frac{\pi}{2}\,rad$, ispruženom kutu $\pi\,rad$, a punom kutu $2\pi\,rad$. Veza između kutne i lučne mjere kuta je:

$$360^o = 2\pi\,rad.$$

Zadatak 2.26. *Sljedeće kutne mjere pretvorite u lučne, a lučne u odgovarajuće kutne mjere:* 1^o, 30^o, 45^o, 60^o, 62^o, 73^o, $\frac{\pi}{6}\,rad$, $\frac{\pi}{12}\,rad$, $1.3\,rad$, $1\,rad$.

U svrhu definiranja trigonometrijskih funkcija, na jediničnu kružnicu naslonimo brojevni pravac tako da ishodište koordinatnog sustava na pravcu padne u točku $(1,0)$. Pravac namatamo na kružnicu kao na *Slici 2.29a*.

[7] Stari Babilonci uočili su da se otprilike svakih 360 dana ponavljaju godišnja doba. Vjerovali su da se Zemlja nalazi u središtu svemira koji se za 360 dana okrene oko Zemlje. Vjerojatno od tuda dolazi stupanj za jedinicu mjere kuta.



Slika 2.29: *Definiranje trigonometrijskih funkcija*

Na svaku točku kružnice padne beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca. Jediničnu kružnicu na koju su na navedeni način naneseni realni brojevi nazivamo **trigonometrijska kružnica**. Realnom broju x prilikom namatanja pravca na kružnicu pripada točka $T(x)$ na kružnici. Apscisu točke $T(x)$ označimo s $\cos x$, a ordinatu sa $\sin x$. Na taj način definirali smo dvije funkcije koje ovise o x. Funkciju koja realnom broju x pridružuje apscisu točke $T(x)$ nazivamo **kosinus** i pišemo $x \mapsto \cos x$. Uočite da je za svaki $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1, 1]$. Analogno, funkciju koja realnom broju x pridružuje ordinatu točke $T(x)$ nazivamo **sinus** i pišemo $x \mapsto \sin x$. Također je $\sin x \in [-1, 1]$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Budući da za svaki $x \in \mathbb{R}$ točka $T(x)$ pripada trigonometrijskoj kružnici, vrijedi (Pitagorin poučak!):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{2.21}$$

Pomoću funkcija sin i cos definiraju se i funkcije **tangens** i **kotangens** formulama:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Primjer 2.44. *Odredimo prirodno područje definicije funkcije tg.*

Funkcija tg, prema prethodnoj definiciji, ne prima vrijednost realnog broja u onim točkama u kojima funkcija cos ima nul-točke. To su svi oni x koji namatanjem brojevnog pravca na trigonometrijsku kružnicu padnu u točke $(0, 1)$ ili $(0, -1)$. Dakle, funkcija tg nije definirana za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

Zadatak 2.27. *Odredite prirodno područje definicije funkcije* ctg.

Često puta je korisno „zamijeniti” domenu trigonometrijskih funkcija (skup $\mathbb{R}$) sa skupom svih kutova. To je lako učiniti tako da kutu α pridružimo njegovu mjeru x u radijanima. Tada pod sinusom kuta α podrazumijevamo sinus njegove mjere x u radijanima. Slično se definira kosinus, tangens i kotangens kuta α. Sa *Slike 2.29a* vidi se da vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{duljina\ suprotne\ katete\ TT'}{duljina\ hipotenuze\ OT},$$

$$\cos\alpha = \frac{duljina\ susjedne\ katete\ OT'}{duljina\ hipotenuze\ OT},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{duljina\ suprotne\ katete\ TT'}{duljina\ susjedne\ katete\ OT'},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{duljina\ susjedne\ katete\ OT'}{duljina\ suprotne\ katete\ TT'}.$$

Za neki realan broj x (odnosno kut α), zbog sličnosti trokuta na *Slici 2.29b*, vidi se da je tangens kuta α jednak ordinati točke B u kojoj drugi krak kuta α siječe pravac $x = 1$. Analogno značenje ima kotangens realnog broja x, odnosno kuta α.

Navedimo sada neka osnovna svojstva trigonometrijskih funkcija.

a) Funkcija $x \mapsto \sin x$

Funkcija $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ je neparna, periodična (temeljni period je 2π) funkcija čiji graf je prikazan na *Slici 2.30a*.

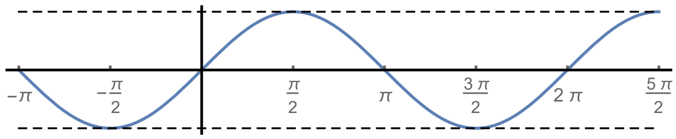
b) Funkcija $x \mapsto \cos x$

Funkcija $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ je parna, periodična (temeljni period je 2π) funkcija čiji graf je prikazan na *Slici 2.30b*.

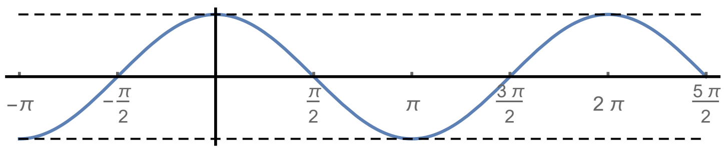
Iz *Slike 2.30* možemo naslutiti vezu koja postoji između funkcija sin i cos:

$$\sin x = \cos(x - \tfrac{\pi}{2}), \qquad \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \tag{2.22}$$

(a) $x \mapsto \sin x$



(b) $x \mapsto \cos x$



Slika 2.30: *Trigonometrijske funkcije* sin *i* cos

Primjer 2.45. *Složena funkcija*

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

opisuje tzv. harmonijske oscilacije. Broj $A > 0$ naziva se amplituda. A je najveća, a $(-A)$ najmanja vrijednost koju postiže funkcija f. Broj φ naziva se fazni pomak, a ω kružna frekvencija. Ova funkcija ima temeljni period $T = \frac{2\pi}{\omega}$ jer je 2π temeljni period funkcije sin*. Naime,*

$$\begin{aligned} f(t+T) &= A\sin\left(\omega\left(t+\tfrac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = A\sin(\omega t+\varphi+2\pi) \\ &= A\sin(\omega t+\varphi) = f(t). \end{aligned}$$

Broj $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ naziva se frekvencija i pokazuje broj perioda funkcije f u jedinici vremena. Primijetimo da se graf funkcije f dobije pomicanjem grafa funkcije $t \mapsto A\sin\omega t$ ulijevo za $\frac{\varphi}{\omega}$.

Primjedba 2.18. *Često puta se prilikom proučavanja periodičnih funkcija razmatraju samo funkcije perioda 2π jer jednostavnom transformacijom funkciju proizvoljnog perioda L lako transformiramo u funkciju perioda 2π i obratno. Naime, vrijedi:*

(i) Ako je f perioda 2π, onda je $g(x) = f(\frac{2\pi}{L}x)$ perioda L:

$$g(x+L) = f\left(\tfrac{2\pi}{L}(x+L)\right) = f\left(\tfrac{2\pi}{L}x + 2\pi\right) = f\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right) = g(x).$$

(ii) Ako je φ perioda L, onda je $\psi(x) = \varphi(\frac{L}{2\pi}x)$ perioda 2π:

$$\psi(x + 2\pi) = \varphi\left(\tfrac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = \varphi\left(\tfrac{L}{2\pi}x + L\right) = \varphi\left(\tfrac{L}{2\pi}x\right) = \psi(x).$$

Zadatak 2.28. *Skicirajte grafove funkcija sekans* (sec) *i kosekans* (csc)

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Pokažite da vrijedi

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = csc^2 x.$$

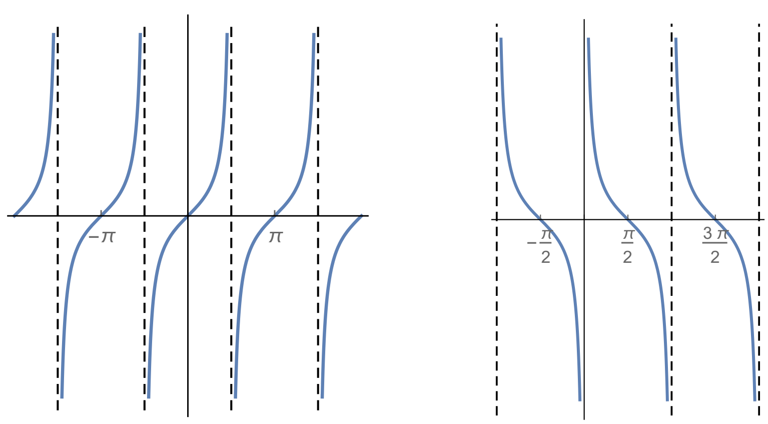
c) Funkcija $x \mapsto \mathrm{tg}\, x$

Funkcija $x \mapsto \mathrm{tg}\, x$ neparna je, po dijelovima rastuća i periodična s temeljnim periodom π. Njezin graf prikazan je na *Slici 2.31a.*

d) Funkcija $x \mapsto \mathrm{ctg}\, x$

Funkcija $x \mapsto \mathrm{ctg}\, x$ neparna je, po dijelovima padajuća i periodična s temeljnim periodom π. Njezin graf prikazan je na *Slici 2.31b.*

(a) $x \mapsto \mathrm{tg}\, x$ (b) $x \mapsto \mathrm{ctg}\, x$



Slika 2.31: *Trigonometrijske funkcije* tg *i* ctg

2.3.7 Ciklometrijske funkcije

Ciklometrijske funkcije su funkcije inverzne trigonometrijskim. To su funkcije: arkus sinus (arcsin), arkus kosinus (arccos), arkus tangens (arctg) i arkus kotangens (arcctg).

a) Funkcija $x \mapsto \arcsin x$.

Budući da funkcija $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ nije injekcija jer je primjerice $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$, ona nema inverznu funkciju. Zato ćemo definirati bijektivnu funkciju:

$$\mathrm{Sin} : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad \text{formulom} \quad \mathrm{Sin}\,(x) := \sin x$$

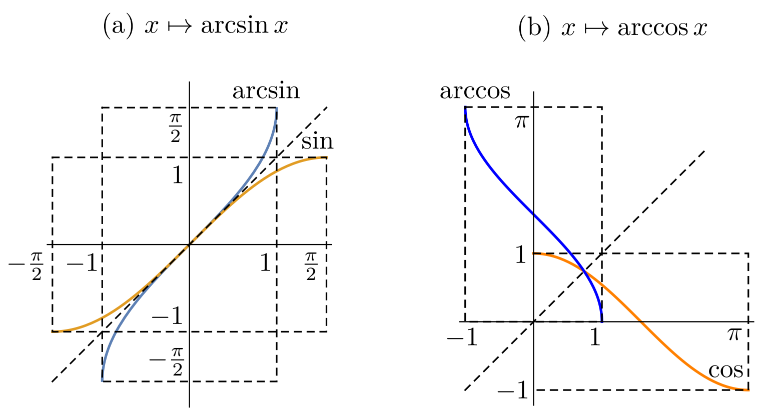
Funkciju Sin zovemo restrikcija funkcije sin na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, što simbolički pišemo:

$$\mathrm{Sin} = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\,.$$

Funkcija Sin ima inverznu funkciju (koju zovemo arkus sinus):

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Graf funkcije arcsin dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije Sin u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.32a)*.



Slika 2.32: *Konstrukcija grafova ciklometrijskih funkcija* arcsin *i* arccos

Primijetimo da je $\arcsin \alpha$ kut[8] (ili luk) čiji je sinus jednak α. Tako je primjerice

$$\arcsin 0 = 0 \;\text{ jer je }\; \sin 0 = 0,$$

$$\arcsin 1 = \tfrac{\pi}{2} \;\text{ jer je }\; \sin \tfrac{\pi}{2} = 1.$$

[8]lat.: arcus=kut

b) Funkcija $x \mapsto \arccos x$.

Budući da funkcija $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ nije injekcija jer je primjerice $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, ona nema inverznu funkciju. Zato ćemo definirati bijektivnu funkciju:

$$\mathrm{Cos} : [0,\pi] \to [-1,1], \qquad \mathrm{Cos} \;=\; \cos\big|_{[0,\pi]}\,,$$

koja ima inverznu funkciju (koju zovemo arkus kosinus):

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Graf funkcije arccos dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije Cos u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.32b)*.

Primijetimo da je $\arccos\alpha$ kut (ili luk) čiji je kosinus jednak α. Tako je primjerice

$$\arccos 1 = 0 \;\text{ jer je }\; \cos 0 = 1,$$

$$\arccos 0 = \tfrac{\pi}{2} \;\text{ jer je }\; \cos\tfrac{\pi}{2} = 0.$$

c) Funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

Budući da funkcija $\operatorname{tg}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije injekcija jer je primjerice $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\pi = 0$, ona nema inverznu funkciju. Zato ćemo definirati bijektivnu funkciju:

$$\mathrm{Tg} : \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Tg} \;=\; \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\,,$$

koja ima inverznu funkciju (koju zovemo arkus tangens):

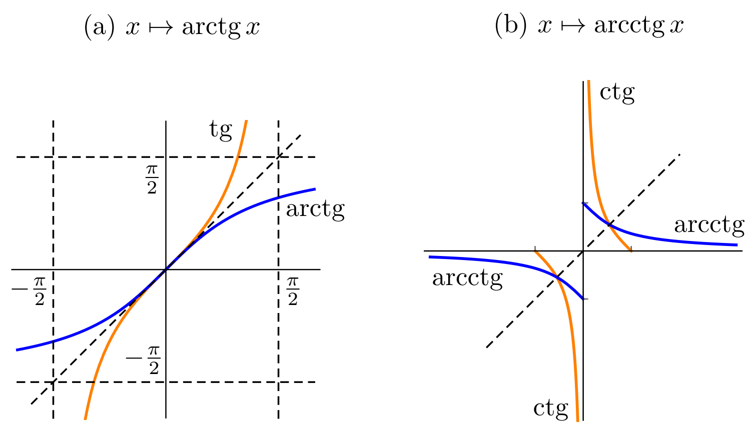
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Graf funkcije arctg dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije Tg u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.33a)*.

Primijetimo da je $\operatorname{arctg}\alpha$ kut (ili luk) čiji je tangens jednak α. Tako je primjerice

$$\operatorname{arctg} 0 = 0 \;\text{ jer je }\; \operatorname{tg} 0 = 0,$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \tfrac{\pi}{4} \;\text{ jer je }\; \operatorname{tg}\tfrac{\pi}{4} = 1.$$



Slika 2.33: *Konstrukcija grafova ciklometrijskih funkcija* arctg *i* arcctg

d) Funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

Budući da funkcija $\operatorname{ctg}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije injekcija jer je primjerice $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{2}) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$, ona nema inverznu funkciju. Zato ćemo definirati bijektivnu funkciju:

$$\operatorname{Ctg} : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Ctg} = \operatorname{ctg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}, \tag{2.23}$$

koja ima inverznu funkciju (koju zovemo arkus kotangens):

$$\operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}). \tag{2.24}$$

Graf funkcije arcctg dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije Ctg u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.33b)*.

Primijetimo da je $\operatorname{arcctg}\alpha$ kut (ili luk) čiji je kotangens jednak α. Tako je primjerice

$$\operatorname{arcctg} 0 = \tfrac{\pi}{2} \;\text{ jer je }\; \operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{2} = 0,$$

$$\operatorname{arcctg} 1 = \tfrac{\pi}{4} \;\text{ jer je }\; \operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{4} = 1.$$

Primjedba 2.19. *Primijetite da smo funkciju* arcctg *mogli definirati i na drugi način (vidi [21]). Ako bismo bijektivnu funkciju kao restrikciju funkcije* ctg *definirali s*

$$\operatorname{Ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Ctg} = \operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}, \tag{2.25}$$

onda bi inverzna funkcija arcctg *bila definirana s*

$$\operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi). \tag{2.26}$$

Ustanovite vezu između funkcija (2.23) *i* (2.25) *i funkcija* (2.24) *i* (2.26) *i skicirajte odgovarajuće grafove.*

Zadatak 2.29. *Skicirajte grafove sljedećih funkcija*

a) $x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, *b)* $x \mapsto x \sin x$, *c)* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$,

d) $x \mapsto |\sin x|$, *e)* $x \mapsto |x| \sin x$, *f)* $x \mapsto 2^{-x} \sin 2x$.

Zadatak 2.30. *Pokažite da vrijedi:*

a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, *b)* $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$,

c) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{\pi}{2} - x$, *d)* $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2} - x$,

e) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, *f)* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$,

g) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, *h)* $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

i) $\sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}$, *j)* $\cos(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

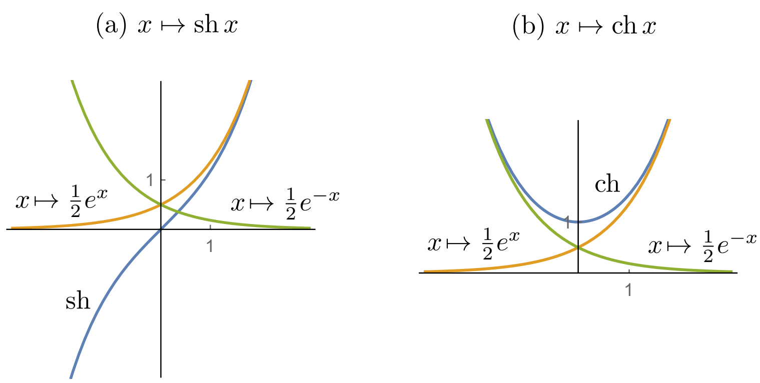
2.3.8 Hiperbolne funkcije

Hiperbolne funkcije: sinus hiperbolni (sh), kosinus hiperbolni (ch), tangens hiperbolni (th) i kotangens hiperbolni (cth) definiraju se pomoću eksponencijalne funkcije na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

a) Funkcija $x \mapsto \operatorname{sh} x$

Funkcija sh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neparna monotono rastuća funkcija čiji graf se dobije tako da od grafa funkcije $x \mapsto \frac{1}{2} e^x$ „oduzmemo” graf funkcije $x \mapsto \frac{1}{2} e^{-x}$ *(Slika 2.34a)*.



Slika 2.34: *Konstrukcija grafova hiperbolnih funkcija* sh *i* ch

b) Funkcija $x \mapsto \mathrm{ch}\, x$

Funkcija ch: $\mathbb{R} \to [1, +\infty)$ je parna funkcija. Njezin graf naziva se **lančanica** (jer ima oblik koji poprima lanac obješen na dva kraja) i dobije se tako da se „zbroje" grafovi funkcija $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ i $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ *(Slika 2.34b).*

Slično kao kod trigonometrijskih funkcija, za hiperbolne funkcije vrijedi

$$\begin{gathered} \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \\ \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}, \qquad \mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Zadatak 2.31. *Pokažite da vrijede sljedeće formule:*

a) $\mathrm{sh}\,(x \pm y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y$, *b)* $\mathrm{ch}\,(x \pm y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$,

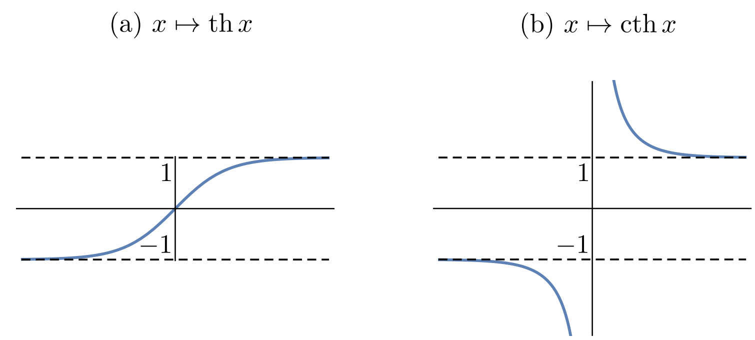
c) $\mathrm{sh}\,(2x) = 2\, \mathrm{sh}\, x\; \mathrm{ch}\, x$, *d)* $\mathrm{ch}\,(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$.

c) Funkcija $x \mapsto \mathrm{th}\, x$

Funkcija $x \mapsto \mathrm{th}\, x$ je neparna monotono rastuća funkcija s domenom $\mathcal{D}(\mathrm{th}) = \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$|\mathrm{th}\, x| < 1, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}$$

pa je $\mathcal{R}(\mathrm{th}) = (-1, 1)$. Pravci $y = 1$ i $y = -1$ su horizontalne asimptote ove funkcije. Njezin graf prikazan je na *Slici 2.35a.*



Slika 2.35: *Konstrukcija grafova hiperbolnih funkcija* th *i* cth

d) Funkcija $x \mapsto \operatorname{cth} x$

Funkcija $x \mapsto \operatorname{cth} x$ nije definirana za $x_0 = 0$. Ona je neparna po dijelovima monotono padajuća funkcija za koju vrijedi

$$|\operatorname{cth} x| > 1, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}$$

pa je $\mathcal{R}(\operatorname{cth}) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Pravci $y = 1$ i $y = -1$ su horizontalne asimptote ove funkcije. Njezin graf prikazan je na *Slici 2.35b*.

2.3.9 Area funkcije

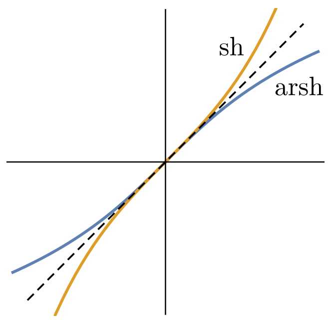
Area funkcije su funkcije inverzne hiperbolnim. To su funkcije: area sinus hiperbolni (arsh), area kosinus hiperbolni (arch), area tangens hiperbolni (arth) i area kotangens hiperbolni (arcth).

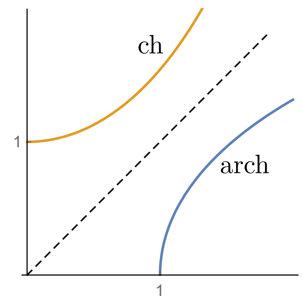
a) Funkcija $x \mapsto \operatorname{arsh} x$

Budući da je funkcija $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekcija, ima inverznu funkciju koju označavamo s

$$\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Graf funkcije arsh dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije sh u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.36a)*.





Slika 2.36: *Konstrukcija grafova area funkcija* arsh *i* arch

b) Funkcija $x \mapsto \operatorname{arch} x$

Budući da funkcija $\operatorname{ch}: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ nije injekcija jer je primjerice $\operatorname{ch}(-1) = \operatorname{ch} 1$, ona nema inverznu funkciju. Zato ćemo definirati bijektivnu funkciju:

$$\operatorname{Ch} : [0, +\infty) \to [1, +\infty), \qquad \operatorname{Ch} = \operatorname{ch}|_{[0,\infty)},$$

koja ima inverznu funkciju (zovemo je area kosinus hiperbolni):

$$\operatorname{arch} : [1, +\infty) \to [0, +\infty).$$

Graf funkcije arch dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije Ch u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.36b)*.

c) Funkcija $x \mapsto \operatorname{arth} x$

Budući da je funkcija $\operatorname{th}: \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijekcija, ima inverznu funkciju koju označavamo s

$$\operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbb{R}.$$

Graf funkcije arth dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije th u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.37a)*.

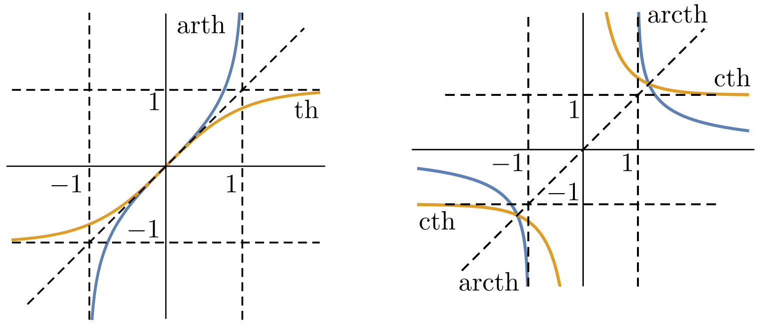
d) Funkcija $x \mapsto \operatorname{arcth} x$

Budući da je funkcija $\operatorname{cth}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$ bijekcija, ima inverznu funkciju koju označavamo s

$$\operatorname{arcth} : \mathbb{R}\backslash[-1, 1] \to \mathbb{R}.$$

Graf funkcije arcth dobiva se kao osno-simetrična slika grafa funkcije cth u odnosu na pravac $y = x$ *(Slika 2.37b)*.

(a) $x \mapsto \operatorname{arth} x$ (b) $x \mapsto \operatorname{arcth} x$



Slika 2.37: *Konstrukcija grafova area funkcija* arth *i* arcth

Primjedba 2.20. *Budući da su area funkcije inverzne hiperbolnim funkcijama, a hiperbolne funkcije su sastavljene od eksponencijalnih funkcija tipa $x \mapsto e^x$, za očekivati je da se area funkcije mogu napisati pomoću logaritamske funkcije $x \mapsto \ln x$.*

Tako primjerice, ako na funkciju $y = \operatorname{arsh} x$ djelujemo (načinimo kompoziciju) s funkcijom sh, dobivamo

$$\operatorname{sh} y = x \;\Rightarrow\; x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \;\Rightarrow\; e^y - e^{-y} = 2x \;\Rightarrow\; e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Ako uvedemo supstituciju $u := e^y$ i nakon toga riješimo kvadratnu jednadžbu $u^2 - 2xu - 1 = 0$, dobivamo

$$u_{1,2} = (e^y)_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Kako je $e^y > 0$, u prethodnom izrazu moramo se odlučiti za predznak „+”, pa dobivamo

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \tag{2.29}$$

Analogno dobivamo

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \tag{2.30}$$

$$\operatorname{arth} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad |x| < 1, \tag{2.31}$$

$$\operatorname{arcth} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \quad |x| > 1. \tag{2.32}$$

2.4 Načini zadavanja krivulja u ravnini

Navest ćemo sljedeće načine zadavanja krivulja u ravnini: krivulje zadane parametarski, krivulje zadane u polarnim koordinatama i implicitno zadane krivulje.

2.4.1 Parametarsko zadavanje krivulje

Pretpostavimo da se materijalna točka giba u ravnini i da u svakom trenutku $t \in [0, T]$ poznajemo njene koordinate $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Skup

$$\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\},$$

je krivulja u ravnini i predstavlja putanju materijalne točke.

Općenito, kažemo da je sustavom funkcija

$$\begin{aligned} &x = \varphi(t) \\ &y = \psi(t), \quad t \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

zadana parametarska jednadžba krivulje Γ. Varijablu t nazivamo parametar. Parametar t je najčešće vrijeme ili kut.

Ako postoji inverzna funkcija funkcije φ, onda je $t = \varphi^{-1}(x)$, a kompozicijom

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

zadana je neka funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, čiji graf se podudara s krivuljom Γ.

Primjer 2.46. *Koordinate težišta balističkog projektila ispaljenog u vakuumu u trenutku $t = 0$ iz ishodišta koordinatnog sustava pod kutem α i početnom brzinom v_0 ovise o vremenu t na sljedeći način*

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t, \qquad y(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \quad (*)$$

gdje je $g \approx 9.81m/s^2$ akceleracija sile teže. Dakle, u svakom vremenskom trenutku t iz formula $(*)$ poznata je udaljenost $x(t)$ projektila od ishodišta i njegova visina $y(t)$. Ako želimo dobiti funkcijsku zavisnost $y = f(x)$, iz prve jednadžbe moramo izraziti $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ i uvrstiti u drugu jednadžbu. Tako dobivamo

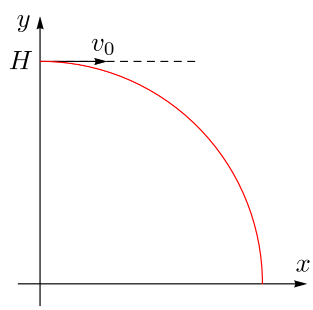
$$y = xtg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Zadatak 2.32. *Puščani metak ispaljen je početnom brzinom* $v_0 = 900\,m/s$.

a) Odredite maksimalni domet projektila, koji se postiže za $\alpha = 45^o$. *Izračunajte vrijeme leta tog projektila?*

b) Za zadani kut α, *odredite maksimalnu visinu projektila.*

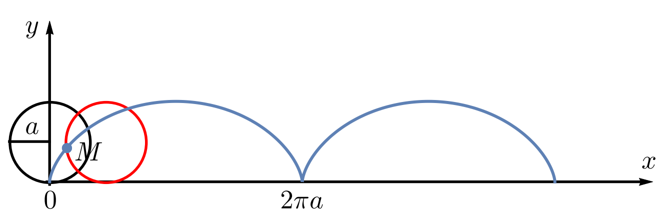
Zadatak 2.33. *Pronađite trajektoriju (putanju) tijela izbačenog iz zrakoplova, koji leti horizontalno na visini* H *brzinom* v_0 (Slika 2.38). *Jednadžbu trajektorije najprije izrazite parametarski, a zatim pronađite funkcionalnu zavisnost* $y = f(x)$. *Odredite točku pada tijela na zemlju.*



Slika 2.38: *Trajektorija tijela izbačenog iz zrakoplova*

Primjer 2.47. *Kotrljanjem po ravnoj podlozi, fiksna točka* M *na obodu kotača radijusa* a *opisuje krivulju prikazanu na* Slici 2.39. *Njezin naziv je* cikloida, *a prvi luk zadan je parametarski s*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

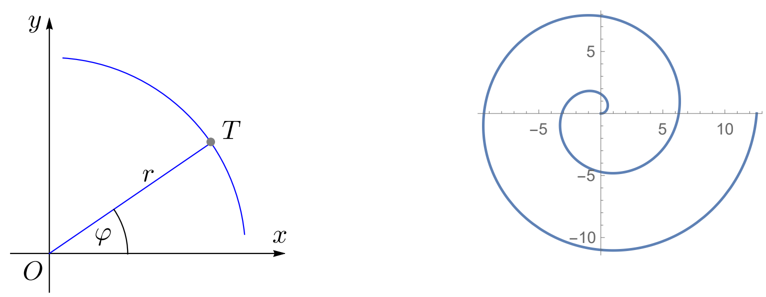


Slika 2.39: *Cikloida – parametarski zadana krivulja*

2.4.2 Krivulje zadane u polarnim koordinatama

Neka točka T u pravokutnom koordinatnom sustavu s ishodištem O zadana je svojim Kartezijevim koordinatama x i y. Položaj iste točke T potpuno je određen ako poznajemo kut φ (što ga spojnica $\overline{OT}$ zatvara s pozitivnim smjerom osi x) i udaljenost r od ishodišta O do točke T (vidi Sliku 2.40a).

(a) *Točka u polarnim koordinatama* (b) *Arhimedova spirala*



Slika 2.40: *Polarni koordinatni sustav*

Uređen par (x, y) nazivamo *Kartezijeve koordinate* točke T, a (φ, r) *polarne koordinate*. Između njih postoji sljedeća veza:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, & y \neq 0. \end{cases}$$

Neka je $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, a $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ funkcija. Tada je jednadžbom

$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

zadana krivulja u ravnini u polarnom koordinatnom sustavu. Tako je, primjerice, jednadžbom $r = a$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ zadana kružnica radijusa a sa središtem u ishodištu.

Primjer 2.48. *Jednadžbom $r = a\varphi$, $a > 0$ zadana je Arhimedova*[9] *spirala u polarnim koordinatama.*

[9] Archimedes (287-212 prije Krista) je vrlo cijenjeni grčki matematičar. Dao je značajne priloge u geometriji. Priča se da je otkrivši poznati zakon hidrostatike, gol trčao ulicama i uzvikivao „Eureka". Njegovim ubojstvom od strane rimskog vojnika završilo je jedno razdoblje matematike.

Na *Slici 2.40b* prikazana je Arhimedova spirala za $a = 0.1$. Neki parovi (φ, r) dani su u niže navedenoj tablici:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
r	0	0.078	0.157	0.236	0.314	0.392	0.471	0.55	0.628	0.707

Zadatak 2.34. *Skicirajte sljedeće krivulje zadane u polarnim koordinatama:*

a) Kružnica: $r = 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$,

b) Kardioida: $r = 1 - \cos\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$,

c) Konhoida: $r = 2 - \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

d) Descartesov list: $r = \frac{3\sin\varphi\,\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

e) Lemniskata: $r = \cos k\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$ *za* $k = 2, 3, 5, 6$,

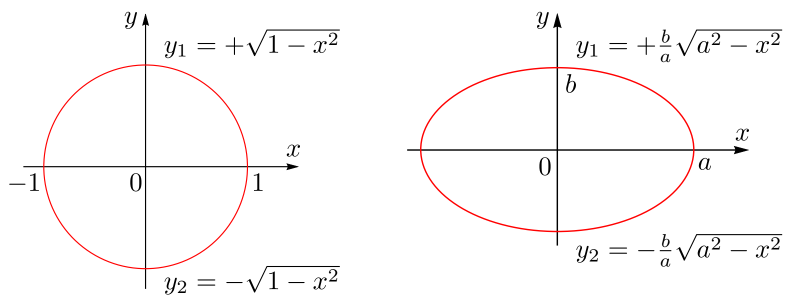
2.4.3 Implicitno zadane krivulje

Funkcije koje smo do sada razmatrali bile su zadane u tzv. eksplicitnom analitičkom obliku: direktno je bio zadan „propis” kako se od vrijednosti nezavisne varijable x dolazi do vrijednosti funkcije $y = f(x)$. To ne mora uvijek biti tako.

Primjer 2.49. *Jednadžbom* $2x - 3y + 1 = 0$, *zadan je pravac u ravnini. Budući da za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *rješavanjem prethodne jednadžbe dobivamo jedinstveni* $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, *kažemo da je na taj način* implicitno *zadana funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Primjer 2.50. *Jednadžbom kružnice* $x^2 + y^2 = 1$, *definirane su dvije implicitno zadane funkcije:* $y_1 = +\sqrt{1 - x^2}$ *i* $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, *a svaka od njih definirana je na segmentu* $[-1, 1]$ (Slika 2.41a). *Na sličan način elipsa* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *predstavlja dvije različite funkcije* $y_1 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ *i* $y_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (Slika 2.41b).

(a) *Kružnica* $x^2 + y^2 = 1$ (b) *Elipsa* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Slika 2.41: *Kružnica i elipsa*

Primjedba 2.21. *Navedimo jednadžbe nekoliko vrlo često korištenih krivulja.*

Jednadžba kružnice *sa središtem u točki* $S = (p,q)$ *i radijusom* R *zadana je s*

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2. \tag{2.33}$$

Jednadžba elipse *sa središtem u točki* $S = (p,q)$ *i poluosima* a *i* b *zadana je s*

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1. \tag{2.34}$$

Jednadžba parabole *kojoj je (os) simetrala paralelna s* x*-osi, s tjemenom u točki* $T = (h,k)$ *zadana je s*

$$x - h = a(y-k)^2. \tag{2.35}$$

Ako je $a > 0$*, parabola je otvorena prema desno, a ako je* $a < 0$*, parabola je otvorena prema lijevo.*

Jednadžba hiperbole *kojoj je os paralelna s* x*-osi, a njene asimptote* $y_{1,2} = \pm\frac{b}{a}x + q$ *se sijeku u točki* $S = (p,q)$ *zadana je s*

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1. \tag{2.36}$$

Sve ove krivulje mogu se dobiti kao presjeci stošca i ravnine.

Primjedba 2.22. *Desna [odnosno lijeva] grana hiperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *može se zadati parametarski s*

$$x = a \operatorname{ch} t, \qquad y = b \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(\textit{odnosno} \quad x = -a \operatorname{ch} t, \qquad y = b \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R}).$$

pa otuda za funkcije sh, ch *naziv hiperbolne funkcije.*

Zadatak 2.35. *Ispitajte koja krivulja je zadana jednadžbom, odredite njene parametre* (a, b, p, q, h, k) *te nacrtajte krivulju.*

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, *b)* $2x^2+2y^2-2x-6y+3=0$,
c) $x^2 + y^2 + 6y = 1$, *d)* $x^2 + y^2 - 4x = 12$,
e) $x = y^2 + 4y + 1$, *f)* $x = -2y^2 + 4y$,
g) $x^2 + 5y^2 = 25$, *h)* $9x^2 + y^2 = 81$,
i) $25x^2 + y^2 = 16$, *j)* $9x^2 - 25y^2 = 225$,
k) $16x^2 - 9y^2 = 144$, *l)* $y^2 - x^2 = 4$,
m) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$,
n) $x^2 - 25y^2 - 2x + 100y - 124 = 0$.

Često puta je teško (a više puta nemoguće) iz implicitnog oblika prijeći na eksplicitni oblik funkcije, kao primjerice u sljedećim slučajevima

$$y^3 - 3xy + x^3 = 0, \qquad y + x2^y = 1.$$

Neki puta je krivulje zadane implicitno podesnije prikazati u parametarskom obliku ili u polarnim koordinatama. Tako je primjerice kružnica s jednadžbom $x^2 + y^2 = R^2$ parametarski zadana s

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

a u polarnim koordinatama s

$$r = R, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametarski se može zadati s

$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

To nije jedini način parametarskog zadavanja elipse. Drugi način je

$$x(t) = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = b\frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Što je u ovom slučaju značenje parametra t?

Jednadžba Descartesovog lista $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ u polarnim koordinatama može se eksplicitno napisati:

$$r = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

2.5 Skiciranje grafova nekih složenih funkcija

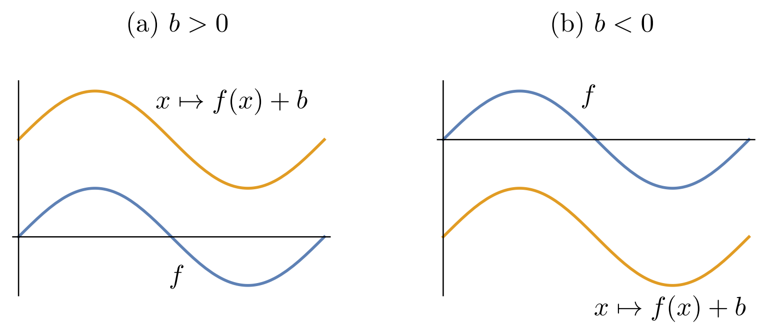
Ako je poznat graf funkcije, njezino ponašanje i neka svojstva navedena u *Poglavlju 2.2* mogu se naslutiti već iz crteža. Tako primjerice nultočke i lokalni ekstremi funkcije mogu se uz zadanu točnost pronaći nekim numeričkim metodama (vidi *Primjer 6.8*, str. 146 i [29]), koje obično pretpostavljaju poznavanje kvalitetne početne aproksimacije, a koje se dobro mogu procijeniti na osnovi crteža grafa funkcije.

Graf neke funkcije f može se dovoljno kvalitetno skicirati poznavanjem vrijednosti funkcije u dovoljno velikom skupu točaka $x_1, \ldots, x_n$ iz domene $\mathcal{D}(f)$. Poznavajući graf funkcije f, lako je skicirati i grafove sljedećih funkcija:

$$x \mapsto f(x) + b, \quad x \mapsto f(x - a), \quad x \mapsto Af(x) \quad \text{i} \quad x \mapsto f(kx),$$

gdje su b, a, A, k zadani brojevi.

Graf funkcije $x \mapsto f(x)+b$ dobije se tako da graf funkcije f pomaknemo za b po osi y *(Slika 2.42)*.



Slika 2.42: *Translacija u smjeru osi y*

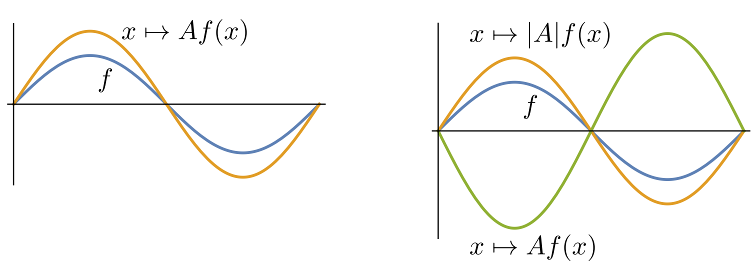
Graf funkcije $x \mapsto f(x - a)$ dobije se tako da graf funkcije f pomaknemo za a po osi x *(Slika 2.43)*.

Graf funkcije $x \mapsto Af(x)$ za $A > 0$ dobiva se tako da sve ordinate grafa funkcije f uvećamo A puta. Ako je $A < 0$, onda skiciramo graf funkcije $x \mapsto |A|f(x)$ i načinimo njegovu osno-simetričnu sliku obzirom na os x *(Slika 2.44)*.

(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Slika 2.43: *Translacija u smjeru osi x*

(a) $A > 0$ (b) $A < 0$

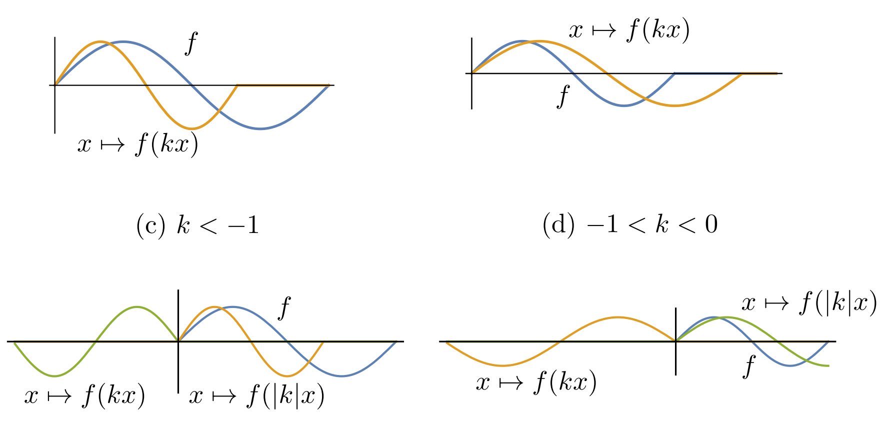


Slika 2.44: *Istezanje u smjeru y osi*

Graf funkcije $x \mapsto f(kx)$ tvorimo tako da apscise svih točaka grafa Γ_f umanjimo (uvećamo) $|k|$ puta ako je $|k| > 1$ ($|k| < 1$). Ako je $k < 0$, onda još treba napraviti osno-simetričnu sliku dobivenog grafa u odnosu na os y *(Slika 2.45)*.

(a) $k > 1$ (b) $0 < k < 1$

(c) $k < -1$ (d) $-1 < k < 0$



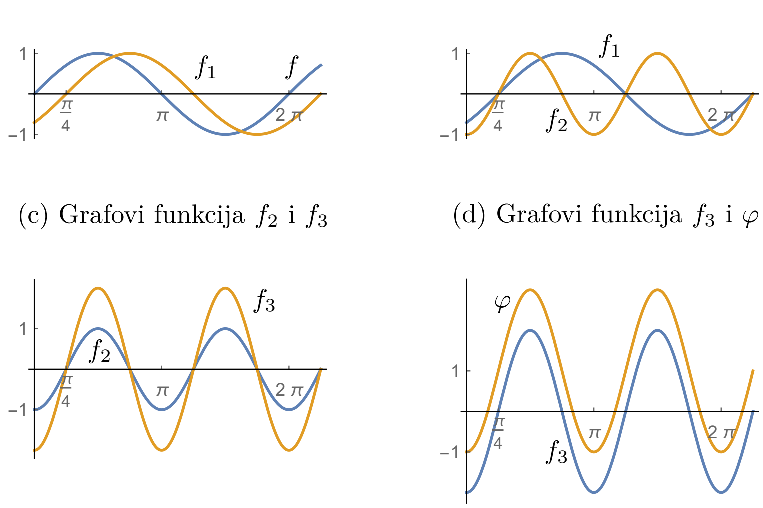
Slika 2.45: *Stezanje - istezanje u smjeru x osi*

Zadatak 2.36. *Poznavajući graf funkcije $f(x) = |x|$, skicirajte grafove funkcija $x \mapsto |x| + b$, $x \mapsto |x - a|$, $x \mapsto A|x|$, $x \mapsto |kx|$ za različite vrijednosti parametara b, a, A, k.*

Primjer 2.51. *Skicirajmo graf funkcije*

$$\varphi(x) = 1 + 2\sin\left(2x - \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Osnovna funkcija je $f(x) = \sin x$. Zadanu funkciju φ napisat ćemo u obliku $\varphi(x) = 1 + 2\sin 2(x - \frac{\pi}{4})$ i najprije skicirati graf funkcije $f_1(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ *(Slika 2.46a)*, pa graf funkcije $f_2(x) = \sin 2(x - \frac{\pi}{4})$ *(Slika 2.46b)*, pa graf funkcije $f_3(x) = 2\sin 2(x - \frac{\pi}{4})$ *(Slika 2.46c)* i konačno graf funkcije φ *(Slika 2.46d)*.



(a) Grafovi funkcija f i f_1

(b) Grafovi funkcija f_1 i f_2

(c) Grafovi funkcija f_2 i f_3

(d) Grafovi funkcija f_3 i φ

Slika 2.46: *Generiranje grafa funkcije* $\varphi(x) = 1 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Zadatak 2.37. *Skicirajte grafove funkcija*

a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, *b)* $g(x) = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi)$, *c)* $h(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2$.

Zadatak 2.38. *Skicirajte grafove funkcija*

a) $f(x) = 2|x - 1| + \dfrac{1}{2}|x + 2| + 1$, *b)* $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{2}) - \cos 2x$.

Poglavlje 3

Nizovi realnih brojeva

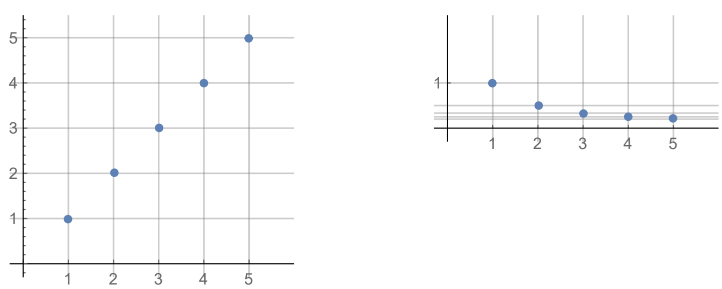
3.1 Pojam niza

Pojmovi niza realnih brojeva i njegove konvergencije jedni su od najvažnijih matematičkih pojmova koji svoju primjenu nalaze u raznim područjima matematike kao što su primjerice teorija neprekidnih funkcija, diferencijalni i integralni račun, itd.

Definicija 22. *Funkciju* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *nazivamo* niz realnih brojeva*.*

Vrijednost $a(n)$ *niza* a *na prirodnom broju* n *označava se s* a_n *i naziva* n-ti *ili* opći član niza a*. Sam niz* a *označava se s* (a_n) *ili jednostavno s* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

(a) $a_n = n$ (b) $a_n = \frac{1}{n}$



Slika 3.1

Nizovi realnih brojeva najčešće se zadaju općim članom.

Primjer 3.1. *Opći član niza zadan je s:* a) $a_n = n$, b) $a_n = 1/n$,

c) $a_n = 3 + 4(n-1)$, d) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. *Ispišimo prvih pet članova tih nizova:*

a) $1, 2, 3, 4, 5$, b) $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$, c) $3, 7, 11, 15, 19$, d) $2, 6, 18, 54, 162$.
Na Slici 3.1 *prikazani su grafovi funkcija-nizova navedenih pod a) i b).*

Zadatak 3.1. *Odredite opći član niza:*
a) $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ *b)* $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$
c) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ *d)* $-1, 2, 7, 14, 23, 34, 47, \ldots$
i nacrtajte pripadne grafove.

Osim općim članom, niz može biti zadan i rekurzivnom formulom, kao što pokazuju sljedeća dva primjera.

Primjer 3.2. *Promatrajmo niz zadan rekurzivnom formulom*

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right).$$

Prvih pet članova ovog niza glase: 3, 2, 1.75, 1.732142857, 1.73205081. *Poslije ćemo pokazati da je a_n sve bliže broju $\sqrt{3}$ što je veći n (vidi* Primjer 3.34*).*

Primjer 3.3 (Fibonaccijev niz)**.** *Leonardo od Pise, poznat još kao Fibonacci, postavio je 1202. g. u svom radu „Liber abaci" tzv. „problem zečeva". Shema razmnožavanja zečeva je sljedeća: par zec-zečica (starih barem* 2 *mjeseca) tijekom svakog sljedećeg mjeseca dobiju par mladih (zeca i zečicu). Ako smo počeli s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno parova zečeva nakon n mjeseci?*
Nakon prvog mjeseca će biti još uvijek jedan par zečeva, jer oni još nisu zreli za oplodnju. Nakon dva mjeseca imamo dva para. Nakon tri mjeseca imamo tri para (originalni par i njihovi potomci nakon drugog i trećeg mjeseca).

Neka je F_n broj parova zec-zečica nakon n mjeseci, tj. tijekom $(n+1)$-og mjeseca. Prema pretpostavci je $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$. Da bismo dobili F_n treba broju parova F_{n-1} koji su živjeli prethodni mjesec dodati novorođene parove koji mogu doći samo od F_{n-2} parova živih prije dva mjeseca. Stoga za svaki $n \geq 2$ vrijedi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Napišite prvih 20 *članova Fibonaccijeva niza.*

Zadatak 3.2. *Kuglica padne na elastičnu podlogu s visine h_0 i odskoči nazad na visinu $\frac{3}{4}h_0$. Odredite visinu h_n kuglice nakon što se n puta odbila od podloge.*

3.2 Neki specijalni nizovi

a) Aritmetički niz.

Definicija 23. *Neka su $a_1, d \in \mathbb{R}$. Niz realnih brojeva definiran formulom*

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

nazivamo aritmetički niz *s* diferencijom *d.*

Iz definicijske formule dobivamo:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{[a_1 + (n-2)d] + (a_1 + nd)}{2} = a_1 + (n-1)d = a_n, \quad n \geq 2,$$

odakle vidimo da je svaki član niza (osim prvog) aritmetička sredina[1] neposredno susjednih članova. Od tuda i dolazi ime tog niza.

Primjer 3.4. *Zadan je aritmetički niz $2, 7, 12, 17, \ldots$. Odredimo a_{2000}.*
$a_1 = 2$, $d = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$. *Opći član je* $a_n = 2 + (n-1)5$, *a* $a_{2000} = 2 + (2\ 000 - 1)5 = 9\ 997$.

Primjer 3.5. *Interpolirati između dva zadana broja a i b aritmetički niz od r članova znači odrediti r brojeva, koji zajedno s a i b čine konačan aritmetički niz od $(r+2)$ člana, kome je a prvi i b posljednji član. Za primjer interpolirajmo između 10 i 34 aritmetički niz od 5 članova.*
$a_1 = 10, a_7 = 34$. *Budući da je* $a_7 = a_1 + 6d$ *dobivamo* $d = 4$. *Traženi niz glasi:* $10, 14, 18, 22, 26, 30, 34$.

Suma s_n prvih n članova aritmetičkog niza iznosi

$$s_n = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n), \quad \text{odnosno} \quad s_n = \tfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]. \tag{3.2}$$

Dokaz. Zaista, iskoristimo li formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (vidi *Primjer 1.11*) dobivamo:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)d] = \sum_{k=1}^{n} a_1 + \sum_{k=1}^{n} (k-1)d = na_1 + d(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1) \\ &= na_1 + d\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \tfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \tfrac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] \\ &= \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

[1] Broj $A(a,b) = (a+b)/2$ nazivamo *aritmetičkom sredinom* brojeva a i b.

Primjer 3.6. *Odredimo zbroj prvih 30 članova aritmetičkog niza*

$$24, 20, 16, \ldots.$$

$a_1 = 24,\ d = -4, \qquad a_{30} = a_1 + (30-1)d = 24 + 29(-4) = -92,$
$s_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(24 - 92) = -1\ 020.$

Primjer 3.7. *Odredimo aritmetički niz* (a_n) *za koji je* $s_n = 14n - 2n^2$.
Iz $14n - 2n^2 = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = n^2\frac{d}{2} + n(a_1 - \frac{d}{2})$ *uspoređivanjem koeficijenata uz iste potencije od* n *dobivamo:* $14 = a_1 - \frac{d}{2}$, $-2 = \frac{d}{2}$, *odakle je* $d = -4$, $a_1 = 12$. *Dakle, opći član traženog niza je* $a_n = 12 - (n-1)4 = 16 - 4n$.

Zadatak 3.3. *Odredite aritmetički niz kome zbroj prvih pet članova iznosi* 10, *a njihov umnožak* 320.

Zadatak 3.4. *Koliki je zbroj prirodnih brojeva koji su djeljivi s* 19 *i manji od* 5 000*?*

b) Geometrijski niz.

Definicija 24. *Neka su* $a_1, q \in \mathbb{R}$. *Niz realnih brojeva definiran formulom*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

nazivamo geometrijski niz *s* kvocijentom q.

Dakle, geometrijski niz je na jedinstven način određen svojim prvim članom a_1 i kvocijentom q. Iz definicijske formule dobivamo:

$$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_n} = a_n, \quad n \geq 2,$$

odakle se vidi da je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina[2] neposredno susjednih članova.

Primjer 3.8. *Odredimo opći član geometrijskog niza* $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$.
Prvi član niza je $a_1 = 2$, *a kvocijent je* $q = \frac{1}{3}$ $(q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}/2 = \frac{1}{3})$. *Prema prethodnoj formuli je* $a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Zadatak 3.5. *Umnožak prvog i petog člana geometrijskog niza je* 144, *a zbroj drugog, trećeg i četvrtog člana je* 18. *Odredite opći član ovog niza.*

[2] Broj $G(a,b) = \sqrt{ab}$ nazivamo *geometrijskom sredinom* nenegativnih brojeva a i b.

Suma s_n prvih n članova geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q iznosi:

$$s_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n\, a_1, & q = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dokaz. Ako od jednakosti $s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + +a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$ oduzmemo jednakost $qs_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$ imamo $s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$, odakle za $q \neq 1$ dobivamo traženu formulu. Očigledno, za $q = 1$ je $s_n = na_1$. □

Primjer 3.9. *Tri broja čine konačan geometrijski niz, komu je zbroj* 65. *Ako srednjem članu dodamo* 10, *dobivamo konačan aritmetički niz. Kako glasi taj niz?*

Neka je a_1, a_1q, a_1q^2 *traženi niz. Niz* a_1, a_1q+10, a_1q^2 *je aritmetički. Budući da je* $a_1q + 10 - a_1 = a_1q^2 - a_1q - 10\ (= d)$ *i* $65 = a_1\dfrac{1-q^3}{1-q} = a_1(1+q+q^2)$, *dobivamo sustav:*

$$\begin{aligned} a_1(q^2 - 2q + 1) &= 20 \\ a_1(1 + q + q^2) &= 65. \end{aligned}$$

Izlučimo li iz druge jednadžbe a_1 *i uvrstimo u prvu, nakon sređivanja dobivamo jednadžbu* $3q^2 - 10q + 3 = 0$, *čija rješenja su* $q_1 = 3$ *i* $q_2 = \frac{1}{3}$. *Iz druge jednadžbe za* a_1 *imamo dva rješenja:* $a_1 = \dfrac{65}{1+q_1+q_1^2} = 5$, $a_1 = \dfrac{65}{1+q_2+q_2^2} = 45$. *Za traženi geometrijski niz dobivamo dva rješenja: a)* $5, 15, 45$, *b)* $45, 15, 5$.

Primjer 3.10. *Zadan je početni kapital* C_0 *i godišnja kamatna stopa* p. *Uz primjenu složenog ukamaćivanja izračunajmo vrijednost tog kapitala na kraju bilo koje godine.*

Vrijednost kapitala C_0 *na kraju prve godine sastoji se od vrijednosti početnog kapitala* C_0 *i kamata* $C_0\frac{p}{100}$, *tj.*

$$C_1 = C_0 + C_0\frac{p}{100} = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 r,$$

gdje s $r = 1 + \frac{p}{100}$ *označavamo tzv. godišnji kamatni faktor. Analogno, na kraju druge godine vrijednost kapitala je*

$$C_2 = C_1 + C_1\frac{p}{100} = C_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_1 r = C_0 r^2.$$

Općenito, na kraju n*-te godine vrijednost kapitala je*

$$C_n = C_0 r^n.$$

To je dobro poznata osnovna formula financijske matematike za vrijednost početnog kapitala C_0 *na kraju* n*-te godine uz primjenu dekurzivnog složenog godišnjeg ukamaćivanja. Niz* (C_n) *je geometrijski niz s kvocijentom* r *i prvim članom* C_0.

Zadatak 3.6. *Nakon koliko godina će se neki početni kapital udvostručiti primjenom složenog ukamaćivanja uz godišnju kamatnu stopu $p = 5\%$?*

c) Harmonijski niz

U nekim slučajevima u primjenama se koristi i **harmonijska sredina** $H(a, b)$ brojeva a, b:

$$H(a, b) := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Definicija 25. *Niz kome je svaki član (osim prvog) harmonijska sredina dvaju neposredno susjednih članova nazivamo* harmonijski niz*.*

Primjer 3.11. *Niz zadan općim članom $a_n = \frac{1}{n}$ je harmonijski niz. Provjerite!*

3.3 Osnovna svojstva nizova

Niz realnih brojeva (a_n) je **stacionaran** ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n = a_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$. Drugim riječima, niz je stacionaran ako su počevši od nekog člana pa nadalje svi članovi toga niza međusobno jednaki.

Primjer 3.12. *Niz s općim članom $a_n = 1 + \left[\frac{5}{n}\right]$ je stacionaran. Naime, budući da je $\left[\frac{5}{n}\right] = 0$ za $n > 6$, on glasi: $6, 3, 2, 2, 2, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$.*

Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je **monotono rastući** ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$a_n \leq a_{n+1} \ \ (\forall n \geq n_0).$$

Niz realnih brojeva (a_n) je **monotono padajući** ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$a_n \geq a_{n+1} \ \ (\forall n \geq n_0).$$

Drugim riječima, niz realnih brojeva je monotono rastući [monotono padajući] ako je počevši od nekog člana pa nadalje svaki sljedeći član veći [manji] od prethodnog.

Zamijetite da je niz (a_n) monotono padajući onda i samo onda ako je niz $(-a_n)$ monotono rastući. Ukoliko u prethodnim definicijama vrijede stroge nejednakosti, onda govorimo o **strogo rastućem**, odnosno **strogo padajućem** nizu.

Primjer 3.13. *Pokažimo da je niz* $a_n = n^2 - n$ *strogo rastući:*
$$a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n > n^2 - n = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primjer 3.14. *Ako je* $q > 0$, *onda je niz* $a_n = q^{n-1}$ *strogo rastući za* $q > 1$ *i strogo padajući za* $0 < q < 1$. *Zaista, ako je* $q > 1$ *množenjem te nejednakosti s* q^{n-1} *dobivamo* $q^n > q^{n-1}$, *tj.* $a_{n+1} > a_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Na sličan način se provodi dokaz za* $0 < q < 1$.

Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je **omeđen odozgo** [**omeđen odozdo**] ako je skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ omeđen odozgo [omeđen odozdo] (vidi *Poglavlje 1.1.2*). Za niz koji je omeđen i odozgo i odozdo kažemo da je **omeđen**.

Primjer 3.15. *Pokažimo da je niz:*

$$a_1 = x > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

omeđen i monotono padajući:
Može se pokazati da je aritmetička sredina dvaju brojeva veća ili jednaka od njihove geometrijske sredine. Za brojeve a_n *i* $\frac{x}{a_n}$ *to znači da je:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{x}{a_n}} = \sqrt{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Iz gornje nejednakosti imamo: $a_n \geq \sqrt{x}$ $(\forall n \geq 2)$, *odakle slijedi da za donju među niza* (a_n) *možemo uzeti broj* $m = \min\{x, \sqrt{x}\}$. *Nadalje, za* $n \geq 2$ *zbog* $a_n \geq \sqrt{x}$ *vrijedi*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{a_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1, \quad \text{tj.} \quad a_{n+1} \leq a_n \ (\forall n \geq 2).$$

Dakle, ovaj niz je monotono padajući. Primijetimo još da je jedna gornja međa ovog niza broj $M = \max\{a_1, a_2\} = \max\{x, (x+1)/2\}$.

Zadatak 3.7. *Pokažite da je niz* $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ *omeđen i monotono rastući.*

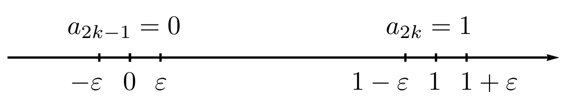
3.4 Limes niza realnih brojeva

Definicija 26. *Kažemo da je realan broj a* gomilište *ili* točka gomilanja *niza realnih brojeva (a_n) ako svaka ε-okolina broja a sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n).*

Primjer 3.16. *Pokažimo da je 0 gomilište niza $(\frac{1}{n})$.*
Za zadani $\varepsilon > 0$ u ε-okolini $(-\varepsilon, \varepsilon)$ oko nule nalazi se beskonačno mnogo članova ovog niza: to su svi oni članovi za koje je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, tj. za koje je $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Zamijetite da je 0 jedino gomilište danog niza.

Primjer 3.17. *Gomilište (jedinstveno) stacionarnog niza $4, 3, 2, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ je realan broj 1.*

Primjer 3.18. *Niz kome je opći član $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ ima dva gomilišta: 0 i 1.*
Zamijetite da se radi o nizu $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$. Članovi niza s parnim indeksom su 1 ($a_{2k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$), a članovi s neparnim indeksom su 0 ($a_{2k-1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$). U svakoj ε-okolini nule nalaze se svi članovi niza s neparnim indeksom, a u svakoj ε-okolini broja 1 nalaze se svi članovi niza s parnim indeksom.



Slika 3.2

Primjer 3.19. *Niz kome je opći član $a_n = n^2$ nema gomilište.*
Opći član $a_n = n^2$ je sve veći što je n veći pa se u svakoj ε-okolini proizvoljnog realnog broja a može naći najviše konačno mnogo članova niza.

Zadatak 3.8. *Odredite gomilišta nizova:*

a) $a_n = n^{(-1)^n}$, *b)* $a_n = \cos(n\pi)$,
c) $a_n = ((-1)^n + 1) \cdot 2^n$, *d)* $a_n = 1 - \cos\dfrac{n\pi}{3}$.

Za teorijska razmatranja važan je sljedeći teorem kojega navodimo bez dokaza.

Teorem 3.1 (Bolzano – Weierstrass)**.** *Svaki omeđen niz realnih brojeva ima barem jedno gomilište.*

Ako postoji realan broj a takav da se u svakoj njegovoj ε-okolini nalaze skoro svi članovi niza (a_n), tj. svi članovi osim eventualno konačno mnogo njih, onda kažemo da je niz (a_n) konvergentan, a broj a zovemo limes niza (a_n) i pišemo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ili $a_n \to a$ kada $n \to \infty$. Ovu definiciju limesa možemo operacionalizirati (učiniti primjenjivom) na sljedeći način:

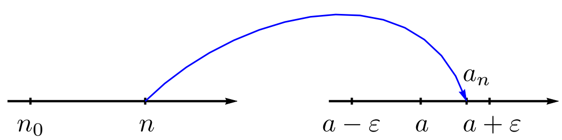
Definicija 27. *Kažemo da je niz (a_n)* konvergentan *ako postoji realan broj a takav da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da (vidi Sliku 3.3):*

$$(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon). \tag{3.5}$$

Broj a zovemo limes *ili* granična vrijednost *niza (a_n) i pišemo:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n; \qquad \text{ili} \qquad a_n \to a \ \text{ kada } \ n \to \infty.$$

Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.



Slika 3.3

Teorem 3.2.

a) *Svaki konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedan limes.*

b) *Konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedno gomilište. To je ujedno i njegov limes.*

Dokaz. Neka je (a_n) konvergentan niz realnih brojeva, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $b\,(b \neq a)$ proizvoljan realan broj. Odaberimo disjunktne ε-okoline brojeva a i b, primjerice $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ i $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, gdje je $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{4}$. Prema (3.5) u ε-okolini broja a nalaze se svi članovi niza (a_n) osim možda konačno mnogo njih pa ti članovi ne mogu biti u ε-okolini $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ broja b. Prema tome, b ne može biti niti granična vrijednost niti gomilište toga niza. $\square$

Primjer 3.20. *Niz* $a_n = \frac{1}{n}$ *je konvergentan i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *(vidi* Primjer *3.16). Niz kome je opći član* $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, *je konvergentan i* $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Primjer 3.21. *Ispitajmo konvergenciju niza zadanog općim članom* $a_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2-1}$.
Što je n *veći to su i brojnik* n^2+1 *i nazivnik* $3n^2-1$ *sve veći. Tu se javlja tzv. neodređeni oblik* $\frac{\infty}{\infty}$ *(vidi Primjedbu 3.1, str. 103). Podijelimo li i brojnik i nazivnik s najvećom potencijom od* n *(*n^2*) dobivamo:*

$$a_n = \frac{n^2+1 \ / : n^2}{3n^2-1 \ / : n^2} = \frac{1+1/n^2}{3-1/n^2}$$

odakle možemo uočiti da je brojnik $1+1/n^2$ *sve bliži broju* 1, *a nazivnik* $3-1/n^2$ *broju* 3, *ako* n *raste. Naslućujemo da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^2-1} = \dfrac{1}{3}$. *Dokažimo tu pretpostavku.*

Neka je $\varepsilon > 0$ *proizvoljan realan broj i odredimo prirodan broj* n_0 *takav da je* $|a_n - \dfrac{1}{3}| < \varepsilon$ *za svaki* $n > n_0$. *Provjerite da je:*

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n^2+1}{3n^2-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{3(3n^2-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3\varepsilon}+1\right)}$$

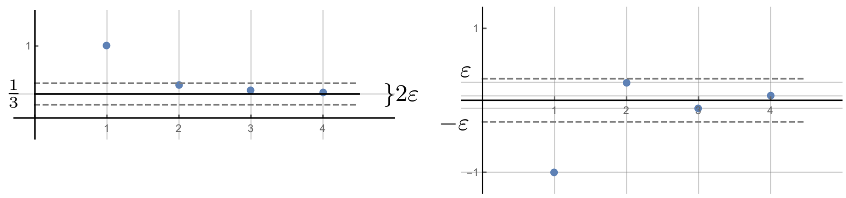
Za traženi broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *možemo uzeti bilo koji prirodan broj veći od* $\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3\varepsilon}+1\right)}$.
Najmanji takav broj je upravo $\left[\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3\varepsilon}+1\right)}\right] + 1$, *gdje* $[x]$ *označava najveći cijeli broj manji ili jednak od* x *(vidi* Primjer 2.22, *str. 42).*

Primjerice za $\varepsilon = 0.1$ *i* $n_0(0.1) = 3$ *izvan te* ε *okoline broja* $\frac{1}{3}$ *nalaze se samo prva dva člana, dok su ostali unutar te* ε*-okoline (vidi* Tablicu 3.1 *i* Sliku 3.4a*).*

n	a_n	$\lvert a_n - a\rvert$
1	1	$2/3 = 0.\dot{6}$
2	$5/11 = 0.\dot{4}\dot{5}$	$4/33 = 0.\dot{1}\dot{2}$
3	$5/13 \approx 0.38$	$2/39 \approx 0.05$
4	$17/47 \approx 0.36$	$4/141 \approx 0.028$
5	$13/37 \approx 0.35$	$2/111 \approx 0.018$

Tablica 3.1

(a) $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2-1}$ (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$



Slika 3.4

Primjer 3.22. *Pokažimo da je niz* $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ *konvergentan i da mu je limes jednak nuli (vidi* Sliku 3.4b*).*
Za $\varepsilon > 0$ *imamo*

$$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Dovoljno je uzeti $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$.

Primjer 3.23. *Ispitajmo konvergenciju niza* $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Što je n *veći to su i* $\sqrt{n+1}$ *i* $\sqrt{n}$ *sve veći pa ne možemo ništa zaključiti o ponašanju njihove razlike (općeg člana* a_n*) kada* n *teži u beskonačno. Javlja se tzv. neodređeni oblik* $\infty - \infty$ *(vidi Primjedbu 3.1, str. 103). Zamijetite da je:*

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

odakle naslućujemo da je a_n *sve bliži nuli što je* n *veći. Pokažimo da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Za zadani realan broj $\varepsilon > 0$ *treba pronaći prirodan broj* n_0 *takav da za svaki* $n > n_0$ *vrijedi* $|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$, *tj.* $\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. *Iz posljednje nejednakosti vidimo da je za* n_0 *dovoljno uzeti bilo koji prirodan broj takav da je* $\sqrt{n_0} > \frac{1}{2\varepsilon}$. *Naime, tada za* $n > n_0$ *imamo:*

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n_0+1} + \sqrt{n_0} > 2\sqrt{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tako smo dokazali da je $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Primjer 3.24. *Može se pokazati:* a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *za svaki* $a > 0$ *(vidi [7]).*

Zadatak 3.9. *Pomoću definicije limesa pokažite da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *gdje su* *a)* $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}$, $a = \dfrac{3}{2}$,

b) $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}$, $a = 2$,

c) $a_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a = -2$,

d) $a_n = \dfrac{4n-1}{2n-1}$, $a = 2$,

e) $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}$, $a = 2$,

f) $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\dfrac{3}{5}$.

Definicija 28. *Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da* divergira *k* $+\infty$ *i pišemo* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *ako za svaki broj* $M > 0$ *postoji prirodan broj* n_0, *takav da* $(n > n_0) \Rightarrow (a_n > M)$.

Niz realnih brojeva (a_n) divergira *k* $-\infty$ *i pišemo* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *ako za svaki* $m < 0$ *postoji prirodan broj* n_0, *takav da* $(n > n_0) \Rightarrow (a_n < m)$.

Primjer 3.25. *Niz zadan općim članom* $a_n = n^2$ *divergira k* $+\infty$, *a niz zadan općim članom* $b_n = -n$ *prema* $-\infty$.

Primjer 3.26. *Pokažimo da je*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 \leq |q| < 1 \\ 1, & \text{za } q = 1 \\ +\infty, & \text{za } q > 1. \end{cases}$$

- *Ako je* $q = 0$, *onda je* $q^n = 0$ *za svaki* n. *Zato prvo pretpostavimo da je* $0 < |q| < 1$. *Za proizvoljan realan broj* $\varepsilon > 0$ *treba pronaći prirodan broj* n_0 *takav da:*

  $$(n > n_0) \Rightarrow (|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon).$$

  Budući da je

  $$|q|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \log|q| < \log\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|},$$

  treba pronaći takav prirodan broj n_0 *da* $(n > n_0) \Rightarrow \left(n > \dfrac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right)$. *Dovoljno je uzeti* $n_0 = \left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right]$.

- *Za* $q = 1$ *je* $q^n = 1$ *pa je* $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

- *Za* $q > 1$ *prema Bernoullijevoj nejednakosti (vidi Primjer 1.12, str. 11) imamo:*

  $$q^n = [1 + (q-1)]^n \geq 1 + n(q-1).$$

  Za proizvoljan realan broj $M > 0$ *možemo odabrati takav* $n_0 \in \mathbb{N}$ *da je* $1 + n_0(q-1) > M$, *odakle za* $n \geq n_0$ *dobivamo:*

  $$q^n \geq 1 + n(q-1) \geq 1 + n_0(q-1) > M.$$

  Prema definiciji je $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Primjer 3.27. *Za $q \leq -1$ niz (q^n) je divergentan.*
Za $q = -1$ dobivamo niz $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$. On ima dva gomilišta $1, -1$ pa je stoga divergentan. Ako je $q < -1$, članovi niza (q^n) s parnim indeksom postaju sve veći što je n veći, a članovi s neparnim indeksom sve manji. To znači da se u svakoj ε-okolini realnog broja a može naći najviše konačno mnogo članova niza pa taj niz nema limes.

Primjedba 3.1. *Neka su (a_n) i (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Analizirajmo konvergenciju pomoću njih oformljenih nizova a) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, b) $(a_n - b_n)$.*

a) *U ovom slučaju kažemo da se radi o tzv.* **neodređenom obliku** $\frac{\infty}{\infty}$. *Naime, i brojnik i nazivnik divergiraju prema ∞ kada n teži u ∞. Pokažimo jednostavnim primjerom da neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ u limesu (ukoliko on postoji) može dati bilo koji pozitivan realan broj:*
Neka je $a_n = c \cdot n$, $c > 0$ i $b_n = n$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Budući da je $\frac{a_n}{b_n} = c$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

b) *Ovdje se radi o tzv.* **neodređenom obliku** $\infty - \infty$. *Ovaj neodređeni oblik u limesu može dati bilo koji realan broj, kao što se vidi na primjeru nizova: $a_n = c + n$, $b_n = n$. Vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$.*

Osim ova dva neodređena oblika, postoje i tzv. neodređeni oblici $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Za teorijska razmatranja od velikog je značenja tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 3.3. *Svaki konvergentan niz realnih brojeva je omeđen.*

Dokaz. Neka niz (a_n) konvergira broju a. Tada se u proizvoljnoj ε-okolini njegova limesa a nalaze skoro svi članovi niza, a izvan te okoline ima ih najviše konačno mnogo. Zbog toga možemo odabrati brojeve $m, M \in \mathbb{R}$ $(m < M)$ takve da su svi članovi niza sadržani u segmentu $[m, M]$. $\square$

Obrat prethodne tvrdnje nije istinit, tj. postoji niz koji je omeđen, ali nije konvergentan. Takav je primjerice niz $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$. Međutim, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem 3.4. *Svaki omeđen i monoton niz realnih brojeva je konvergentan.*

Dokaz. Neka je (a_n) rastući niz. Prema pretpostavci skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je odozgo omeđen i prema tome ima supremum $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pokažimo da je niz (a_n) konvergentan i da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Za svaki $\varepsilon > 0$ iz definicije supremuma slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Niz (a_n) je rastući pa za $n > n_0$ dobivamo $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$, odakle dobivamo $|a_n - a| < \varepsilon$ za svaki prirodan broj $n > n_0$. Time je pokazano da je niz (a_n) konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ako je niz (a_n) padajući, tada je niz $(-a_n)$ rastući, i prema tome konvergira.

Primjer 3.28. *Niz iz* Primjera 3.15*, str. 97 je monotono padajući i omeđen, pa je prema prethodnom teoremu konvergentan.*

Broj e. Može se pokazati (vidi *Dodatak 8.2*) da je niz (e_n) realnih brojeva, definiran formulom

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

strogo rastući i omeđen niz $(2 \leq e_n < 3)$ pa prema prethodnom teoremu ima limes koji zovemo **broj** e. Dakle,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.6}$$

Broj e ima važnu ulogu u matematičkoj analizi. Naziva se **Eulerov**[3] **broj**. Često i prirodno uzima se za bazu logaritma (*prirodni logaritam* ln). Broj e je iracionalan, a njegova približna vrijednost na 15 decimalnih mjesta je $e = 2.718281828459045\ldots$.

Nadalje, može se pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{\beta a_n} = e^{\alpha\,\beta} \tag{3.7}$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za svaki niz (a_n) realnih brojeva takav da je je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Tako je primjerice

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n} = e^{3\cdot 2} = e^6, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n^7}\right)^{2n^7} = e^{3\cdot 2} = e^6.$$

[3] Leonhard Euler (1707-1783) rođen je u Švicarskoj, ali se razdoblja njegova najplodnijeg rada povezuju s Berlinom u vrijeme Fredericka Velikog i Sant Petersburgom u vrijeme Katarine Velike. Uz Lagrangea, smatra se najvećim i najplodnijim matematičarem 18. stoljeća. Objavio je brojne radove iz teorijske i primijenjene matematike. Njemu se pripisuju danas standardne oznake: π, e, i te oznake za sumaciju Σ i vrijednost funkcije $f(x)$. Njegova knjiga *„Introductio in analysin infinitorum"* smatra se najkompetentnijim matematičkim tekstom 18. stoljeća.

Primjer 3.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2.$

Zadatak 3.10. *Odredite sljedeće limese:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$, *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$, *c)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n^2}$, *d)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

3.5 Algebarske operacije s nizovima

Primjeri iz prethodne točke pokazuju da je nalaženje limesa niza realnih brojeva po definiciji težak posao. Stoga ćemo u ovoj točki navesti i ilustrirati neka pravila za nalaženje limesa.

Neka su (a_n), (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva. Pod **zbrojem**, **razlikom**, **produktom** i **kvocijentom** tih nizova podrazumijevamo redom nizove: $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\frac{a_n}{b_n}$. Kod kvocijenta treba biti $b_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Sljedećim teoremom iskazana su osnovna pravila za računanje s limesima.

Teorem 3.5. *Neka su nizovi realnih brojeva (a_n) i (b_n) konvergentni. Tada vrijedi:*

1. *niz $(a_n \pm b_n)$ je konvergentan i vrijedi:* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *(tj. limes zbroja (razlike) jednak je zbroju (razlici) limesa).*
2. *niz $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan i vrijedi:* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *(tj. limes produkta jednak je produktu limesa).*
3. *ako je $b_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, niz (a_n/b_n) je konvergentan i vrijedi:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ *(tj. limes kvocijenta jednak je kvocijentu limesa).*

Dokaz. Dokažimo samo prvo pravilo i to za slučaj zbrajanja. Dokaz preostalih pravila zainteresirani čitatelj može naći u [7], [21].

Neka $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da

$$(n > n_1) \Rightarrow (|a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2}) \quad \& \quad (n > n_2) \Rightarrow (|b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Tada za $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Nadalje, za $n > n_0$ vrijedi $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\square$

Primjedba 3.2. *Stacionaran niz s općim članom $b_n = c$, gdje je c bilo koji realan broj, konvergira broju c. Primijenimo li pravilo za limes produkta dobivamo da za svaki konvergentan niz realnih brojeva (a_n) vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Primjer 3.30. *Vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{6n-10}{n}\Big) = 2\lim_{n\to\infty}\Big(3 - \frac{5}{n}\Big) = 2\left(3 - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\right) = 2(3-0) = 6.$$

Primjer 3.31. *Odredimo* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4}$.

U ovom primjeru ne smijemo primijeniti pravilo za limes kvocijenta, jer nizovi u brojniku i nazivniku nisu konvergentni. Izlučivanjem najveće potencije od n u brojniku i nazivniku dobivamo:

$$\frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4} = \frac{n^2\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}}.$$

Prema navedenim pravilima je:

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} = 3,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2} = 1.$$

Sada pomoću pravila za limes kvocijenta dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Primjedba 3.3. *Općenito, limes niza $(R(n))$ kome je opći član racionalna funkcija R u varijabli n možemo lako odrediti izlučimo li u brojniku i nazivniku najveću potenciju od n.*

Neka je $R = \dfrac{P}{Q}$ *racionalna funkcija,* $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *i* $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0$*. Budući da je*

$$R(n) = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m n^m \left(1 + \dfrac{a_{m-1}}{a_m n} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_m n^m}\right)}{b_k n^k \left(1 + \dfrac{b_{k-1}}{b_k n} + \cdots + \dfrac{b_0}{b_k n^k}\right)}$$

i da svaki od članova $\dfrac{a_{m-1}}{a_m n}, \ldots, \dfrac{a_0}{a_m n^m}, \dfrac{b_{k-1}}{b_k n}, \ldots, \dfrac{b_0}{b_k n^k}$ *konvergira nuli, dobivamo:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & m < k \\ \frac{a_m}{b_m}, & m = k \\ +\infty, & m > k \ \& \ \frac{a_m}{b_k} > 0 \\ -\infty, & m > k \ \& \ \frac{a_m}{b_k} < 0. \end{cases}$$

Primjer 3.32. *Sljedećim primjerima ilustrirajmo tvrdnju iz prethodne primjedbe:*

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + n - 2}{3n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3} = \infty,$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{-4n^3 + n - 2}{3n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n^3}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n}{3} = -\infty,$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + n - 2}{3n^3 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3n} = 0.$

Primjer 3.33. *Neka je* s_n *zbroj prvih n-članova geometrijskog niza* $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$*. Odredimo (ukoliko postoji)* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *:*

Za $q = 1$ *je* $s_n = a_1 \cdot n$*, odakle je* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty, & a_1 > 0 \\ -\infty, & a_1 < 0 \\ 0, & a_1 = 0. \end{cases}$

Neka je $q \neq 1$*. Tada je* $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = a_1 \left(\dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^n}{1-q}\right)$*. Za* $|q| < 1$ *je* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ *(vidi Primjer 3.26, str. 102) pa dobivamo*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q} - a_1 \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Za $q > 1$ *je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{1-q} = -\infty$ *(Primjer 3.26, str. 102), pa zaključujemo kako je* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty, & a_1 > 0 \\ -\infty, & a_1 < 0 \\ 0, & a_1 = 0 \end{cases}$*, dok je za* $q \leq -1$ *niz* (s_n) *divergentan (vidi Primjer 3.27)*

Primjer 3.34. *Ispitajmo konvergenciju niza* $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$, *s prvim članom* $a_1 = x > 0$.
Ovaj niz je omeđen i monotono padajući (Primjer 3.15) i prema tome konvergentan i ima limes $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Prijelazom na limes dobivamo:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \quad tj. \quad a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right),$$

odakle je $a^2 = x$. *Budući da je* $a_n \geq \sqrt{x}$ *za svaki* $n \geq 2$, *to je* $a > 0$ *pa je* $a = \sqrt{x}$.

Primjedba 3.4. *Ukoliko treba ispitati konvergenciju niza realnih brojeva definiranog rekurzivnom formulom, prije prijelaza na limes prethodno treba utvrditi da je taj niz konvergentan. Ilustrirajmo primjerom:*
Niz (a_n) *definiran je rekurzivnom formulom:* $a_1 = 2$, $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$. *Brzopletim prijelazom na limes (bez prethodne provjere konvergencije) uz pretpostavku da je* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *dobili bi* $a = \frac{2}{a}$, *odakle bi slijedilo da je* $a = \sqrt{2}$. *Međutim, raspisivanjem članova niza zaključujemo da se radi o divergentnom nizu (ima dva gomilišta):* $2, 1, 2, 1, 2, \ldots$.

Zadatak 3.11. *Odredite limese:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$, *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}$, *d)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+n)^4 - (n-1)^4}$,

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$, *f)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}$.

Zadatak 3.12. *Odredite limese:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1} - n}$, *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3} - n}$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$, *d)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^5+2} + \sqrt{n-2}}$.

Zadatak 3.13. *Ispitajte konvergenciju nizova zadanih rekurzivnom formulom:*

a) $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{2}$, *b)* $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, $a_1 = 1$,

c) $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 1)$, $a_1 = 0$, *d)* $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $a_1 = 1$.

Ponekad o konvergenciji niza možemo zaključiti iz konvergencije odgovarajućeg niza apsolutnih vrijednosti, o čemu nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.6. *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $||a_n| - 0| < \varepsilon$, tj.$|a_n - 0| < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, što nam govori da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Primjer 3.35. *Odredimo limes niza* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
$|a_n| = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. *Prema prethodnom teoremu je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Primjedba 3.5. *U prethodnom teoremu bitno je da odgovarajući niz apsolutnih vrijednosti* $(|a_n|)$ *konvergira* <u>*nuli*</u>*. U suprotnom polazni niz* (a_n) *ne mora konvergirati, što se lako vidi na primjeru niza* $a_n = (-1)^n$.

Često puta niz kome treba ispitati konvergenciju možemo „stisnuti" između dva konvergentna niza. Ako pri tome ta dva niza konvergiraju istoj graničnoj vrijednosti, onda i polazni niz konvergira toj vrijednosti, kao što nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.7. *Neka su* (a_n), (b_n), (c_n) *nizovi realnih brojeva i neka postoji prirodan broj* n_1 *takav da je*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad (n \geq n_1).$$

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, *onda i niz* (b_n) *konvergira prema* a, *tj.* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Dokaz. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi $n_0(a)$ i $n_0(c)$ takvi da je $a - a_n \leq |a - a_n| < \varepsilon$ za $n > n_0(a)$ i $c_n - a \leq |a - c_n| < \varepsilon$ za $n > n_0(c)$. Neka je $n_0 = \max\{n_0(a), n_0(c), n_1\}$. Za $n > n_0$ imamo $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, tj. $|b_n - a| < \varepsilon$, odakle je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Primjer 3.36. *Pokažimo da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbb{R}$.
Tvrdnja je očigledna za $a = 0$. *Neka je* $a > 0$. *Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n_0 > a$, *pa je*

$$n! = n(n-1)\cdots(n_0+1)n_0(n_0-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n_0! \cdot n_0^{n-n_0}$$

za svaki $n \geq n_0$. *Stoga je*

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n_0! \cdot n_0^{n-n_0}} = \left(\frac{a}{n_0}\right)^n \frac{n_0^{n_0}}{n_0!}, \quad n \geq n_0.$$

Budući da je $0 < \frac{a}{n_0} < 1$, *to je* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n_0}\right)^n = 0$ *(vidi* Primjer 3.26, *str. 102).* *Primjenom prethodnog teorema dobivamo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Ako je $a < 0$, *onda je* $|a| > 0$ *i prema već dokazanom vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$, *odakle je prema prethodnom teoremu* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Zadatak 3.14. *Dokažite da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Poglavlje 4

Redovi realnih brojeva

Kao motivaciju za uvođenje pojma reda i njegove konvergencije razmotrimo problem zapisa periodičnog decimalnog broja u obliku razlomka.

Radi određenosti, neka je $r = 0.135135135\cdots$ periodičan decimalni broj, koji kraće pišemo kao $r = 0.\dot{1}3\dot{5}$. Kako taj broj zapisati u obliku razlomka? Kao prvo, uočimo da je

$$r = \frac{135}{10^3} + \frac{135}{10^{3\cdot 2}} + \frac{135}{10^{3\cdot 3}} + \cdots + \frac{135}{10^{3\cdot n}} + \cdots$$

te da pribrojnici $a_n := \dfrac{135}{10^{3n}}$, $n \in \mathbb{N}$, čine geometrijski niz s prvim članom $a_1 = \dfrac{135}{10^3}$ i kvocijentom $q = \dfrac{1}{10^3} < 1$. Budući da pribrojnika ima beskonačno mnogo, ne možemo ih sve zbrojiti. Kako odrediti njihov zbroj? Pokušajmo ovako. Sa s_n označimo sumu prvih n pribrojnika, tj. neka je $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Što je n veći, to s_n predstavlja bolju aproksimaciju broja r (zbrojili smo više članova). Stoga je za očekivati da s_n konvergira broju r. Prema *Primjeru 3.33*, str. 107, je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{135}{10^3 - 1} = \tfrac{5}{37}.$$

Dijeljenjem je lako provjeriti da je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \tfrac{5}{37} = r$.

4.1 Pojam reda

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Pomoću njegovih članova induktivno definirajmo **niz parcijalnih suma** (s_n) :

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_2\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
&s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Uočimo da s_n predstavlja sumu prvih n članova niza (a_n).

Definicija 29. *Uređeni par nizova realnih brojeva $((a_n), (s_n))$ zovemo* red realnih brojeva *i označavamo s* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$. *Pri tome a_n zovemo* općim članom, *a s_n zovemo n-tom* parcijalnom sumom reda $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$.

Definicija 30. *Za red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ kažemo da je* konvergentan *ako je njegov niz parcijalnih suma (s_n) konvergentan. Pri tome $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ zovemo* suma *ili* zbroj reda $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *i označavamo s* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *tj.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Za red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ kažemo da je divergentan *ako je njegov niz parcijalnih suma (s_n) divergentan.*

Primjedba 4.1. *Za red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ u literaturi se često koristite i oznake:*

$$\sum_{k\geq 1} a_k \quad \text{ili} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Primjer 4.1. *Ispitajmo konvergenciju* **geometrijskog reda** $\sum\limits_{k\geq 1} a_1 q^{k-1}$:

Za n-tu parcijanla suma s_n vrijedi: $s_n = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}) = \dfrac{a_1}{1-q} - a_1\dfrac{q^n}{1-q}$. Prema Primjerima 3.26 i 3.27 str. 102 limes $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ postoji onda *i samo onda ako je* $|q| < 1$ *i pri tome je* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. *Dakle, geometrijski red je konvergentan onda i samo onda ako je* $|q| < 1$. *Pri tome njegova suma je* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$.

Zadatak 4.1. *Ispitajte konvergenciju i nađite sumu (ako postoji) redova:*
a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}}$, *b)* $\sum\limits_{n\geq 1} \left(2^{1-\alpha}\right)^{n-1}$, *c)* $\sum\limits_{n\geq 1} 2^n$.

Primjer 4.2. *Ispitajmo konvergenciju reda*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Kako je niz (s_n) *parcijalnih suma:*

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

divergentan (ima dva gomilišta: 0 i 1), ovaj red je divergentan i nema smisla tražiti njegovu sumu.

Primjer 4.3. **Harmonijski red** $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k}$ *je divergentan:*

Niz parcijalnih suma kome je n-ti član $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ *je rastući niz. Matematičkom indukcijom lako se pokaže da je* $s_{2^n} > 1 + \dfrac{n}{2}$ *za svaki* $n \geq 2$, *odakle dobivamo* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Primjedba 4.2. *Može se pokazati (vidi [7]) da* **hiperharmonijski red** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, *konvergira onda i samo onda ako je* $\alpha > 1$. *Tako primjerice redovi* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ *konvergiraju, dok redovi* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ *divergiraju.*

Primjer 4.4. *Odredimo sumu reda* $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Budući da je $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, *za n - tu parcijalnu sumu dobivamo:*

$$\begin{aligned} s_n = & \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) + \ldots \\ & + \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$, *red* $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k(k+1)}$ *je konvergentan i suma mu iznosi* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$.

Primjedba 4.3. *Zapis reda može imati općenitiji oblik:* $\sum\limits_{n\geq k} a_n$, *gdje je* $k\in\mathbb{Z}$. *Tako primjerice zapisi* $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} a_1q^{n-1}$, $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} a_1q^{n}$ *predstavljaju jedan te isti red:*

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + \cdots .$$

Nadalje, uočimo da redovi $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *i* $\sum\limits_{n\geq k} a_n$, $k\in\mathbb{Z}$, *istovremeno oba konvergiraju ili oba divergiraju iako im se, u slučaju da konvergiraju, sume razlikuju za zbroj prvih* $k-1$ *članova. Naime, ako je* s_n n*-ta parcijalna suma reda* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, *a* σ_n n*-ta parcijalna suma reda* $\sum\limits_{n\geq k} a_n$, *onda je* $\sigma_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1} = s_{k+n-1} - (a_1 + \cdots + a_{k-1})$, *odakle se vidi da* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ *postoji onda i samo onda ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} s_{k+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *te da je u tom slučaju* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_{k-1} + \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$.

Primjer 4.5. *Odredimo sumu reda* $\sum\limits_{k\geq 3} \dfrac{4-5k}{k^3-3k^2+2k}$.

Najprije rastavimo opći član na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}\frac{4-5k}{k^3-3k^2+2k} &= \frac{4-5k}{k(k-1)(k-2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} + \frac{C}{k-2} \quad / \, k(k-1)(k-2)\\ 4-5k &= A(k-1)(k-2) + Bk(k-2) + Ck(k-1).\end{aligned}$$

Zamjenjujući k *u prethodnoj jednakosti redom s* $0,1,2$ *dobivamo* $A=2$, $B=1$, $C=-3$. *Dakle,*

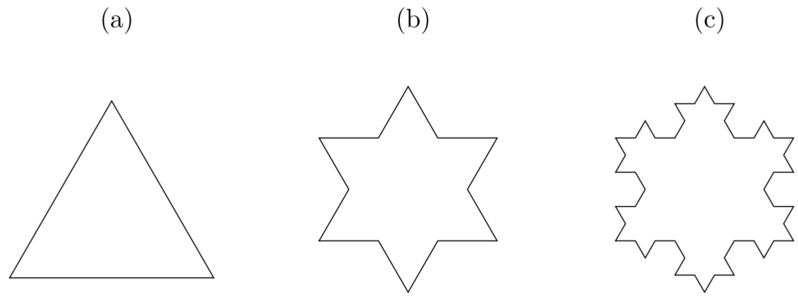
$$\frac{4-5k}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k-2},$$

odakle dobivamo:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{k=3}^{n+2}\left(\frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k-2}\right) = 2\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k-1} - 3\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k-2}\\ &= 2\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= 2\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) - 3\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= -4 + \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2}.\end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-4 + \dfrac{3}{n+1} + \dfrac{2}{n+2}\right) = -4$, *zadani red je konvergentan, a njegova suma iznosi* -4, *tj.* $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{4-5k}{k^3-3k^2+2k} = -4$.

Primjer 4.6. *Konstruirajmo niz geometrijskih objekata na sljedeći način: Pođimo od istostraničnog trokuta sa stranicom* $a=1$ *(* Slika 4.1a*)*



Slika 4.1: *Generiranje „snježne pahuljice”*

Podijelimo svaku stranicu trokuta na tri jednaka dijela i nad srednjim dijelom konstruirajmo istostraničan trokut (sa stranicom $\frac{a}{3}$). Dobivamo lik prikazan na Slici 4.1c*, kome svaku stranicu dijelimo na tri jednaka dijela i nad srednjim dijelom konstruiramo istostraničan trokut. Ponavljajući ovaj postupak dobivamo niz likova $L_1, L_2, \ldots$ kojima se opsezi $O_1, O_2, \ldots$ i površine $P_1, P_2, \ldots$ povećavaju.*

- *Razmotrimo najprije opsege $O_1, O_2, \ldots$. Kako se u svakom koraku broj stranica povećava četiri puta, lik L_n ima $3 \cdot 4^{n-1}$ stranica duljine $1/3^{n-1}$. Stoga je*

$$O_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Niz (O_n) je geometrijski niz s kvocijentom $q = \frac{4}{3} > 1$ pa je divergentan.

- *Sada razmotrimo površine $P_1, P_2, \ldots$. Lik L_n $(n \geq 2)$ ima $3 \cdot 4^{n-2}$ malih trokuta iste površine $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)^2$. Zato je*

$$P_n = P_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)^2 = P_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

odakle nije teško vidjeti da niz (P_n) predstavlja niz parcijalnih suma konvergentnog geometrijskog reda

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\sum_{k\geq 2}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-2}$$

čija suma iznosi $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{1}{1-4/9} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.69282$.

Dakle, površine likova konvergiraju, dok njihovi opsezi divergiraju.

U literaturi se ove krivulje mogu naći pod nazivom „krivulje snježnih pahuljica", odnosno Kochove[1] *krivulje. To je jedan od najjednostavnijih fraktalnih skupova.*

Teorem 4.1 (Nužan uvjet konvergencije reda)**.** *Ako je red* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *konvergentan, onda je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ suma reda $\sum_{n\geq 1} a_n$. Iz $a_n = s_n - s_{n-1}$ prijelazom na limes dobivamo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. □

Obrnuto, ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ne možemo zaključiti da je red $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergentan. Primjer, koji potvrđuje ovu tvrdnju, je harmonijski red. Dakle, nužan uvjet nije i dovoljan uvjet da bi red konvergirao.

Primjer 4.7. *Red* $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+5}{n^2+4}$ *je divergentan jer nije ispunjen nužan uvjet konvergencije:* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n^2+4} = 1 \neq 0$.

Zadatak 4.2. *Za svaki od navedenih redova odredite opći član* a_n, n*-tu parcijalnu sumu* s_n *i sumu reda:*

a) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots$ *b)* $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} + \cdots$

c) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots$ *d)* $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$

e) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{216} + \frac{97}{1296} + \ldots$

Zadatak 4.3. *Za svaki od navedenih redova nađite* n*-tu parcijalnu sumu* s_n *i sumu reda:*

a) $\sum_{n\geq 3} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$, *b)* $\sum_{n\geq 3} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$, *c)* $\sum_{n\geq 3} \frac{2}{n(n^2-4)}$,

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{8}{16n^2-8n-15}$, *e)* $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+n-2}$, *f)* $\sum_{n\geq 1} \frac{6}{4n^2-9}$.

[1] Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924), švedski matematičar.

4.2 Kriteriji konvergencije

Računanje sume nekog reda obično je složen matematički problem, koji u većini praktičnih slučajeva nismo u mogućnosti riješiti. Ako ipak, na neki način ustanovimo da je promatrani red konvergentan, u primjenama ćemo se zadovoljiti aproksimacijom sume reda. Zbog toga u ovoj točki navodimo nekoliko osnovnih kriterija za ispitivanje konvergencije redova.

Za red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ kažemo da je **red s nenegativnim članovima** ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Takvi redovi često se javljaju u primjenama, a služe također kod izučavanja redova s članovima proizvoljnog predznaka. Redovi s nenegativnim članovima imaju svojstvo da im je odgovarajući niz parcijalnih suma monotono rastući.

Teorem 4.2. *Red s nenegativnim članovima je konvergentan onda i samo onda ako mu je niz parcijalnih suma omeđen.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka red konvergira. Tada je po definiciji njegov niz parcijalnih suma konvergentan, a svaki konvergentan niz je i omeđen (vidi *Teorem 3.3*, str. 103).

($\Leftarrow$) Neka je niz parcijalnih suma omeđen. Budući da je taj niz i monotono rastući, on konvergira (vidi *Teorem 3.4*). $\square$

Kažemo da je red $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ **majoranta** reda $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n \leq b_n$ za svaki $n \geq n_0$. U isto vrijeme kažemo da je red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ **minoranta** reda $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.

Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [7].

Teorem 4.3 (Poredbeni kriterij)**.** *Red s pozitivnim članovima je konvergentan [divergentan] ako ima barem jednu konvergentnu majorantu [divergentnu minorantu].*

Primjer 4.8. *Ispitajmo konvergenciju redova: a)* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n!}$, *b)* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

a) Uspoređivanjem prvog reda s konvergentnim geometrijskim redom $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ *zaključujemo da je on konvergentan, jer je* $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

b) Drugi red je divergentan. Iz $n < 2^n$ *slijedi* $\sqrt[n]{n} < 2$ *i* $\dfrac{2}{n\sqrt[n]{n}} > \dfrac{1}{n}$. *Prema tome, harmonijski red* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *je minoranta našeg reda. Kako je harmonijski red divergentan, i naš red je također divergentan.*

Zadatak 4.4. *Poredbenim kriterijem ispitajte konvergenciju redova:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2}{(2n-1)\cdot 2^{2n}}$, b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2+n}{1+n^2}$, c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{3n-1}$,

d) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2-4n+5}$, e) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$, f) $\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt{\dfrac{n}{n^4+1}}$,

g) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$, h) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$, i) $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\ln n}$.

Teorem 4.4 (D'Alembertov[2] kriterij)**.** *Neka je* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *red s pozitivnim članovima.*

a) *Ako postoje prirodan broj* n_0 *i realan broj* $q<1$ *takvi da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ (n > n_0),$$

onda je red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *konvergentan.*

b) *Ako postoji prirodan broj* n_0 *takav da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ (n > n_0),$$

onda je red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *divergentan.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti neka je $n_0 = 1$ (vidi *Primjedbu* 4.3, str. 114).

a) Iz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ (n \in \mathbb{N})$ dobivamo $a_2 \leq q a_1, \ a_3 \leq q a_2 \leq q^2 a_1, \ldots$, tj.

$$a_k \leq q^{k-1} a_1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Za zadani red pronašli smo jednu konvergentnu majorantu (geometrijski red s kvocijentom $q<1$). Dakle, prema *Teoremu* 4.3 red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ je konvergentan.

b) Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots,$$

odakle vidimo da nije ispunjen nužan uvjet konvergencije: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. □

[2] J. le R. D'Alembert (1717–1783) francuski matematičar i filozof.

Primjer 4.9. *Pokažimo da red* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$ *konvergira.*

Opći član je $a_n = \dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$. *Provjerite da je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+2}{2n(n+1)} < \frac{1}{2}$ *(za* $n \geq 2$*)!* *Dakle, red konvergira.*

Teorem 4.5 (D'Alembertov kriterij u formi limesa). *Neka je* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$*, tada je red* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *konvergentan za* $L < 1$ *i divergentan za* $L > 1$*.*

Dokaz. Neka je $L < 1$. Tada prema definiciji limesa niza za $\varepsilon = \dfrac{1-L}{2}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, odakle imamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + L = 1 - \varepsilon < 1, \quad n > n_0.$$

Ako u D'Alembertovom kriteriju uzmemo $q = \varepsilon + L$, dobivamo da red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergira.

Neka je $L > 1$. Za $\varepsilon = L - 1 > 0$ prema definiciji limesa niza postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, odakle je $1 = L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n > n_0)$. Prema D'Alembertovom kriteriju red divergira. □

Primjedba 4.4. *Ilustrirajmo primjerima da za* $L = 1$ *ne možemo zaključiti ništa o konvergenciji reda. Za harmonijski red* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *je* $L = 1$*, a kao što vam je poznato taj red je divergentan. Za red* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ *je* $L = 1$*, a taj red je konvergentan.*

Primjer 4.10. *Ispitajmo konvergenciju redova:*
a) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^n}{n!}$, $(a > 0)$, *b)* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n!}{n^n}$:

a) Budući da je: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$, *prema D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da je red konvergentan.*

b) Red je konvergentan prema D'Alembertovu kriteriju:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Zamijetite da iz nužnog uvjeta konvergencije dobivamo: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $(a > 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Zadatak 4.5. *D'Alembertovim kriterijem ispitajte konvergenciju redova:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$,	*b)* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$,	*c)* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!n!}$,
d) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^n}{(2n)!}$,	*e)* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$,	*f)* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n+2)!}$,
g) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n}{(n+2)!4^n}$,	*h)* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$,	*i)* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!}{\sqrt{2^n+3}}$.

Teorem 4.6 (Cauchyjev[3]kriterij)**.** *Neka je* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *red s nenegativnim članovima.*

a) Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ *i realan broj* $q < 1$ *takav da je* $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ *za svaki* $n > n_0$*, onda je red* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *konvergentan.*

b) Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *za beskonačno mnogo indeksa* n*, onda je red* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *divergentan.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti neka je $n_0 = 1$ (vidi *Primjedbu* 4.3, str. 114).

a) Iz $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ dobivamo $a_n \leq q^n$, $n \in \mathbb{N}$. Prema poredbenom kriteriju red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergira jer smo mu pronašli jednu konvergentnu majorantu (geometrijski red $\sum\limits_{n\geq 1} q^n < 1$ s kvocijentom $q < 1$ je konvergentan).

b Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa n, onda je $a_n \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa n pa opći član a_n ne konvergira nuli. $\square$

Primjer 4.11. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$.

---

[3]Augustin Louis Cauchy (1789–1857) je veliki francuski matematičar. Njegov veliki matematički talent u ranom djetinjstvu prvi su uočili Laplace i Lagrange. Svoje prve znanstvene radove napisao je u periodu 1810–1813, radeći kao vojni inženjer u luci Cherbourg koju je Napoleon smatrao ključnim mjestom za invaziju na Englesku. Godine 1815. počeo je predavati matematičku analizu i mehaniku na École Polytechnique, a sljedeće godine postao je član Akademije nauka u Parizu. Predavo je algebru na Sorboni i matematičku fiziku na Collége de France. Do 1830. godine Cauchy je objavio većinu svojih znanstvenih radova iz matematike (ukupno 789 radova). Između ostaloga, osnovao je kombinatoriku koja ga je dovela do konačnih grupa i dao je fundamentalne priloge realnoj i kompleksnoj analizi. Spomenimo samo račun ostatka i precizne definicije limesa i neprekidnosti funkcije na „ε-δ" jeziku koje se i danas koriste u udžbenicima.

Provjerite metodom matematičke indukcije da je $n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$ *za svaki prirodan broj* n. *Odavde je* $\sqrt[n]{n} < \frac{3}{2}$. *Za svaki član reda* a_n *dobivamo* $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} < \frac{3}{4}$. *Red je konvergentan prema Cauchyjevu kriteriju.*

Teorem 4.7 (Cauchyjev kriterij u formi limesa)**.** *Neka je* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *red s nenegativnim članovima. Ako postoji* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, *onda red* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *konvergira za* $L < 1$ *i divergira za* $L > 1$.

Dokaz. Shema dokaza ove tvrdnje istovjetna je dokazu D'Alembertova kriterija u formi limesa. Potrebno je $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zamijeniti s $\sqrt[n]{a_n}$. □

Primjedba 4.5. *Kao i kod D'Alembertova kriterija, za* $L = 1$ *ne možemo zaključiti ništa o konvergenciji reda. U to se možemo lako uvjeriti na primjerima iz Primjedbe 4.4.*

Primjer 4.12. *Ispitajmo konvergenciju reda kome je opći član:*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ paran} \\ \frac{4}{2^n}, & n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Pokažimo da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$. *Neka je* $\varepsilon > 0$ *proizvoljan realan broj. Zamijetite da je*

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ paran} \\ \frac{1}{2}\sqrt[n]{4}, & \text{neparan.} \end{cases}$$

Budući da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1$, *postoji prirodan broj* n_0 *takav da je* $1-2\varepsilon < \sqrt[n]{4} < 1+2\varepsilon$ *za svaki* $n > n_0$. *Množenjem tih nejednakost s* $\frac{1}{2}$ *dobivamo* $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt[n]{4} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, *odakle je* $\frac{1}{2} - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, $(n > n_0)$. *Dakle,* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ *i prema Cauchyjevu kriteriju u formi limesa red je konvergentan.*
Konvergenciju ovog reda ne možemo ustanoviti D'Alembertovim kriterijem u formi limesa. Naime, imamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & n \text{ paran} \\ \frac{1}{8} & n \text{ neparan,} \end{cases}$$

što znači da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *ne postoji.*

Primjer 4.13. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$.

Opći član reda je $a_n = \dfrac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$. *Zamijetite da iz* $1 \le \sqrt[n]{\dfrac{(-1)^n+3}{2}} \le \sqrt[n]{n}$ *slijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(-1)^n+3}{2}} = 1$. *Sada dobivamo*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+3}{2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Prema Cauchyjevom kriteriju (u formi limesa) red je konvergentan.

Zamijetite da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}+3}{(-1)^n+3} = \begin{cases} 1/4, & n \text{ paran} \\ 1, & n \text{ neparan,} \end{cases}$$

što nam govori da limes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *ne postoji. D'Alembertov kriterij (u formi limesa) nije primjenjiv na ovaj red.*

Primjedba 4.6. *Ako postoji* $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, *onda postoji i* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *i pri tome je* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ *(vidi [7]). Dakle, Cauchyjev kriterij u formi limesa daje konvergenciju odnosno divergenciju reda kad god to daje D'Alembertov kriterij u formi limesa. Također, ako nema odluke o konvergenciji reda D'Alembertovim kriterijem* ($\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$), *onda neće biti odluke ni prema Cauchyjevu kriteriju* ($\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$).

Obrat nije istinit, tj. limes $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *može postojati a da ne postoji limes* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. *U to se možete uvjeriti na prethodna dva primjera. Stoga je Cauchyjev kriterij „jači" od D'Alembertova kriterija.*

Zadatak 4.6. *Cauchyjevim kriterijem ispitajte konvergenciju redova:*

a) $\sum\limits_{n\ge1} 2^{-n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, *b)* $\sum\limits_{n\ge1} \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^3}$, *c)* $\sum\limits_{n\ge1} \left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n$, $a\in\mathbb{R}$,

d) $\sum\limits_{n\ge1} \dfrac{2^{n+1}}{n^n}$, *e)* $\sum\limits_{n\ge2} \dfrac{n^3}{(\ln n)^n}$, *f)* $\sum\limits_{n\ge1} \dfrac{n3^{n+2}}{5^n}$,

g) $\sum\limits_{n\ge1} n\left(\dfrac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$, *h)* $\sum\limits_{n\ge2} \sqrt{n}\left(\dfrac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$, *i)* $\sum\limits_{n\ge1} \dfrac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$.

Red $\sum\limits_{n\ge1} a_n$ nazivamo **alterniranim redom** ako je za svaki $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{2n-1} \ge 0, \quad a_{2n} \le 0 \qquad \text{ili} \qquad a_{2n-1} \le 0, \quad a_{2n} \ge 0.$$

Primjerice red $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$ je alternirani red.

Konvergencija alterniranih redova može se ispitivati pomoću Leibnizova kriterija (dokaz vidi u [7]).

Teorem 4.8 (Leibnizov[4]kriterij)**.** *Neka je* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *alternirani red. Ako niz realnih brojeva* $(|a_n|)$ *pada i konvergira nuli, onda je red* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *konvergentan.*

Primjer 4.14. *Red* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *je konvergentan jer je niz* $|a_n| = \dfrac{1}{n}$ *padajući i konvergira nuli.*

Zadatak 4.7. *Leibnizovim kriterijem pokažite konvergenciju redova:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$, *b)* $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n-1)}$,

c) $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{n^3}$, *d)* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}$,

e) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$, *f)* $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \dfrac{n^3}{(n+1)!}$.

Koristeći se pravilima za računanje limesa nizova realnih brojeva i definicijom konvergencije reda, nije teško dokazati sljedeće tvrdnje:

Teorem 4.9. *Neka su* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *i* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *bilo koja dva konvergentna reda realnih brojeva. Tada su redovi:*

$$\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n), \quad \sum_{n\geq 1} (a_n - b_n), \quad \sum_{n\geq 1} \lambda a_n \ (\lambda \in \mathbb{R}),$$

konvergentni i pri tome za njihove sume vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

[4]G. W. Leibniz–njemački matematičar i filozof (1646–1716).

Primjer 4.15.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3}{2^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$
$$=\frac{2}{1-1/3}+\frac{3}{1-1/2}=9.$$

Primjedba 4.7. *U općem slučaju, konvergencija reda* $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n + b_n)$ *ili reda* $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n - b_n)$ *ne povlači konvergenciju redova* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *i* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$*. Tako primjerice red:* $0+0+0+0+\cdots$ *je konvergentan, dok su redovi* $\sum\limits_{n\geq 1} 1$ *i* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)$ *divergentni.*

Redovi s nenegativnim članovima mogu poslužiti za ispitivanje konvergencije redova s članovima bilo kakvog predznaka. Kažemo da je red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ **apsolutno konvergentan** ako je red $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ konvergentan. Red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ je **uvjetno konvergentan** ako je red $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergentan, a red $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ divergentan.

Teorem 4.10. *Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.*

Primjer 4.16. *Red* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$ *je apsolutno konvergentan.*

Budući da je $|a_n| = \dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$*, treba pokazati da konvergira red* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$*, što je učinjeno u Primjeru 4.9, str. 119.*

Primjer 4.17. *Pokazali smo da red* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ *konvergira i da red* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ *divergira. Dakle, red* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ *je uvjetno konvergentan.*

Zadatak 4.8. *Ispitajte koji od redova konvergira apsolutno, koji uvjetno, a koji divergira:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$, *b)* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n-1)^3}$, *c)* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n}\dfrac{n+1}{n}$,

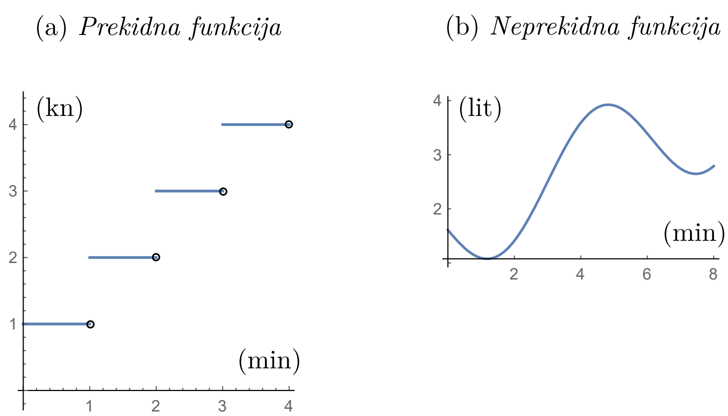
d) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$, *e)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, *f)* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n}\dfrac{n^3}{2^n}$.

Poglavlje 5

Limes funkcije. Neprekidnost

Primjer 5.1. *Cijena jednog telefonskog razgovora svake minute povećava se za* $1kn$*. Graf funkcije koja daje cijenu telefonskog razgovora u svakom trenutku* t *prikazan je na* Slici 5.1a.

Primijetite da vrijednost ove funkcije ima trenutne skokove nakon svake minute. Ovakvu funkciju ne bismo htjeli zvati neprekidnom funkcijom.



Slika 5.1: *Prekidna i neprekidna funkcija*

Primjer 5.2. *U cisternu utječe voda. Graf funkcije koja u svakom vremenskom trenutku daje količinu vode u litrama prikazana je na* Slici 5.1a.

Primijetite da ova funkcija nema nagle trenutne skokove. Ovakvu funkciju htjeli bismo zvati neprekidnom funkcijom.

Pojam *„neprekidnost funkcije u točki”* vrlo je važan pojam za daljnje razumijevanje teksta, a definirat ćemo ga preko pojma **granične vrijednosti** ili **limesa** funkcije.

5.1 Limes funkcije

Definicija 31. *Neka je*

(i) $x_0 \in [a, b]$ *i*

(ii) $f : D \to \mathbb{R}$, *gdje je* $D = [a, b]$ *ili* $D = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

Kažemo da je **granična vrijednost** *[ili* **limes***] funkcije* f *u točki* x_0 *jednaka* L *i pišemo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

ako za svaki *niz* (x_n) *iz* D $(x_n \neq x_0)$ *koji konvergira prema* x_0*, niz funkcijskih vrijednosti* $(f(x_n))$ *konvergira prema* L.

Primjedba 5.1. *Iz* Definicije 31 *vidi se da funkcija u točki* x_0 *ne mora biti definirana, ali ako je, njezin limes u točki* x_0 *ne ovisi o vrijednosti te funkcije u točki* x_0*, već samo o njenim vrijednostima u okolini točke* x_0. *Nadalje,* Definicija 31 *vrijedi i u slučaju ako je* $D = \mathbb{R}$.

Primjer 5.3. *Ispitajmo limes funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ *u točki* $x_0 = 1$.

Neka je (x_n) bilo koji niz takav da $x_n \to 1$. Tada $f(x_n) = 2x_n \to 2$. Dakle, limes funkcije f u točki $x_0 = 1$ jednak je 2.

U principu niz (x_n) koji konvergira prema 1 možemo izabrati na tri načina:

(i) tako da njegovi članovi slijeva teže prema 1, primjerice:

$$x_n : \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \to 1$$

(ii) tako da njegovi članovi zdesna teže prema 1, primjerice:

$$x_n : \quad 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots \to 1$$

(iii) tako da njegovi članovi teže prema 1 „malo slijeva - malo zdesna”, primjerice:

$$x_n : \quad 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, 1 + (-1)^n \frac{1}{n}, \cdots \to 1$$

Nizovi funkcijskih vrijednosti u sva tri slučaja teže prema 2, Naime,

(i) $\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \cdots, \frac{2n}{n+1}, \cdots \ \to \ 2$

(ii) $4, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \cdots, \frac{2n+2}{n}, \cdots \ \to \ 2$

(iii) $0, \frac{6}{2}, \frac{4}{3}, \frac{10}{4}, \frac{8}{5}, \cdots, 2+(-1)^n\frac{2}{n}, \cdots \ \to \ 2$

Primjer 5.4. *Ispitajmo limes funkcije* $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *u točki* $x_0 = 0$*, gdje je*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Uzmimo ponovno tri niza: jedan koji teži prema 0 s lijeva:

$(i) \qquad -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots, -\frac{1}{n}, \cdots \ \to \ 0,$

jedan koji teži prema 0 zdesna:

$(ii) \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \ \to \ 0,$

i jedan niz čiji članovi osciliraju oko 0, ali ipak teže prema 0:

$(iii) \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, (-1)^n\frac{1}{n}, \cdots \ \to \ 0.$

Odgovarajući nizovi funkcijskih vrijednosti različito se ponašaju:

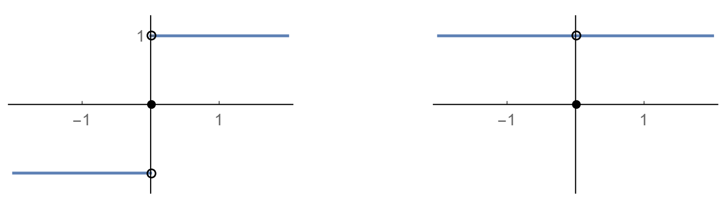
$(i) \qquad -1, -1, -1, \cdots, -1, \cdots \ \to \ -1,$

$(ii) \qquad 1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots \ \to \ 1,$

$(iii) \qquad -1, 1, -1, 1, \cdots$ divergira.

Prema tome funkcija sgn nema limes u točki 0 (vidi *Sliku 5.2a*).

(a) $x \mapsto \operatorname{sgn}\, x$ (b) $x \mapsto \operatorname{sgn}^2\, x$



Slika 5.2: *Limes funkcija* $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ *i* $x \mapsto \operatorname{sgn}^2 x$

Primjer 5.5. *Ispitajmo limes funkcije* $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$ *u točki* $x_0 = 0$.

Neka je (x_n) bilo koji niz takav da $x_n \neq 0$ i $x_n \to 0$. Tada $f(x_n) = \operatorname{sgn}^2(x_n) = 1 \to 1$. Dakle, limes funkcije f u točki $x_0 = 0$ jednak je 1. Primijetite da je istovremeno $f(0) = 0$ (vidi *Sliku 5.2b*).

Primjer 5.6. *Odredimo:* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

Neka je $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$. Domena funkcije f je skup $D = [1, \infty) \setminus \{2\}$. Neka je (a_n) bilo koji niz za koji je $a_n \in D$, $a_n \neq 2$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Treba odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{a_n-1}-1}{a_n-2}$. Budući da se javio tzv. *neodređeni oblik* $\left(\frac{0}{0}\right)$, funkciju f malo ćemo preurediti. Za svaki $x \neq 2$ vrijedi:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\left(\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{a_n-1}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{1}{2}$, imamo $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}$. Dakle,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Primjedba 5.2. *Kao i limes niza realnih brojeva, tako je i limes funkcije (ako postoji) jedinstven.*

Primjedba 5.3. *Ekvivalentna definicija* Definiciji 31 *je* Cauchyjeva definicija limesa funkcije*:*

> Realan broj L je limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da
>
> $$(x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta) \;\Rightarrow\; (|f(x) - L| < \epsilon).$$

Više o ovakvom pristupu pojmu limesa funkcije može se vidjeti primjerice u [7].

Definicija 32. *Neka je*

(i) $x_0 \in [a, b]$ *i*

(ii) $f : D \to \mathbb{R}$*, gdje je* $D = [a, b]$ *ili* $D = [a, b] \setminus \{x_0\}$*.*

Tada kažemo da je granična vrijednost *(ili limes) funkcije f u točki x_0* slijeva *jednaka L^- i pišemo*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = L^-,$$

ako za svaki *niz (x_n) iz D $(x_n \neq x_0)$ koji slijeva konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ konvergira prema L^-.*

Aanalogno se definira i granična vrijednost funkcije zdesna i označava s $L^+ = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$. Takve limese zovemo jednostranim limesima.

Primjer 5.7. *Za funkciju* sgn *iz* Primjera 5.4 *lako se vidi da vrijedi*

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Zadatak 5.1. *Odredite vrijednost sljedećih limesa:*

$$a)\ \lim_{x\to 0+} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad b)\ \lim_{x\to 1+} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 1 \\ 2x-3, & x < 1 \end{cases}$$

$$c)\ \lim_{x\to 2-} \frac{x^2-5x}{x^2-4}, \quad d)\ \lim_{x\to -3+} \frac{-2x+6}{x+3}, \quad e)\ \lim_{x\to 2} \left|\frac{x^2+4}{x-2}\right|, \quad f)\ \lim_{s\to 0+} \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}\right).$$

Primjedba 5.4. *Analogno* Definiciji 32 *možemo definirati i*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \quad i \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Zbog jednostavnosti, zapis $x \to \infty$ označavat će nam da $x \to -\infty$ ili $x \to +\infty$.

Primjer 5.8. *Pokažimo da je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.*

Neka je (x_n) bilo koji niz realnih brojeva takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, primjerice:

$$x_n: \quad 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots \ \to \ \infty.$$

Označimo: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Niz funkcijskih vrijednosti $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ teži prema nuli:

$$\frac{1}{x_n}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \ \to \ 0.$$

Na osnovi prethodno navedenih definicija i odgovarajućih pravila za limes nizova realnih brojeva, vrijede sljedeća pravila za računanje s limesima:

Teorem 5.1. *Neka*

(i) $x_0 \in [a,b]$,

(ii) $f, g : D \to \mathbb{R}$, *gdje je* $D = [a,b]$ *ili* $D = [a,b] \setminus \{x_0\}$,

(iii) postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Tada:

(i) *postoji* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

tj. limes zbroja [ili razlike] dviju funkcija jednak je zbroju [ili razlici] njihovih limesa;

(ii) *postoji* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

tj. limes produkta dviju funkcija jednak je produktu njihovih limesa;

(iii) *ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *i ako je* $g(x)\neq 0$ *u nekoj okolini broja* x_0*, tada postoji* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$

tj. limes kvocijenta dviju funkcija jednak je kvocijentu njihovih limesa.

Primjer 5.9. *Odredimo sljedeće limese:*

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, *c)* $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{1-2x^2}$, *e)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x}{x^2-1}$, *f)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x-1}$.

a) Kako je $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, ne možemo direktno primijeniti pravilo (iii) iz *Teorema 5.1.* Zato ćemo funkciju pod znakom limesa malo preurediti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

b) Iz istog razloga kao i u prethodnom primjeru ne možemo direktno primijeniti pravilo *(iii)* iz *Teorema 5.1.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

c) Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$, ne možemo direktno primijeniti pravilo *(i)* iz *Teorema 5.1.* Zato ćemo funkciju pod znakom limesa preurediti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})\tfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\tfrac{(x-1)-(x+1)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{-2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=0.\end{aligned}$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{1-2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0}{1-0}=0$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{0-0}=\infty$.

Primjedba 5.5. *Funkcija oblika*

$$Q(x)=\frac{a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0}$$

naziva se racionalna funkcija. *Na osnovi nekoliko prethodnih primjera možemo naslutiti da vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=\begin{cases}\frac{a_m}{b_m}, & m=n\\ 0, & m<n\\ +\infty, & m>n \quad \& \quad \frac{a_m}{b_n}>0\\ -\infty, & m>n \quad \& \quad \frac{a_m}{b_n}<0\end{cases}$$

Zadatak 5.2. *Odredite vrijednosti sljedećih limesa:*
a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-5x^2}{x^3+3x}$, *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{14x^3-7x^2}{8x^3+4x}$, *c)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^{2/3}-7x}{x^{1/2}+x^{5/4}-4}$.

5.2 Asimptote funkcije

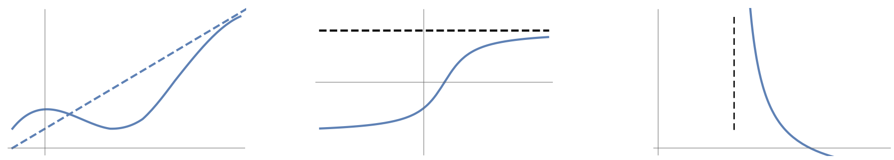
Definicija 33. *Kažemo da je pravac $y=kx+l$* desna kosa asimptota *funkcije $f:(c,\infty)\to\mathbb{R}$, ako vrijedi* (Slika 5.3a)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+l)]=0. \tag{5.1}$$

Analogno se definira i lijeva kosa asimptota. *Specijalno, ako je $k=0$, pravac $y=l$ nazivamo* horizontalna asimptota *(vidi* Sliku 5.3b*). Pravac $x=a$ je* vertikalna asimptota *funkcije f ako je* (Slika 5.3c)

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\infty \quad ili \quad \lim_{x\to a+}f(x)=\infty.$$

(a) *Kosa asimptota* (b) *Horizontalna asimptota* (c) *Vertikalna asimptota*



Slika 5.3: *Kosa, horizontalna i vertikalna asimptota*

Primjedba 5.6. *Iz (5.1) slijedi*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{l}{x}\right]=0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{l}{x}\right]=0,$$

odakle dobivamo koeficijent smjera desne kose asimptote.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{5.2}$$

Nakon toga, iz (5.1) možemo izračunati koeficijent l desne kose asimptote.

$$l=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \tag{5.3}$$

I obratno, ako postoje limesi (5.2) i (5.3), onda je pravac $y=kx+l$ desna kosa asimptota funkcije f. Analogno se dobivaju i formule za koeficijente k i l lijeve kose asimptote.

Primjer 5.10. *Odredimo asimptote funkcije $f(x)=\frac{3-2x^2}{x-1}$, $x\neq 1$. Prema (5.2) i (5.3) imamo:*

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x^2}{x(x-1)}=-2, \qquad l=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3-2x^2}{x-1}+2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x-1}=-2.$$

Dakle, obostrana (i lijeva i desna) kosa asimptota ove funkcije je $y=-2x-2$. Prema *Definiciji 33* ova funkcija ima i vertikalnu asimptotu $x=1$ jer je $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=+\infty$.

5.3 Neprekidnost funkcije

Definicija 34. *Kažemo da je funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$* neprekidna u točki *$x_0 \in (a,b)$ ako ona ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$, tj. ako je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.4}$$

Funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je neprekidna na intervalu (a,b) ako je ona neprekidna u svakoj točki intervala.

Primjedba 5.7. *Ako je funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in (a,b)$, onda za proizvoljan niz (x_n) u (a,b) koji konvergira prema x_0, odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti konvergira prema $f(x_0)$. Zato je*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0). \tag{5.5}$$

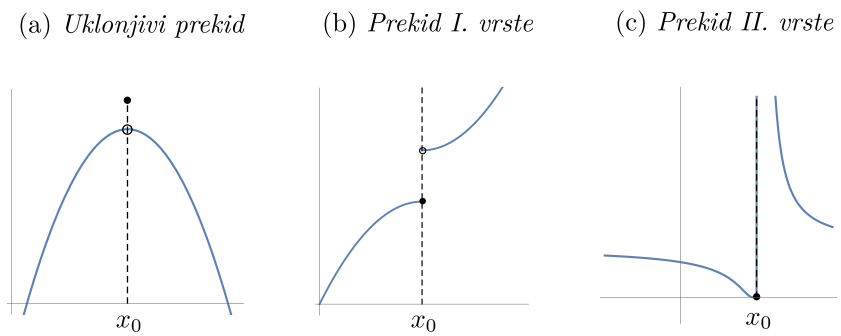
Primjer 5.11. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, iz* Primjera 5.3 *neprekidna je za svaki $x \in \mathbb{R}$, a funkcija* sgn *iz* Primjera 5.4 *nije neprekidna u* 0*.*

Primjedba 5.8. *Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u $x_0 \in (a,b)$ i neka je (x_n) proizvoljan niz iz (a,b) takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tada je prema Definiciji 34*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n \to \infty} x_n), \tag{5.6}$$

tj. ako je f neprekidna funkcija, limes i funkcija „komutiraju". Ovo svojstvo neprekidnih funkcija kasnije će imati značajne primjene.

Ako funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ nije neprekidna u točki $x_0 \in (a,b)$, kažemo da je x_0 točka prekida funkcije f. Specijalno, ako funkcija f u točki prekida ima limes slijeva i zdesna i oni su jednaki, onda kažemo da se radi o uklonjivom prekidu *(Slika 5.4a)*. Ako ima limes slijeva i zdesna, ali oni nisu jednaki, kažemo da se radi o prekidu prve vrste *(Slika 5.4b)*, a ako nema limes slijeva ili zdesna, kažemo da se radi o prekidu druge vrste (jedan primjer takvog prekida prikazan je na *Slici 5.4c*).



Slika 5.4: *Vrste prekida*

Na osnovi *Teorema 5.1*, neposredno slijedi:

Teorem 5.2. *Neka su $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije u točki $x_0 \in (a, b)$. Tada su i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$ neprekidne u x_0. Ako je $g(x_0) \neq 0$, onda je također i funkcija f/g neprekidna u x_0.*

Primjer 5.12. *Funkcija $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, je neprekidna na čitavom skupu $\mathbb{R}$. Za $x < 0$ ona se podudara s funkcijom $x \mapsto -x$, a za $x > 0$ s funkcijom $x \mapsto x$, pa je neprekidna za sve $x \neq 0$. Što je u točki $x_0 = 0$?*

Kako je $\lim\limits_{x\to 0-} |x| = \lim\limits_{x\to 0+} |x| = |0| = 0$, prema (5.5) ona je neprekidna i u točki $x_0 = 0$.

Zadatak 5.3. *Je li funkcija f definirana s*

$$f(x) = \begin{cases} 12x + 1, & x < -1 \\ 8 - 3x, & -1 \leq x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

neprekidna u točkama: -1 i 2?

Navest ćemo bez dokaza još nekoliko važnih svojstava neprekidnih funkcija.

Teorem 5.3. *Kompozicija dviju neprekidnih funkcija također je neprekidna funkcija.*

Odavde i na osnovi (5.6) slijedi jedno važno pravilo za računanje s limesima: ako su f i g neprekidne funkcije i ako je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ konačan, tada vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(g(x_0)). \tag{5.7}$$

Formula (5.7) pod navedenim uvjetima vrijedi i u slučaju ako x_0 zamijenimo s ∞.

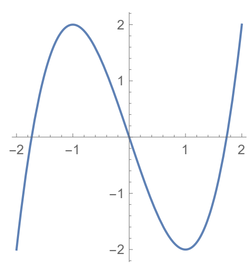
Teorem 5.4. *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, ona je na tom intervalu ograničena i postiže svoj infimum i supremum.*

Primjedba 5.9. *Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i da u točkama $x_1, \cdots, x_n$ ima lokalne minimume. Tada je globalni minimum ove funkcije na segmentu $[a, b]$ zadan s:*

$$\min\{f(a), f(b), f(x_1), \cdots, f(x_n)\}.$$

Analogno vrijedi i za globalni maksimum neprekidne funkcije f na segmentu $[a, b]$.

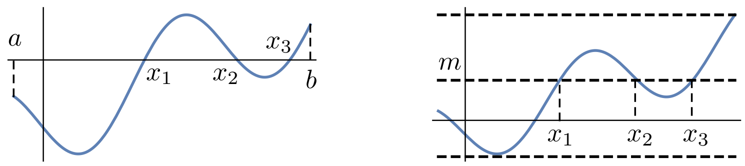
Primjer 5.13. *Funkcija $f : [-2, 2.5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ je neprekidna funkcija (polinom). U točki $x_1 = -1$ ima lokalni maksimum $f(-1) = 2$, a u točki $x_2 = 1$ lokalni minimum $f(1) = -2$. Kako je osim toga $f(-2) = -2$ i $f(2.5) = 8.125$, globalni maksimum ove funkcije na segmentu $[-2, 2.5]$ je 8.125 i postiže se na rubu u točki 2.5, a globalni minimum je (-2) i postiže se u dvije točke -2, 1.*



Slika 5.5: *Graf funkcije $f : [-2, 2.5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$*

Korolar 5.1. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja u rubovima segmenta $[a, b]$ prima vrijednosti suprotnih predznaka ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Tada postoji barem jedna nultočka funkcije f na tom segmentu (vidi* Sliku 5.6a*).*

(a) (b)



Slika 5.6: *Svojstva neprekidnih funkcija*

Zadatak 5.4. *Imaju li niže navedene funkcije barem jednu realnu nultočku na zadanom intervalu I?*

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 6, \quad I = [-1, 5],$
b) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x + 4, \quad I = [-2, 0],$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad I = [-4, 4].$

Zadatak 5.5. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija za svaki $x \in [a, b]$. Koja od navedenih tvrdnji je istinita, a koja lažna?*

a) Ako je $f(a) = f(b)$, onda jednadžba $f(x) = 0$ nema rješenja u $[a, b]$.

b) Ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda jednadžba $f(x) = 0$ ima točno jedno rješenje u $[a, b]$.

c) Ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda jednadžba $f(x) = 0$ ima barem jedno rješenje u $[a, b]$.

d) Ako je $f(a) \cdot f(b) > 0$, onda jednadžba $f(x) = 0$ nema rješenja u $[a, b]$.

Korolar 5.2. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i neka je $f(a) \leq m \leq f(b)$. Tada postoji barem jedna točka $x_0 \in [a, b]$, takva da je $m = f(x_0)$ (vidi* Sliku 5.6b*).*

Zadatak 5.6. *Temperatura zraka izražena u ^oC u nekom gradu od ponoći ($t = 0$) mijenjala se kao funkcija $c(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 4t + 10$, gdje je t vrijeme u satima.*

a) Kolika je bila temperatura u 14^h?

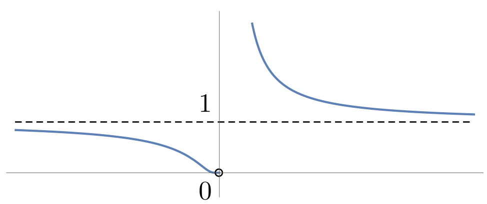
b) Za koliko ^oC je temperatura porasla ili opala između 18^h i 21^h?

c) Kada će temperatura biti 21^oC*?*

Primjer 5.14. *Odredimo limes funkcije* $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$ *kada* $x \to 0-$, $x \to 0+$, $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} \stackrel{(Primjedba\ 5.8)}{=} 2^{\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} \stackrel{(Primjedba\ 5.8)}{=} 2^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x}} = 2^0 = 1.$$

Na *Slici 5.7* prikazan je graf ove funkcije.



Slika 5.7: *Graf funkcije* $x \mapsto 2^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$

Zadatak 5.7. *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x-5}{x-5}, & x > 5 \\ 2x-4, & x \leq 5. \end{cases}$$

a) Odredite $\lim\limits_{x\to 5-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5+} f(x)$.
b) Je li f *neprekidna u točki* $x_0 = 5$*? Zašto?*
c) Je li f *neprekidna funkcija? Zašto?*

Zadatak 5.8. *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{x+1}, & x \neq -1 \\ 1, & x = -1 \end{cases}$$

Je li f *neprekidna u točki* $x_0 = -1$*? Zašto?*

Često puta koristit ćemo neke važne limese (vidi *Dodatak 8.3)*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad = \quad 1 \tag{5.8}$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad = \quad e. \tag{5.9}$$

Primjer 5.15. *Koristeći (5.9) treba pokazati da je*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (*)$$

Uvođenjem supstitucije $x=\frac{1}{y}$, limes $(*)$ prelazi u

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{y})}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to\infty}y\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$
$$\stackrel{(Primjedba\ 5.8)}{=}\ln\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\stackrel{(L.9)}{=}\ln e=1.$$

Pri tome smo koristili pravilo (5.7) i formulu (5.9).

Zadatak 5.9. *Koristeći (5.8) i (5.9) treba odrediti vrijednost sljedećih limesa:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$, *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$,
d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, *e)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$, *f)* $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$,
g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, *h)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$, *i)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$,
j) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$, *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$, *l)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-1}{x-1}$.

Primjer 5.16. *Koristeći* Primjer 5.15 *treba pokazati da vrijedi*

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=\ln a,\quad a>0,\ a\neq 1. \tag{5.10}$$

Ako uvedemo supstituciju $(1+x)=a^u$, onda limes $(*)$ iz *Primjera 5.15* prelazi u

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln a^u}{a^u-1}=\lim_{u\to 0}\frac{u\ln a}{a^u-1}=\ln a\lim_{u\to 0}\frac{u}{a^u-1}.$$

Dakle,

$$\ln a\lim_{u\to 0}\frac{u}{a^u-1}=1\Longrightarrow\lim_{u\to 0}\frac{u}{a^u-1}=\frac{1}{\ln a}.$$

Uzimajući recipročne vrijednosti lijeve i desne strane, dobivamo (5.10).

Poglavlje 6

Derivacija

6.1 Pojam derivacije funkcije

Pojam derivacije funkcije u točki x_0 uvest ćemo preko problema linearne aproksimacije – aproksimacije linearnom funkcijom. Tu je osim toga sadržana i ideja na kojoj se zasniva veliki dio primijenjene i numeričke matematike. Realizacija te ideje kroz primjenu današnjih računala omogućuje rješavanje složenih problema iz raznih područja primjena.

Problem aproksimacije funkcije u okolini točke x_0 nekom jednostavnijom funkcijom prirodno se javlja u više situacija kada:

- je izračunavanje vrijednosti funkcije komplicirano;
- nul-točke funkcije nije moguće egzaktno odrediti;
- traženje lokalnih ili globalnog ekstrema nije jednostavno.

Prije nego što pokušamo riješiti problem aproksimacije, potrebno je odgovoriti na barem dva pitanja:

- koje su to „jednostavne funkcije" s kojima ćemo aproksimirati zadanu funkciju?
- što uopće znači „aproksimirati" funkciju u okolini točke x_0?

U ovom poglavlju pod „jednostavne funkcije" podrazumijevat ćemo polinome, pri čemu ćemo se ograničiti na polinome prvog stupnja - linearne funkcije. Za njih dobro znamo računati funkcijske vrijednosti, nul-točke, kao i opće ponašanje ovakvih funkcija.

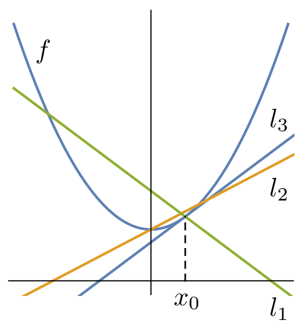
Primjedba 6.1. *Kod tzv. Fourierovih*[1] *aproksimacija kao „jednostavne funkcije" koriste se trigonometrijske funkcije* $x \mapsto \sin kx$*,* $x \mapsto \cos kx$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Inače se kao „jednostavne funkcije" mogu koristiti i mnoge druge klase funkcija, kao što se to koristi u novim matematičkim područjima: spline-aproksimacije i wavelets.

Još treba razjasniti i pitanje:

što to znači da ćemo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *u okolini točke* x_0 *aproksimirati linearnom funkcijom* $l(x) = \alpha x + b$*,* $x \in \mathbb{R}$*?*

Sasvim općenito, ali još uvijek nedovoljno precizno, to znači da se funkcijske vrijednosti $f(x)$ i $l(x)$ „što je moguće manje" razlikuju u okolini točke x_0. *Slika 6.1* ilustrira razne mogućnosti izbora linearne funkcije l. Koja je najbolja?



Slika 6.1

Prirodno je postaviti zahtjev da se u promatranoj točki x_0, funkcija f i aproksimacija l podudaraju:

$$f(x_0) = \alpha x_0 + b,$$

iz čega možemo odrediti slobodni koeficijent b, pa aproksimirajuća funkcija l glasi

$$l(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0),$$

[1] Jean Baptiste Fourier (1768-1830), francuski matematičar najviše je poznat po svojoj studiji o trigonometrijskim redovima, koji su nezamjenjivi u fizici, tehnici i drugim disciplinama.

gdje za α još uvijek imamo potpunu slobodu izbora. Izabrat ćemo ga tako da se f i l u okolini točke x_0 relativno što je moguće manje razlikuju, tj. tražit ćemo da, što smo bliže točki x_0, relativna odstupanja

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0}$$

budu to manja. Na taj način uzimamo u obzir brzinu rasta ili pada funkcije f u okolini točke x_0. Preciznije rečeno:

Definicija 35. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f* diferencijabilna *u točki $x_0 \in (a, b)$ ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$, takav da je*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{6.1}$$

Pri tome, funkciju $(x - x_0) \mapsto \alpha(x - x_0)$ zovemo diferencijal funkcije *f u točki x_0, a funkciju $l(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$ zovemo* linearni aproksimant od *f u okolini točke x_0.*

Sljedeći teorem daje nam nužan i dovoljan uvjet za diferencijabilnost funkcije u točki, govori nam da su odgovarajući diferencijal i linearni aproksimant jedinstveni (ukoliko postoje) i daje nam formulu (formula (6.2) pomoću koje ih možemo odrediti.

Teorem 6.1. *Realan broj α iz* Definicije 35 *postoji onda i samo onda ako postoji limes $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Pri tome takav α je jedinstven i vrijedi:*

$$\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{6.2}$$

Dokaz. Limes (6.1) možemo zapisati u obliku

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha \right) = 0,$$

odakle vidimo da broj $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi (6.1) postoji onda i samo onda ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ i ako je pri tome $\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Jedinstvenost broja α slijedi iz jedinstvenosti limesa funkcije. $\square$

Definicija 36. *Ako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $x_0 \in (a, b)$, onda jednoznačno određeni realan broj α za koji vrijedi (6.1) zovemo* derivacija *funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$ (čitaj: f crtica od x_0). Dakle,*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{6.3}$$

Zato se za funkciju f diferencijabilnu u točki x_0 kaže još da je derivabilna *u točki x_0.*

Primjedba 6.2. *Prema* Teoremu 6.1*, funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je derivabilna (tj. diferencijabilna) u točki $x_0 \in (a, b)$ onda i samo onda ako postoji limes (6.3). Pri tome je linearni aproksimant funkcije f u okolini točke x_0 zadan formulom*

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.4}$$

Primjer 6.1. *Konstantna funkcija $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, derivabilna je u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ i njena derivacija jednaka je nuli.*

Naime, lako se vidi da za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Primjer 6.2. *Ispitajmo derivabilnost funkcije $f(x) = x^2$ u proizvoljnoj fiksnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Kako je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

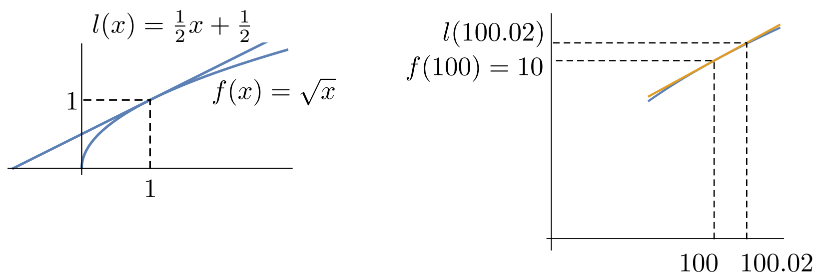
funkcija $f(x) = x^2$ je derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ i vrijedi $f'(x_0) = 2x_0$.

Zadatak 6.1. *Pokažite da je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ derivabilna za svaki $x_0 \neq 0$ i da je $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.*

Zadatak 6.2. *Pokažite da je za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ funkcija*
a) $f(x) = x^n$ derivabilna za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ i da je $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$,
b) $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$ derivabilna za svaki $x_0 \neq 0$ i da vrijedi $f'(x_0) = \frac{-n}{x_0^{n+1}}$.

Primjer 6.3. *Odredimo linearni aproksimant funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$, u okolini točke $x_0 = 1$.*

(a) *Okolina točke* $x_0 = 1$ (b) *Okolina točke* 100



Slika 6.2: *Linearna aproksimacija funkcije* $f(x) = \sqrt{x}$

Za $x \neq 1$ vrijedi

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1},$$

pa je

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Prema (6.4) linearni aproksimant funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$ u okolini točke $x_0 = 1$ glasi (vidi *Sliku 6.2a*):

$$l(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Primjedba 6.3. *Ako uvedemo sljedeće supstitucije* $\Delta x := x - x_0$ *i* $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$*, onda formula (6.3) prelazi u ekvivalentnu formulu:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6.5}$$

Veličinu Δx *nazivamo prirast nezavisne varijable* x *u točki* x_0*, a* Δf *prirast funkcije* f *u točki* x_0*.*

Primjer 6.4. *Na osnovi* Primjedbe 6.3*, ispitajmo derivabilnost funkcije* $f(x) = \frac{1}{x}$*,* $x \neq 0$ *u točki* $x_0 = 2$*.*

Kako je prema (6.5):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4},$$

funkcija je derivabilna u $x_0 = 2$ i vrijedi $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Primjedba 6.4. *Primijetimo da je funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna (odnosno derivabilna) u točki $x_0 \in (a,b)$ onda i samo onda ako postoji jedinstveni $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je*

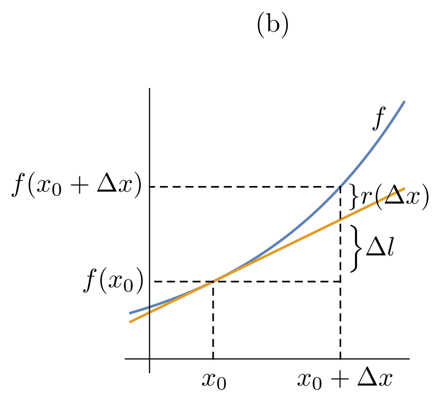
$$f(x) - f(x_0) = \alpha(x - x_0) + r(x - x_0) \quad \textit{pri čemu} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{r(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

gdje je r tzv. funkcija ostatka. *Pri tome je $\alpha = f'(x_0)$.*

Pojam derivacije funkcije uveli smo tako da smo funkciju $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ u okolini točke $x_0 \in (a,b)$ aproksimirali linearnim aproksimantom

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

čiji graf je tangenta u točki x_0 na Γ_f (vidi *Sliku 6.3a*).



Slika 6.3: *Diferencijal funkcije*

Prirast $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ funkcije f kad nezavisna varijabla promijeni od x_0 na $x_0 + \Delta x$ prema *Primjedbi 6.4* možemo pisati kao:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + r(\Delta x), \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{6.6}$$

Ako je Δx maleno, onda je

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \quad \text{tj.} \quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = l(x_0 + \Delta x), \tag{6.7}$$

odakle vidimo da u okolini točke x_0 prirast funkcije Δf možemo aproksimirati s vrijednošću diferencijala $x \mapsto f'(x_0)\,x$ u točki Δx, a funkciju f s linearnim aproksimantom.

Primjedba 6.5. *Što je Δx manji, to će i Δf biti manje, a aproksimacija (6.7) će biti bolja. Pri tome, kako je $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, ta aproksimacija u limesu prelazi u jednakost.*

To je opravdanje što se u tehnici i fizici jako maleni prirasti Δx i Δf označavaju redom s dx i df, a aproksimacija (6.7) piše u obliku jednakosti[2]

$$df = f'(x_0)dx. \tag{6.8}$$

Primjer 6.5. *Izračunajmo približnu vrijednost veličine $A = \sqrt{100.2}$.*

Postupajući slično kao u *Primjeru 6.3*, za linearnu aproksimaciju funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$ u okolini točke $x_0 = 100$ dobivamo:

$$l(x) = 5 - \frac{1}{20}x.$$

Prema (6.7) približnu vrijednost A^* broja $\sqrt{100.2}$ dobit ćemo tako (vidi *Sliku 6.2b*) da izračunamo

$$A^* = l(100.2) = 5 + \frac{100.2}{20} = 10.01.$$

Kako je $(10.01)^2 = 100.2001$, aproksimaciju $A^* = 10.01$ možemo smatrati dobrom jer je apsolutna i relativna (u %) pogreška malena:

$$\Delta A^* = |\sqrt{100.2} - 10.01| = 0.09, \qquad \delta A^* = \frac{\Delta A^*}{|A^*|} \cdot 100 \approx 1\%.$$

Zadatak 6.3. *Na sličan način kao u* Primjeru 6.3 *pronađite linearni aproksimant funkcije $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, u okolini točke $x_0 = 1$.*

Primjer 6.6. *Za $f(x) = \sqrt[m]{x}$ je $f'(x) = \frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x}}{x}$ (vidi str. 157) pa je prema (6.7) približna vrijednost funkcije f u točki $x_0 + \Delta x$*

$$\sqrt[m]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[m]{x_0} + \frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x_0}}{x_0}\Delta x,$$

odnosno za $x_0 = 1$,

$$\sqrt[m]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{m}.$$

[2] Na ovom mjestu treba skrenuti pažnju na još jednu nesuglasnost između stroge matematčke definicije diferencijala i onoga što se u tehnici i fizici podrazumijeva pod tim pojmom, gdje se vrijednost diferencijala $x \mapsto f'(x_0)x$ u točki dx jednostavno zove diferencijalom funkcije f u točki x_0 i označava s df.

Primjer 6.7. *Za funkciju* $x \mapsto \sin x$ *je* $f'(x) = \cos x$ *(vidi str. 157) odakle prema (6.7) za približnu vrijednost funkcije* $\sin$ *u točki* $x_0 + \Delta x$ *dobivamo*

$$\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \Delta x \cdot \cos x_0.$$

Tako primjerice, za $\alpha = 31^o = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$ *dobivamo*

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\cdot\cos\frac{\pi}{6} \approx 0.5 + 0.01745\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.5151.$$

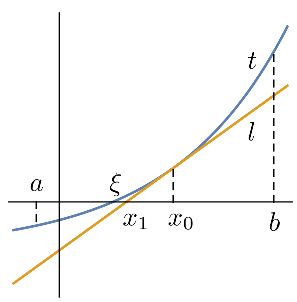
Točna vrijednost (na 5 decimala) je $\sin 31^o = 0.51504$*.*

Zadatak 6.4. *Analogno* Primjeru 6.7*, nađite formule za izračunavanje približnih vrijednosti funkcija* $\cos$, tg, ctg *u točki* $x_0 + \Delta x$*.*

Zadatak 6.5. *Primjenom formule (6.7) procijenite za koliko treba produžiti uže nategnuto oko ekvatora Zemlje da bi u svakoj točki ekvatora bilo* $0.5\,\mathrm{m}$ *iznad površine Zemlje?*

Primjer 6.8. *(Newtonova metoda tangenti). Tražimo nultočke derivabilne funkcije* $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$*. Pretpostavimo da je* $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ *i da je* $f(a)\cdot f(b) < 0$*.*

Prema *Korolaru 5.1*, postoji $\xi \in I$, tako da je $f(\xi) = 0$.



Slika 6.4: *Newtonova metoda tangenti*

Izaberimo početnu aproksimaciju $x_0 \in I$ i funkciju f u okolini x_0 aproksimiramo linearnim aproksimantom

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Sljedeću aproksimaciju x_1 nultočke ξ birat ćemo tako da odredimo nultočku linearnog aproksimanta:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ponavljajući postupak dobivamo niz $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, zadan rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

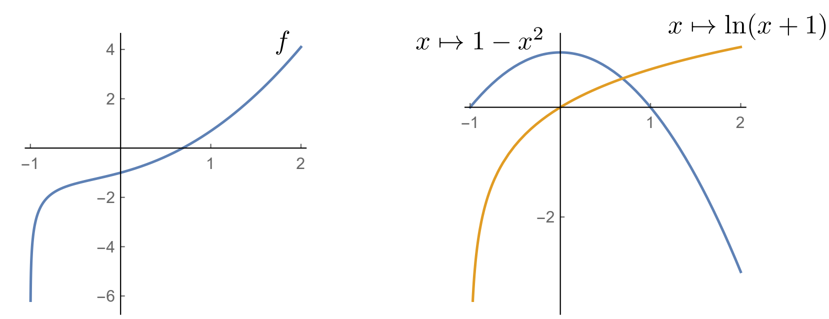
koji uz neke uvjete (vidi [29]) konvergira prema ξ.

Primjer 6.9. *Pronađimo realnu nultočku funkcije* $f(x) = x^2 - 1 + \ln(x+1)$*, čiji graf je prikazan na* Slici 6.5a.

Elementarnim putem ovaj problem nije moguće riješiti. Najprije moramo lokalizirati interval u kome se nalazi nul-točka. Tu si možemo pomoći tako da jednadžbu $f(x) = 0$ napišemo u obliku $1 - x^2 = \ln(x+1)$ i potražimo sjecište grafova funkcija $\varphi_1(x) = 1 - x^2$ i $\varphi_2(x) = \ln(x+1)$ (vidi *Sliku 6.5b*). Budući da se jedina nultočka funkcije f nalazi u segmentu $[0, 1]$ (vidi *Sliku 6.5*), za početnu aproksimaciju uzet ćemo $x_0 = 1$. U niže navedenoj tablici možemo pratiti iterativni proces. Više detalja o ovoj i drugim metodama za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$ može se vidjeti u [29].

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0.693147
1	0.722741	0.066271
2	0.690031	0.000887
3	0.68958	1.67×10^{-7}

(a) $f(x) = x^2 - 1 + \ln(x+1)$ (b) $x \mapsto 1 - x^2,\ x \mapsto \ln(x+1)$



Slika 6.5

Zadatak 6.6. *Pronađite realne nultočke sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = e^{-x} + x - 2$,
b) $f(x) = x^3 - 4x - 1$,
c) $f(x) = e^{-x}\sin(3x+2) + x - \frac{1}{2}, \quad x > 0$,
d) $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$.

Tangenta i normala. Prema (6.4) linearni aproksimant funkcije f u okolini točke x_0 je

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf Γ_l linearnog aproksimanta je pravac koji zovemo **tangenta** na graf Γ_f funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$. Koeficijent smjera tangente u točki s apscisom x_0 je derivacija $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0. Zato još možemo pisati i

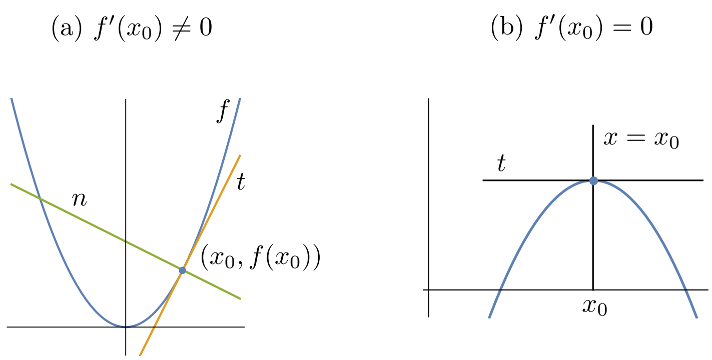
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0, \tag{6.9}$$

gdje je α_0 kut što ga tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ zatvara s pozitivnim smjerom osi x.

Normala na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ je pravac okomit na tangentu koji prolazi točkom $(x_0, f(x_0))$ (vidi *Sliku 6.6a*). Njegova jednadžba je dakle:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{6.10}$$

ako je $f'(x_0) \neq 0$. Ako je $f'(x_0) = 0$, onda jednadžba normale glasi $x = x_0$ (vidi *Sliku 6.6b).*



Slika 6.6: *Tangenta i normala*

Primjer 6.10. *Odredimo tangentu i normalu na graf funkcije $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ u proizvoljnoj točki s apscisom x_0.*

Prema *Primjeru 6.2* vrijedi $f'(x_0) = 2x_0$ za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$. Zato je tangenta na graf Γ_f funkcije f u proizvoljnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ zadana jednadžbom

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \quad \text{odnosno} \quad y = 2x_0 x - x_0^2.$$

Normala na graf funkcije $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ u proizvoljnoj točki $x_0 \neq 0$ zadana je s

$$y = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2}.$$

Ako je $x_0 = 0$, onda jednadžba normale glasi $x = 0$ (vidi *Sliku 6.6*).

Navedimo jedno važno svojstvo derivabilnih funkcija u točki:

Teorem 6.2. *Ako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in (a, b)$, onda je ona i neprekidna u toj točki.*

Dokaz. Prema *Definiciji 34 (str. 133)* funkcija f je neprekidna u točki x_0 ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Kako je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\left(\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0)\right) = \\ &= \lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

to je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Primjedba 6.6. *Obrat ovog teorema ne vrijedi. Primjerice, funkcija $f(x) = |x|$ je neprekidna u točki $x_0 = 0$, ali u toj točki nije derivabilna.*

Za proizvoljni niz (x_n) iz $(-\infty, 0)$ takav da $x_n \to 0$ imamo

$$\lim_{x_n\to 0-}\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{x_n\to 0-}\frac{|x_n| - |0|}{x_n - 0} = \lim_{x_n\to 0-}\frac{-x_n}{x_n} = -1.$$

S druge strane, za proizvoljni niz (x_n) iz $(0, +\infty)$ imamo

$$\lim_{x_n\to 0+}\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{x_n\to 0+}\frac{|x_n| - |0|}{x_n - 0} = \lim_{x_n\to 0+}\frac{x_n}{x_n} = 1.$$

Dakle, prema *Primjedbi 5.7, str. 133* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}$ ne postoji pa funkcija $f(x) = |x|$ nije derivabilna u $x_0 = 0$.

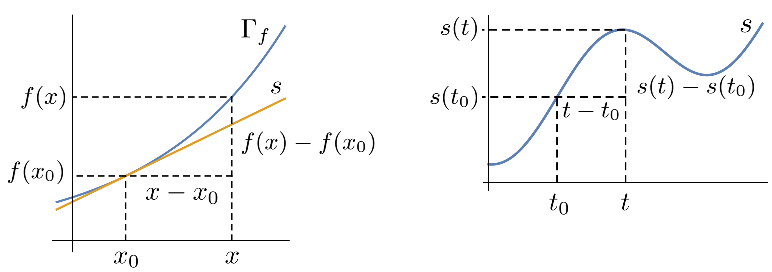
Graf funkcije $x \mapsto |x|$ (vidi *Sliku 2.12a, str. 7*) ima šiljak (špic) u $x_0 = 0$, pa se u toj točki ne može „postaviti" tangenta na graf ove funkcije. Kažemo da funkcija $x \mapsto |x|$ „nije glatka" u $x_0 = 0$.

Zadatak 6.7. *Je li funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 = 0$?*

Primjedba 6.7. *Utemeljitelji diferencijalnog računa su Leibniz*[3] *i Newton*[4].

- *Njemački matematičar G. W. Leibniz proučavao je problem određivanja tangente u točki* $T_0(x_0, f(x_0))$ *grafa* Γ_f *neke funkcije* f. *Za to je bilo potrebno odrediti koeficijent smjera tangente.*

(a) *Leibnizov problem tangente* (b) *Newtonov problem brzine*



Slika 6.7: *Leibnizov i Newtonov pristup pojmu derivacije funkcije*

Ako u blizini točke x_0 *izaberemo neku drugu točku* x, *onda je lako odrediti koeficijent smjera sekante* s *kroz točke* T_0 *i* $T(x, f(x))$ *(vidi* Sliku 6.7a*):*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Može se smatrati da koeficijent smjera sekante teži prema koeficijentu smjera tangente kada x *teži prema* x_0. *Pri tome treba istražiti egzistenciju granične vrijednosti* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, *odnosno derivabilnost funkcije* f *u točki* x_0.

---

[3] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) njemački matematičar, filozof i pisac. U vezi primata na autorsko pravo o diferencijalnom računu upao je u žestoke rasprave s Newtonom, koje su trajale sve do njegove smrti. Newton je otkrio diferencijalni račun 10 godina ranije od Leibniza, ali je Leibniz nezavisno od Newtona 1684. godine to prvi objavio. Stručna komisija Royal Society (London) na osnovi jednostrano izabranih pisama dodijelila je (1712) prioritetno autorsko pravo Newtonu. Inače, od 1703. godine predsjednik Royal Society bio je I. Newton...

[4] Sir Isaac Newton (1642-1727) engleski fizičar i matematičar, koji je svojim revolucionarnim otkrićima dominirao matematikom i fizikom 17. stoljeća. Spomenimo samo: formuliranje aksioma mehanike, otkriće jednadžbi gibanja i zakona gravitacije, teorija o kretanju planeta, binomni teorem, Newtonova metoda u numeričkoj analizi i mnoge važne rezultate o jednadžbama. Najznačajnije djelo mu je „Philosophiae Naturalis Principa Mathematica”.

- *Engleski matematičar I. Newton razmatra problem određivanja trenutne brzine nekog tijela koje se kreće po pravcu. Označimo s* $t \mapsto s(t)$, $t \geq 0$ *funkciju koja u svakom vremenskom trenutku pokazuje prijeđeni put. Ako je* s *linearna funkcija* $s(t) = vt + b$, *onda je gibanje jednoliko. U tom slučaju u svakom intervalu* $[t_1, t_2]$ *prijeđeni put proporcionalan je duljini intervala* $t_2 - t_1$, *tj.*

$$s(t_2) - s(t_1) = v(t_2 - t_1),$$

a brzina ima konstantnu vrijednost

$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Ako gibanje nije jednoliko (funkcija s *nije linearna), brzinu u trenutku* t_0 *odredit ćemo tako da pretpostavimo da je gibanje jednoliko u „okolini” trenutka* t_0, *tj. funkciju* s *u okolini točke* t_0 *aproksimirat ćemo linearnom funkcijom. Znamo da je to moguće samo onda ako postoji* v, *tako da bude*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0) - v(t - t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Približno linearno gibanje dano je tada s

$$t \mapsto s(t_0) + v(t - t_0),$$

pri čemu je brzina u trenutku t_0

$$v(t_0) = v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0).$$

Primjedba 6.8. *Derivaciju funkcije* f *u točki* x_0 *prema Leibnizu možemo još pisati kao:*

- $\frac{df}{dx}(x_0)$ *(čitaj:* de ef po de iks u točki x_0*);*
- $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ *(čitaj:* de ef po de iks za $x = x_0$*);*
- $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ *(čitaj:* de ipsilon po de iks za $x = x_0$*), ako je* $f(x) = y$.

Specijalno, iz povijesnih razloga, ako je nezavisna varijabla vrijeme, onda brzinu v (odnosno derivaciju puta s po vremenu t) u trenutku t_0 pišemo $v(t_0) = \frac{ds}{dt}(t_0) = \dot{s}(t_0)$.

Definicija 37. *Kažemo da je realna funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$* derivabilna *ili* diferencijabilna *na intervalu (a, b) ako je derivabilna u svakoj točki $x_0 \in (a, b)$.*
Funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$ definiranu s $x \mapsto f'(x)$ nazivamo derivacija od f.

Primjer 6.11. *Funkcija $f'(x) = nx^{n-1}$ je derivacija funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (vidi* Zadatak 6.2*). Obično skraćeno pišemo*

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.11}$$

Primjer 6.12. *Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.*

Kako za proizvoljni $x_0 \in \mathbb{R}$ prema (5.10), str. 138 vrijedi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \ln e = e^{x_0},$$

onda je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ i njena derivacija je ponovno ta ista funkcija. Obično skraćeno pišemo

$$(e^x)' = e^x. \tag{6.12}$$

Zadatak 6.8. *Pokažite da je*
a) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \neq 0,$ *b)* $(\frac{1}{\sqrt{x}})' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}, \quad x \neq 0.$

6.2 Deriviranje realnih funkcija

6.2.1 Pravila za deriviranje funkcija

Teorem 6.3. *Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x \in I$. Tada vrijedi*

(i) $f + g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \tag{6.13}$$

(ii) $f - g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x), \tag{6.14}$$

(iii) $f \cdot g$ *je derivabilna u* x *i vrijedi*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{6.15}$$

(iv) ako je $g(x) \neq 0$, *onda je* f/g *derivabilna u* x *i vrijedi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{6.16}$$

Dokaz ovog teorema može se vidjeti u *Dodatku 8.4.1*.

Ako su funkcije f i g derivabilne u svakoj točki intervala I, onda su i funkcije $f+g$, $f-g$ i $f \cdot g$ također derivabilne funkcije na I i njihove derivacije su redom $f'+g'$, $f'-g'$, $f'g+fg'$. Ako je $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, onda je i f/g derivabilna na I i njena derivacija je $\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Primjer 6.13. *Funkcije* $f(x) = x^2$ *i* $g(x) = e^x$ *su derivabilne na čitavom skupu* $\mathbb{R}$ *i njihove derivacije su* $f'(x) = 2x$, $g'(x) = e^x$. *Kako je osim toga* $e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *vrijedi*

$$\begin{aligned} &(x^2 + e^x)' = 2x + e^x, && (x^2 - e^x)' = 2x - e^x, \\ &(x^2 \cdot e^x)' = 2xe^x + x^2e^x, && \left(\tfrac{x^2}{e^x}\right)' = \tfrac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}}. \end{aligned}$$

Primjedba 6.9. *Ako u (iii) specijalno stavimo* $g(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$, *onda koristeći da je* $(c)' = 0$ *(vidi* Primjer 6.1*), dobivamo* pravilo za derivaciju produkta konstante i funkcije

$$(v) \qquad (cf)'(x) = cf'(x). \tag{6.17}$$

Primijetimo također, da na osnovi Teorema 6.3 *slijedi da su svi polinomi i racionalne funkcije derivabilne.*

Zadatak 6.9. *Na osnovi* Teorema 6.3 *pokažite da je:*

a) $(2x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 7x - 1)' = 10x^4 - 2x^2 + 7$,

b) $\left(\frac{1}{x(x^2+1)}\right)' = \frac{-3x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}, \quad x \neq 0$,

c) $(e^x\sqrt{x})' = e^x\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}, \quad x \neq 0$.

6.2.2 Derivacija složene i inverzne funkcije

Teorem 6.4. *Neka su f i g realne funkcije, takve da je kompozicija $f \circ g$ definirana. Neka je također g derivabilna u x_0, a f u točki $g(x_0)$. Tada vrijedi*

$$\textit{(vi)} \quad (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \tag{6.18}$$

Dokaz ovog teorema može se vidjeti u *Dodatku 8.4.1*.

Primjer 6.14. *Funkcija $x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ je kompozicija sljedećih funkcija:*

$$f(y) = \sqrt{y}, \quad y \geq 0,$$

$$g(x) = 1 - x^2, \quad |x| \leq 1.$$

Ako je $|x| < 1$, onda je $g(x) > 0$, pa je f derivabilna u $g(x)$. Funkcija g je polinom, pa je derivabilna za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zato je kompozicija $f \circ g$ derivabilna za $|x| < 1$ i vrijedi

$$\varphi'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Za $x_0 = 1$ ili $x_0 = -1$ je $g(x_0) = 0$, a kako funkcija f nije derivabilna u 0, pravilo (vi) ne može se primijeniti.

Primjer 6.15. *Nađimo derivaciju funkcije $\varphi(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} = f(g(h(x)))$, gdje je $h(x) = x^2 + 1$, $g(y) = \sqrt{y}$, $f(u) = e^u$. Funkcija h je derivabilna za svaki $x \in \mathbb{R}$ i osim toga je $h(x) > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zato je g derivabilna za sve $h(x)$. f je također derivabilna za sve $g(y)$. Zato je kompozicija $f \circ g \circ h$ derivabilna za svaki $x \in \mathbb{R}$ i vrijedi*

$$\varphi'(x) = (f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) =$$

$$= e^{(g \circ h)(x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{h(x)}} \cdot 2x = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Zadatak 6.10. *Pokažite da vrijedi*

a) $\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100}\right)' = 100 \left(x + \frac{1}{x}\right)^{99} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$, $x \neq 0$,

b) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, *c)* $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

Primjedba 6.10. *Pravilo (vi) za derivaciju složene funkcije prema Leibnizovom načinu pisanja bilo bi*

$$\left.\frac{d(f\circ g)(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x_0)} \cdot \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Označimo li $y := g(x)$ *i* $z := f(y)$ *dobivamo*

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=g(x_0)} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

ili još kraće:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{6.19}$$

Teorem 6.5. *Neka je* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *neprekidna i strogo monotona funkcija. Neka je nadalje* f *derivabilna u* $x_0 \in (a,b)$, *tako da je* $f'(x_0) \neq 0$.

Tada postoji $f^{-1} : f((a,b)) \to \mathbb{R}$, *derivabilna je u* $y_0 := f(x_0)$ *i vrijedi*

$$\textit{(vii)} \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{6.20}$$

Primjedba 6.11. *Kako iz* $y_0 = f(x_0)$ *slijedi* $f^{-1}(y_0) = x_0$, *formulu (vii) možemo pisati i kao*

$$\textit{(vii')} \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \tag{6.21}$$

ili u Leibnizovoj notaciji

$$\textit{(vii'')} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}. \tag{6.22}$$

Dokaz *Teorema 6.5* nećemo izvoditi. Zainteresirani čitatelj dokaz može pogledati u [7], str. 177.

Primjer 6.16. *Logaritamska funkcija* $y \mapsto \ln y$, $y > 0$ *je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije* $\exp : x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$, *koja je neprekidna, strogo monotono rastuća i derivabilna u svakoj točki* $x \in \mathbb{R}$. *Zato prema (vii):*

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

Dakle, $y \mapsto \ln y$ *je derivabilna funkcija za svaki* $y > 0$ *i vrijedi*

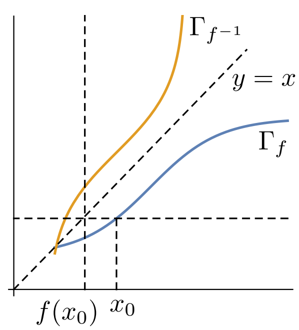
$$(\ln y)' = \frac{1}{y}. \tag{6.23}$$

Zadatak 6.11. *Pokažite da vrijedi:*

a) $(\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $\left(\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

Primjedba 6.12. *Prema* Teoremu 6.5*, da bi funkcija* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *u točki* y_0 *bila derivabilna, između ostalog u točki* $x_0 = f^{-1}(y_0)$ *mora biti* $f'(x_0) \neq 0$*, tj. tangenta na graf* Γ_f *u točki* $(x_0, f(x_0))$ *ne smije biti paralelna s osi* x*. Geometrijski je to odmah jasno jer osnom simetrijom obzirom na pravac* $y = x$ *horizontalna tangenta na* Γ_f *prelazi u vertikalnu tangentu na* $\Gamma_{f^{-1}}$ *(vidi* Sliku 6.8*) pa derivacija funkcije* f^{-1} *u točki* $f(x_0)$ *nije definirana.*



Slika 6.8: *Derivacija funkcije* f^{-1} *nije definirana u točki* $f(x_0)$ *jer je tangenta na graf* Γ_f *u točki* $(x_0, f(x_0))$ *paralelna s osi* x

Tako je, primjerice, inverzna funkcija od $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ *funkcija* $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, $y \in \mathbb{R}$*. Funkcija* f *je derivabilna za sve* $x \in \mathbb{R}$*, ali budući da je* $f'(0) = 0$*, funkcija* f^{-1} *nije derivabilna za* $y_0 = 0$ *iako je svuda neprekidna.*

6.2.3 Derivacije elementarnih funkcija

Vrijede sljedeće formule za derivacije osnovnih elementarnih funkcija:

$$\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} && (6.24)\\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x}\log_a e, \quad x > 0 && (6.25)\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 && (6.26)\\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R} && (6.27)\\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} && (6.28)\\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} && (6.29)\\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R} && (6.30)\\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} && (6.31)\\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} && (6.32)\\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 && (6.33)\\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 && (6.34)\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} && (6.35)\\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} && (6.36)\\
(\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R} && (6.37)\\
(\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R} && (6.38)\\
(\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \neq 0 && (6.39)\\
(\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0 && (6.40)\\
(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} && (6.41)\\
(\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1 && (6.42)\\
(\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1 && (6.43)\\
(\operatorname{arcth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1 && (6.44)
\end{aligned}$$

Dokaze ovih formula možete vidjeti u *Dodatku 8.4.2.*

Primjer 6.17. *U* Primjedbi 2.20, str. 81 *pokazali smo da funkciju* arsh *možemo zapisati u obliku*

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Direktnim deriviranjem

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

također dobivamo formulu (6.41).

Zadatak 6.12. *Direktnim deriviranjem funkcija (2.30) – (2.32) na strani 81 izvedite formule (6.42) – (6.44).*

Zadatak 6.13. *Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:*

a) $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, *b)* $y = x \arccos \sqrt{1-3x}$,

c) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, *d)* $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$,

e) $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}$, *f)* $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

6.2.4 Derivacije višeg reda

Ako je prva derivacija f' derivabilna na $I \subseteq \mathbb{R}$, onda njenu derivaciju nazivamo drugom derivacijom funkcije f i označavamo s f'' ili $f^{(2)}$. Dakle, $f'' = (f')'$. Derivacije višeg reda definiraju se induktivno:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.45}$$

gdje je $f^{(n)}$ oznaka za n-tu derivaciju funkcije f, a po dogovoru je $f^{(0)} = f$.

Prema Leibnizovoj notaciji, n-tu derivaciju $f^{(n)}$ $(n \geq 1)$ funkcije f označavamo s $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Primjer 6.18. *Navedimo nekoliko primjera izračunavanja n-te, $n \in \mathbb{N}$, derivacije funkcije.*

- *Ako je* $f(x) = e^x$, *onda je* $f'(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$.
- *Ako je* $f(x) = \sin x$, *onda je* $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)} = \sin x$ *i općenito*
  $$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1}\cos x, \qquad f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad n \in \mathbb{N}.$$
  Provjerite da također vrijedi: $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}$.
- *Ako je* $f(x) = \ln x$, $x > 0$, *onda je* $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ *i općenito*
  $$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 6.14. *Odredite* n*-tu,* $n \in \mathbb{N}$ *derivaciju funkcija*
a) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, *b)* $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$,
c) $f(x) = x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$, *d)* $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

Primjer 6.19. *Pokažimo da funkcija* $y(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$ *zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:*

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Kako je $y' = A\omega\cos(\omega x + \varphi)$ i $y'' = -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi)$, to je

$$y'' + \omega^2\, y \;=\; -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) + \omega^2 A \sin(\omega x + \varphi) = 0.$$

Zadatak 6.15. *Pokažite da*

a) funkcija $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ *zadovoljava jednadžbu* $y'' - 3y' + 2y = 0$,

b) funkcija $y(x) = \sin(2\arcsin x)$ *zadovoljava jednadžbu* $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$,

c) funkcija $y(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ *zadovoljava jednadžbu* $(1+x^2)y'' + xy' - 4y = 0$.

Primjedba 6.13. *Ako funkcije* $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *imaju derivaciju svakog reda na* I, *onda vrijedi (*Leibnizova formula*):*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{6.46}$$

Dokaz ove formule provodi se matematičkom indukcijom i može se vidjeti u [7], str. 184.

Zadatak 6.16. *Pokažite da vrijedi*

$$(x^2 \sin x)^{(100)} = x^2 \sin x - 200x\cos x - 9900 \sin x.$$

6.2.5 Deriviranje implicitno zadane funkcije

Pojam implicitno zadane funkcije uveli smo u *Poglavlju 2.4.3, str. 85*. Mogu se postaviti sljedeća pitanja:

- Uz koje je uvjete u nekoj okolini točke x_0 jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadana funkcija $y = f(x)$?
- Koji su dodatni uvjeti potrebni da bi ta implicitno zadana funkcija $y = f(x)$ bila derivabilna na toj okolini točke x_0?

Odgovor na ovo pitanje daje *Teorem o implicitnoj funkciji* (vidi [21]). Zbog njegove složenosti nećemo ga navoditi. U sljedećih nekoliko primjera ilustrirat ćemo samo kako odrediti derivaciju implicitno zadane funkcije.

Primjer 6.20. *Odredimo derivaciju implicitno zadane funkcije*

$$y^3 - 3xy + x^3 = 0. \qquad (*)$$

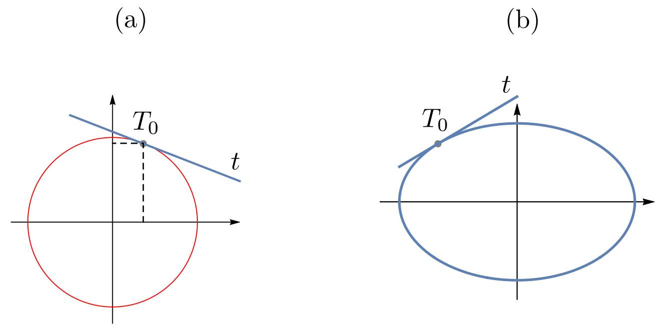
Na y treba gledati kao na funkciju od x i primijeniti pravilo za deriviranje složene funkcije *(vi)*. Pri tome, derivacija lijeve strane jednakosti $(*)$ treba biti jednaka derivaciji desne strane. Dakle,

$$(y^3)' - 3(xy)' + (x^3)' = (0)'$$

$$3y^2 \cdot y' - 3y - 3x \cdot 1 \cdot y' + 3x^2 = 0,$$

odakle dobivamo $y' = \frac{y-x^2}{y^2-x^2}$.

Primjer 6.21. *Odredimo tangentu na kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ u točki $T_0(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.*



Slika 6.9: *Tangenta na kružnicu i elipsu*

Derivacija implicitno zadane funkcije $x^2 + y^2 = 1$ je

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y},$$

pa je $y'(\frac{1}{2}) = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Jednadžba tangente je

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \text{odnosno} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Zadatak 6.17. *Pokažite da je tangenta na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ općenito zadana jednadžbom $xx_0 + yy_0 = r^2$, a tangenta na kružnicu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ zadana jednadžbom $(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2$.*

Zadatak 6.18. *Odredite jednadžbu tangente na elipsu $4x^2 + 9y^2 = 36$ u točki $T_0(-2, \frac{2\sqrt{5}}{3})$.*

Primjer 6.22. *Pokažimo da implicitno zadana funkcija $x^2 + y^2 = 1$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}.$$

Direktnim uvrštavanjem prve i druge derivacije

prva derivacija:	$x + y \cdot y' = 0$
druga derivacija:	$1 + 1 \cdot y' \cdot y' + y \cdot y'' = 0$

ove implicitno zadane funkcije, možemo ustanoviti da ona zadovoljava diferencijalnu jednadžbu.

Zadatak 6.19. *Napišite diferencijalnu jednadžbu čije je jedno rješenje implicitno zadana funkcija*

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0, \qquad a > 0.$$

Primjedba 6.14. *Ako je poznata derivacija funkcije f i ako postoji derivacija inverzne funkcije, ona se može dobiti primjenom derivacije implicitno zadane funkcije.*

Tako primjerice derivaciju funkcije $y = \operatorname{arth} x$ možemo dobiti poznavajući derivaciju $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}$.

Djelujući (*kompozicija*) funkcijom th na $y = \operatorname{arth} x$, dobivamo $\operatorname{th} y = x$, što možemo derivirati kao implicitno zadanu funkciju:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} \cdot y' = 1 \;\Rightarrow\; y' = \operatorname{ch}^2 y \;\Rightarrow$$

$$y' \overset{(2.28)}{=} \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y} \frac{/ : \operatorname{ch}^2 y}{/ : \operatorname{sh}^2 y} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Primjedba 6.15. *Ponekad treba odrediti derivaciju funkcije oblika*

$$y(x) = [u(x)]^{v(x)}, \quad u(x) > 0, \qquad (*)$$

gdje su u i v zadane funkcije. Logaritmiranjem dobivamo:

$$\ln y = v(x) \, \ln u(x),$$

što možemo derivirati kao implicitnu funkciju

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x),$$

odakle dobivamo

$$y' = [u(x)]^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x) \right]. \qquad (**)$$

Ovaj postupak nazivamo logaritamsko deriviranje*. Primjerice, za funkciju $y = x^x$, $x > 0$ je*

$$\ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \ln x + 1 \Rightarrow y' = x^x [\ln x + 1].$$

6.2.6 Derivacija parametarski zadane funkcije

Način parametarskog zadavanja krivulja opisali smo u *Poglavlju 2.4.1.* Pretpostavimo da je neka krivulja Γ parametarski zadana sustavom funkcija

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in (a,b), \end{aligned}$$

pri čemu su φ i ψ derivabilne funkcije na (a,b), a φ je još i monotona. Tada je s $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ zadana funkcija, čiji graf se podudara s krivuljom Γ. Primjenom pravila za derivaciju složene *(vi)* i inverzne *(vii)* funkcije za $x_0 = \varphi(t_0)$, $t_0 \in (a,b)$, dobivamo

$$y'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)}, \quad x_0 = \varphi(t_0), \tag{6.47}$$

gdje $\dot{\varphi}$, (odnosno $\dot{\psi}$) označava derivaciju funkcije φ (odnosno ψ) po parametru t ili u Leibnizovom zapisu

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}}, \quad x_0 = \varphi(t_0). \tag{6.48}$$

Primjer 6.23. *Odredimo tangentu na kružnicu: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ u točki $T_0(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, koja se dobije za $t = \frac{\pi}{3}$.*

Imamo

$$y'(\tfrac{1}{2}) = \left[\frac{\cos t}{-\sin t}\right]_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

pa jednadžba tangente glasi $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (Usporedi rezultat i postupak s *Primjerom 6.21, str. 160*).

Primjer 6.24. *S podacima iz* Primjera 2.46 *i* Zadatka 2.32, str. 83 *treba izračunati trenutak u kome će projektil biti u najvišem položaju. Jednoliko gibanje projektila zadano je parametarski:*

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \quad i \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Projektil će biti u najvišem položaju (tjeme parabole) u trenutku t_0, za koje mora biti

$$\dot{y}(t_0) = v_0 \sin\alpha - gt_0 = 0,$$

odakle je

$$t_0 = \tfrac{1}{g} v_0 \sin\alpha.$$

Za $v_0 = 900\,\mathrm{m/s}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ i $\alpha = 45^o$, dobivamo $t_0 = 64.87\,\mathrm{s}$.

Zadatak 6.20. *Pokažite da je druga derivacija parametarski zadane funkcije*

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t), \quad t \in (0, b)$$

u točki $x_0 = \varphi(t_0)$, $t_0 \in (0, b)$, *zadana s*

$$y''(x_0) = \frac{\ddot{\psi}(t_0)\dot{\varphi}(t_0) - \dot{\psi}(t_0)\ddot{\varphi}(t_0)}{\dot{\varphi}^3(t_0)}, \quad x_0 = \varphi(t_0).$$

Nađite drugu derivaciju parametarski zadane funkcije za $x_0 = \varphi(t_0)$*:*

a) $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $\quad t \in [0, 2\pi]$, *(kružnica radijusa* r*)*

b) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $\quad t \in (0, 2\pi)$. *(cikloida)*

6.3 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Teorem 6.6 (Fermatov[5] teorem)**.** *Neka funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *u točki* $x_0 \in (a, b)$ *ima lokalni ekstrem. Ako je* f *derivabilna u točki* x_0*, onda je* $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f u točki $x_0 \in (a, b)$ postiže lokalni maksimum. Prema *Primjedbi 2.6, str. 45* to znači da postoji $\delta > 0$, takav da

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) \le f(x_0).$$

Derivacija funkcije f u točki x_0 je prema (6.3)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako je $|x - x_0| < \delta$, onda je $f(x) \le f(x_0)$. Budući da je to unutrašnja točka intervala, onda $x - x_0$ može biti pozitivan ili negativan. Ako je $x - x_0 > 0$, onda je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0, \text{ pa je } \quad \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

[5] Pierre de Fermat (1601-1665) francuski pravnik kome je matematika bila hobi. Posebno se bavio teorijom brojeva. Poznat je tzv. Fermatov problem:

Postoje li prirodni brojevi $x, y, z \in \mathbb{N}$ *koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$x^n + y^n = z^n, \qquad n \in \mathbb{N}\,?$$

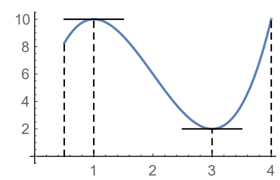
Za $n = 1$ postoji beskonačno mnogo rješenja, za $n = 2$ rješenja su tzv. Pitagorini brojevi (primjerice: $3, 4, 5$). Dugi niz godina ovaj problem privlačio je pažnju mnogih matematičara. Poznato je da su neki važni matematički rezultati nastali baš prilikom pokušaja rješavanja ovog problema. Tek 1993. godine engleski matematičar A. Weils uspio je dokazati da Fermatov problem nema rješenja za $n > 2$. Dokaz je toliko kompliciran da ga može razumjeti samo vrlo uski krug matematičara koji se bave tom problematikom.

a ako je $x - x_0 < 0$,

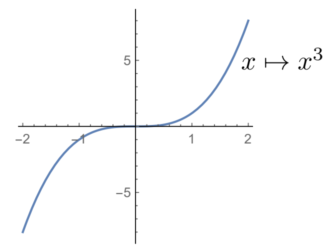
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ pa je } \quad \lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Kako je funkcija f derivabilna u x_0, ta su dva limesa jednaka, pa je $f'(x_0) = 0$. □

Primjedba 6.16. Geometrijski smisao Fermatovog teorema *odmah je jasan: tangenta na graf derivabilne funkcije u točki lokalnog ekstrema paralelna je s osi x, pa joj je koeficijent smjera jednak nuli (vidi* Sliku 6.10*).*



Slika 6.10



Slika 6.11

Definicija 38. *Kažemo da je $x_0 \in (a, b)$* kritična *(ili* stacionarna*) točka derivabilne funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ako je $f'(x_0) = 0$.*

Primjedba 6.17. *Prema Fermatovom teoremu, ako derivabilna funkcija f ima lokalni ekstrem u točki x_0, onda je x_0 kritična točka funkcije f. Zato se kaže da Fermatov teorem daje nužne uvjete za egzistenciju lokalnog ekstrema derivabilne funkcije. To, međutim, nije i dovoljan uvjet. Primjerice, kritična točka derivabilne funkcije $x \mapsto x^3$ je $x_0 = 0$, ali u toj točki ova funkcija nema lokalni ekstrem, već točku infleksije (vidi* Sliku 6.11*).*

Funkcija $x \mapsto |x|$ u točki $x_0 = 0$ ima lokalni minimum, ali u toj točki nije derivabilna, pa nema smisla govoriti o kritičnoj točki ove funkcije, niti se na nju može primijeniti Fermatov teorem na segmentu koji sadržava točku $x_0 = 0$ (vidi Primjedbu 6.6, str. 149 *i* Sliku 2.12a, str. 45*).*

Sljedeći teorem daje uvjete uz koje postoji kritična točka neke funkcije.

Teorem 6.7 (Rolleov[6] teorem)**.** *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*

(i) neprekidna na $[a, b]$;

(ii) derivabilna na (a, b);

(iii) $f(a) = f(b)$;

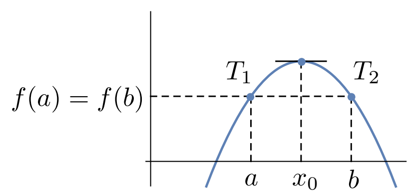
onda postoji $x_0 \in (a, b)$*, takva da je* $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Ako je funkcija f konstanta, tj. ako je $f(x) = f(a) = f(b)$ za sve $x \in [a, b]$, onda je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

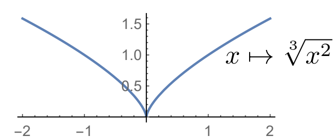
Ako funkcija f nije konstanta, onda zbog neprekidnosti prema *Teoremu 5.4, str. 135* na intervalu $[a, b]$ prima svoju najveću i najmanju vrijednost. To se, međutim, ne može postići na rubovima a ili b jer bi tada funkcija f bila konstanta. Dakle *postoji* $x_0 \in (a, b)$ u kojoj funkcija f prima ekstremnu vrijednost. Zbog derivabilnosti funkcije, a prema Fermatovom teoremu, mora biti $f'(x_0) = 0$. □

Primjedba 6.18. Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema *prikazana je na* Slici 6.12. *Ako graf neprekidne funkcije siječe pravac* $y = f(a)$ *u dvije točke* $T_1(a, f(a))$, $T_2(b, f(b))$ *i ako ima tangentu u svakoj međutočki, onda postoji barem jedna međutočka u kojoj je tangenta paralelna s* x *osi.*

Također, uvjet derivabilnosti funkcije f *na intervalu* (a, b) *ne smije se ispustiti u teoremu. Ilustrirajmo primjerom. Funkcija* f *zadana formulom* $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ *na segmentu* $[-1, 1]$ *udovoljava svim uvjetima Rolleovog teorema, osim što nije derivabilna u nuli, tj. na graf te funkcije u točki s apscisom* $x = 0$ *ne možemo povući tangentu paralelnu s osi* x *(vidi* Sliku 6.13*). Zato za ovu funkciju na segmentu* $[-1, 1]$ *ne vrijedi Rolleov teorem.*



Slika 6.12



Slika 6.13

Zadatak 6.21. *Pokažite pomoću Rolleovog teorema da se između dviju različitih nultočaka neke derivabilne funkcije nalazi barem jedna nultočka prve derivacije te funkcije.*

Teorem 6.8 (Lagrangeov[7] teorem o srednjoj vrijednosti)**.** *Ako je funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

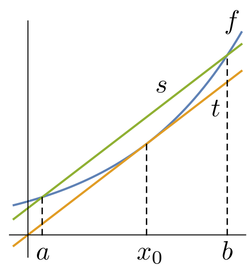
(i) neprekidna na $[a, b]$;

[6] Michel Rolle (1652-1719) - francuski matematičar formulirao je ovaj teorem 1690. samo za polinome

(ii) derivabilna na (a,b);

onda postoji barem jedna točka $x_0 \in (a,b)$ takva da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0). \tag{6.49}$$



Slika 6.14: *Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema*

Dokaz. Na segmentu $[a,b]$ funkciju g definirajmo formulom

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Deriviranjem dobivamo:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Funkcija g na segmentu $[a,b]$ ispunjava sve uvjete Rolleovog teorema (provjerite!). Stoga postoji točka $x_0 \in (a,b)$ takva da je $g'(x_0) = 0$, tj.

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

što povlači (6.49). □

Primjedba 6.19 (Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema)**.** *Pomičemo li paralelno sekantu s određenu točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ u jednom trenutku ona postaje tangenta u nekoj točki $(x_0, f(x_0))$. Koeficijenti smjerova spomenute sekante i tangente su jednaki (vidi Sliku 6.14).*

[7] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), francuski matematičar, pored Eulera najveći matematičar 18. stoljeća. Većinu svojih važnih radova napravio je u Berlinu, gdje je nasljedio Eulera u Akademiji. Vrlo su poznati njegovi rezultati iz teorije brojeva, algebre, teorije vjerojatnosti, ali također i iz područja teorijske mehanike.

Primjer 6.25. *Provjerimo Lagrangeov teorem za funkciju f definiranu na segmentu $[1, 3]$ formulom $f(x) = -x^2 + 6x - 6$.*

Funkcija f je restrikcija polinoma na segment $[1, 3]$, pa je stoga neprekidna na segmentu $[1, 3]$ i derivabilna na intervalu $(1, 3)$. Dakle, ispunjene su sve pretpostavke Lagrangeovog teorema. Pronađimo točku $x_0 \in (1, 3)$ za koju vrijedi:

$$f(3) - f(1) = f'(x_0)(3 - 1).$$

Budući da je $f(1) = -1$, $f(3) = 3$ i $f'(x_0) = -2x_0 + 6$, dobivamo $x_0 = 2$.

Primjedba 6.20. *Formulu (6.49) možemo zapisati u drugom obliku tako da stavimo*

$$h := b - a, \quad x_0 = a + \vartheta h, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Tada (6.49) prelazi u

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \vartheta h)h. \tag{6.50}$$

Primjedba 6.21. *Kao što je ranije spomenuto u* Primjedbi 6.7, str. 149, *kod Newtonovog pristupa derivaciji funkcije prosječna brzina tijela u segmentu vremena $[t_1, t_2]$ je*

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti u ovom slučaju osigurava egzistenciju (najmanje) jednog vremenskog trenutka $t_0 \in (t_1, t_2)$ u kome je trenutna brzina tijela jednaka prosječnoj brzini na segmentu $[t_1, t_2]$.

Zadatak 6.22. *Interpretirajte smisao Rolleovog teorema prema Newtonovom pristupu derivaciji funkcije.*

Korolar 6.1. *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*

(i) *neprekidna na $[a, b]$,*

(ii) *derivabilna na (a, b),*

(iii) *$f'(x) = 0$ za svaki $x \in (a, b)$,*

onda je f konstanta.

Dokaz. Neka je $x \in (a,b)$ proizvoljan. Tada prema Lagrangeovom teoremu postoji $x_0 \in (a,x)$ tako da je

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0).$$

Kako je $f'(x_0) = 0$ (jer se f' poništava u svim točkama intervala $(a,x) \subset (a,b)$), onda je $f(x) - f(a) = 0$, pa je $f(x) = f(a)$. □

Primjedba 6.22. *Funkciju $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ zovemo* primitivnom[8] funkcijom *funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ako vrijedi:*

$$G'(x) = f(x) \quad \textit{za sve}\, x \in [a,b].$$

Tako su, primjerice, funkcije $x \mapsto 2x^3 + 1$ i $x \mapsto 2x^3 - 5$ primitivne funkcije od $f(x) = 6x^2$.

Zadatak 6.23. *Na osnovi* Korolara 6.1 *pokažite da se dvije primitivne funkcije G_1 i G_2 funkcije f razlikuju za konstantu.*

Zadatak 6.24. *Odredite primitivne funkcije sljedećih funkcija:*
a) $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x} + 7$, *b)* $f(x) = 2\sin x + \cos x$,
c) $f(x) = \ln x$, *d)* $f(x) = e^x$.

Primjedba 6.23. *Neka je $c \in \mathbb{R}$. Problem pronalaženja funkcije $y = f(x)$, koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu*

$$y' - y = 0 \qquad (*)$$

uz uvjet

$$y(0) = c \qquad (**)$$

nazivamo problem početne vrijednosti[9] *ili* Cauchyjev problem*. Uvjet* $(**)$ *zovemo* početni uvjet.

Na osnovi Korolara 6.1 *može se pokazati da problem početne vrijednosti $(*) - (**)$ ima* jedinstveno rješenje

$$f(x) = ce^x, \quad c \in \mathbb{R}. \qquad (***)$$

1. *Da je funkcija $f(x) = ce^x$ rješenje Cauchyjevog problema $(*) - (**)$, lako se vidi jer je*

$$f'(x) - f(x) = ce^x - ce^x = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad i \quad f(0) = ce^0 = c.$$

[8] Lat.: primus = prvi, onaj koji je bio prije
[9] Eng.: initial value problem, Njem.: Anfangswertproblem

2. *Da je* $(***)$ *i jedino rješenje pokazat ćemo na osnovi* Korolara 6.1. *Pretpostavimo zato da je* g *neko drugo rješenje problema* $(*)-(**)$, *tj. da je*

$$g'(x) - g(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad i \qquad g(0) = c.$$

Definirajmo pomoćnu funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s*

$$h(x) := e^{-x} g(x).$$

Tada je $h(0) = e^{-0} g(0) = c$ *i za sve* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$h'(x) = -e^{-x} g(x) + e^{-x} g'(x) = -e^{x} g(x) + e^{-x} g(x) = 0.$$

Prema Korolaru 6.1 *funkcija* h *je konstanta, a kako je* $h(0) = c$, *onda je* $h(x) = c$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$. *Dakle,*

$$c = h(x) = e^{-x} g(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ g(x) = ce^{x} \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 6.25. *Pokažite da je funkcija* f *jedinstveno rješenje Cauchyjevog problema:*

$$\begin{array}{llll} a) & y' - 3x^2 y = 0, & y(0) = 2; & f(x) = 2e^{x^3}, \\ b) & xy' + y = 0, & y(1) = c; & f(x) = \frac{c}{x}. \end{array}$$

Korolar 6.2. *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

(i) *neprekidna na* $[a, b]$,

(ii) *derivabilna na* (a, b).

Tada

a) *funkcija* f *raste [strogo raste] na* $[a, b]$ *onda i samo onda ako je* $f'(x) \geq 0$ *za sve* $x \in (a, b)$ *[ako je* $f'(x) > 0$ *za sve* $x \in (a, b)$*];*

b) *funkcija* f *pada [strogo pada] na* $[a, b]$ *onda i samo onda ako je* $f'(x) \leq 0$ *za sve* $x \in (a, b)$ *[ako je* $f'(x) < 0$ *za sve* $x \in (a, b)$*].*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f raste na $[a, b]$ i da je $x_0 \in (a, b)$ proizvoljna čvrsta točka. Treba pokazati da je $f'(x_0) \geq 0$. Vrijedi:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) \text{ za } \Delta x > 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \text{ za } \Delta x < 0$$

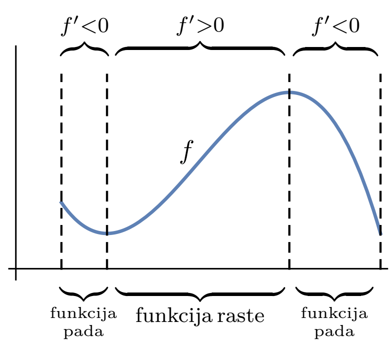
pa je kvocijent $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ nenegativan bez obzira kakvog je znaka Δx. Zato je $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$.

U svrhu dokaza obrata pretpostavimo da je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$. Neka su $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je $x_1 < x_2$. Prema Lagrangeovom teoremu postoji $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$, takav da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0).$$

Kako je po pretpostavci: $f'(x_0) \geq 0$ i $x_2 - x_1 > 0$, mora biti $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, odnosno $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Ostali slučajevi dokazuju se analogno (vidi *Sliku 6.15*). $\square$



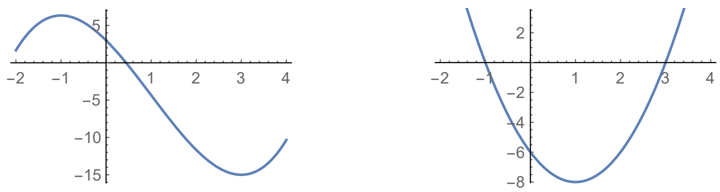
Slika 6.15: *Intervali rasta i pada funkcije*

Primjer 6.26. *Odredimo intervale rasta i pada funkcije*

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivacija od f je $f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$.

(a) *Funkcija f* (b) *Funkcija f'*



Slika 6.16: *Funkcija* $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 3$

Kako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in I_1 = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, onda funkcija f na skupu I_1 raste. Budući da je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in I_2 = (-1, 3)$, funkcija f pada na I_2 (vidi *Sliku 6.16*).

Zadatak 6.26. *Na osnovi* Korolara 6.2 *odredite intervale monotonosti sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},$ *b)* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6, \quad x \in \mathbb{R},$
c) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$ *d)* $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$

Teorem 6.9 (Cauchyev teorem o srednjoj vrijednosti)**.** *Ako su funkcije* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

(i) neprekidne na $[a, b]$*,*

(ii) derivabilne na (a, b)*,*

(iii) $g'(x) \neq 0$ *za svaki* $x \in (a, b)$*,*

onda je $g(a) \neq g(b)$ *i osim toga postoji* $x_0 \in (a, b)$ *takav da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{6.51}$$

Dokaz. Budući da je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$, to je $g(b) \neq g(a)$. U suprotnom bi funkcija $\tilde{g}$ definirana formulom $\tilde{g}(x) = g(x) - g(b)$ na segmentu $[a, b]$ ispunjavala uvjete Rolleovog teorema pa bi postojala točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je $\tilde{g}'(x_0) = g(x_0) = 0$.

Funkcija h definirana formulom:

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)],$$

na segmentu $[a, b]$ ispunjava sve uvjete Rolleovog teorema (provjerite!). Stoga postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je $h'(x_0) = 0$, tj.

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0.$$

$\square$

Cauchyev teorem je poopćenje Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti (jer za $g(x) = x$ (6.51) postaje (6.49)).

6.4 Primjene diferencijalnog računa

6.4.1 L'Hôpitalovo pravilo

Na osnovi Cauchyevog teorema dokazat ćemo tzv. L'Hôpitalovo[10] pravilo pomoću kojeg je moguće jednostavno odrediti složene limese, kao što su: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ itd. Općenito, ovo pravilo služi za određivanje neodređenih oblika: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

Teorem 6.10 (L'Hôpital)**.** *Neka funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, imaju neprekidne derivacije na I i neka je $g(x) \neq 0$ & $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$. Ako je $a \in I$ i ako je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \textit{ili}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

i ako postoji $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.52}$$

Tvrdnja vrijedi i u slučaju ako je $a = -\infty$ ili ako je $a = +\infty$, kao i za limes slijeva i zdesna.

---

[10] Guillaume Franqois Antoine Marquis de L'Hôpital (1661-1704), francuski matematičar. Ovo pravilo bi se zapravo trebalo zvati Bernoullijevo pravilo. Nedavno su, naime, otkrivena pisma koja pokazuju da je Johann Bernoulli za mjesečnu novčanu naknadu 1694. godine ustupio ove i neke druge matematičke rezultate L'Hôpitalu s dozvolom za objavljivanje.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati samo u slučaju ako je a konačan. Potpuni dokaz ovog teorema može se vidjeti u [7].

Zbog derivabilnosti funkcija f i g u točki a, one su i neprekidne u točki a, pa vrijedi:

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{i} \quad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Zbog toga za $x \neq a$ vrijedi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}},$$

odakle prijelazom na limes i zbog pretpostavke da je $g'(a) \neq 0$ dobivamo

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\square$

Primjer 6.27. *Odredimo*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad c)\ \lim_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}.$$

a) Ovdje je $f(x) = \sin x$, $\quad g(x) = x$. Lako se vidi da su za $a = 0$ ispunjeni svi uvjeti *Teorema 6.10.* Zato vrijedi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) Ovdje je $f(x) = \ln(1+x)$, $\quad g(x) = x$. Za $a = 0$ svi uvjeti *Teorema 6.10* su ispunjeni pa vrijedi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

c) Ovdje je $f(x) = \sin 5x$, $\quad g(x) = \sin 2x$. Za $a = \pi$ svi uvjeti *Teorema 6.10* su ispunjeni pa vrijedi

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to \pi}\frac{5\cos 5x}{2\cos 2x} = \frac{5}{2}.$$

Zadatak 6.27. *Primjenom L'Hôpitalovog pravila pokažite da vrijedi*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\tfrac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a>0, \qquad b)\ \lim_{u\to 0}\tfrac{(1+u)^\alpha-1}{u} = \alpha,$$

$$c)\ \lim_{x\to 2}\tfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = -1, \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\tfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3} = \tfrac{1}{3}.$$

Ako je $f'(a) = g'(a) = 0$, onda treba ponavljati formulu (6.52) potreban broj puta kao u sljedećem primjeru.

Primjer 6.28. *Odredimo* *a)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x\cos x}{x-\sin x}$, *b)* $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x-\sin x}$.

$$\begin{aligned} a)\ \lim_{x\to 0} \tfrac{x-x\cos x}{x-\sin x} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \tfrac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \tfrac{2\sin x+x\cos x}{\sin x} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \tfrac{3\cos x-x\sin x}{\cos x} = 3, \\ b)\ \lim_{x\to 0+} \tfrac{1-\cos x}{x-\sin x} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{\sin x}{1-\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{\cos x}{\sin x} = +\infty. \end{aligned}$$

Primjer 6.29. *U sljedećim primjerima javlja se slučaj* $f(x) \to \infty$ *i* $g(x) \to \infty$.

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad \alpha > 0, \qquad b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 1,$$

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\ln x}{x^\alpha} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \tfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

$$b)\quad \lim_{x\to\infty} \tfrac{a^x}{x^n} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \tfrac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \tfrac{a^x (\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \tfrac{a^x (\ln a)^n}{n!} = \infty.$$

Zadatak 6.28. *Primjenom L'Hôpitalova pravila odredite:*

$$a)\ \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

Primjer 6.30. *Primjenom L'Hôpitalovog pravila, uz određene transformacije, pored neodređenih oblika* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, *mogu se rješavati i neki drugi slučajevi, kao primjerice:* $\infty - \infty$ *ili* $0 \cdot \infty$.

$$a)\quad \lim_{x\to 1} \left(\tfrac{1}{\ln x} - \tfrac{x}{\ln x}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 1} \tfrac{1-x}{\ln x} = \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \tfrac{-1}{\frac{1}{x}} = -1.$$

$$b)\quad \lim_{x\to 0} x^2 \ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left(\tfrac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \tfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0.$$

Zadatak 6.29. *Izračunajte:* *a)* $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$, *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \frac{2}{x}$.

Primjer 6.31. *Neodređeni oblici* 1^∞, ∞^0, 0^0 *rješavaju se logaritmiranjem. Tako se, primjerice, kod limesa*

a) $A = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ javlja tzv. neodređeni oblik (1^∞). Budući da je funkcija $u \mapsto \ln u$, $u > 0$ neprekidna, primjenom formule (5.7), str. 134 dobivamo

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Dakle, $\ln A = 1$. Odavde je $A = \lim(1+\frac{1}{x})^x = e$.

b) $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Ovdje se javlja tzv. neodređeni oblik ∞^0. Ako najprije logaritmiramo, dobivamo:

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0+}\operatorname{tg} x\ln\frac{1}{x} = (0\cdot\infty)$$
$$= \lim_{x\to 0+}\frac{-\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1} = 0.$$

Dakle, $\ln A = 0$. Zato je $A = \lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$.

c) $A = \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$. Ovdje se javlja tzv. neodređeni oblik 0^0. Ako najprije logaritmiramo, dobivamo:

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}e^x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{xe^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x} = 1.$$

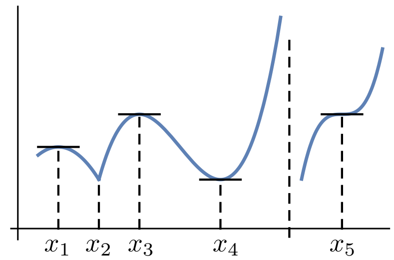
Dakle, $\ln A = 1$. Zato je $A = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e$.

Zadatak 6.30. *Odredite:*

$$a)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \quad b)\ \lim_{x\to 0} x^{\sin x}, \quad c)\ \lim_{x\to 1}(1-x)^{\operatorname{tg}\pi x}.$$

6.4.2 Lokalni ekstremi

U *Poglavlju 2.2.e, str. 45* definirali smo pojam lokalnog minimuma i lokalnog maksimuma neke funkcije f.



Slika 6.17: *Lokalni ekstremi*

Na *Slici 6.17* prikazan je graf jedne funkcije koja u točkama x_1 i x_3 ima lokalni maksimum, a u točkama x_2 i x_4 lokalni minimum. U točkama lokalnih ekstrema funkcija ili iz područja rasta prelazi u područje pada ili obrnuto. Primjenom diferencijalnog računa istraživat ćemo samo lokalne ekstreme derivabilnih funkcija. To znači da se nećemo baviti istraživanjem onih lokalnih ekstrema u kojima derivacija funkcije ne postoji (primjerice točka x_2 sa *Slike 6.17*). Na osnovi Fermatovog teorema odmah možemo ustanoviti

> **A. Nužan uvjet lokalnog ekstrema.** *Ako u točki* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ *derivabilna funkcija* f *postiže lokalni ekstrem, onda je* $f'(x_0) = 0$.

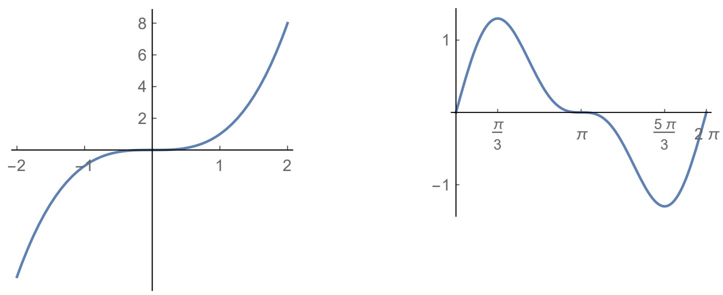
Geometrijski gledano (vidi *Sliku 6.17*) ako je funkcija f derivabilna u točki lokalnog ekstrema, onda je tangenta na njen graf u toj točki paralelna s osi x. U točki x_2 funkcija f ima lokalni minimum, ali ne postoji tangenta u pripadnoj točki grafa. S druge strane, u točki x_5 tangenta je paralelna s osi x, ali to ipak nije točka ekstrema.

Primjer 6.32. *Derivacija funkcije* $f(x) = x^3$ *je* $f'(x) = 3x^2$. *Očigledno je* $x_0 = 0$ *kritična točka ove funkcije, ali ne i točka lokalnog ekstrema (vidi* Sliku 6.18a*).*

Derivacija neprekidne funkcije $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ *je* $g'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$, *pa se njezine kritične točke dobivaju za* $\cos x = \frac{1}{2}$ *ili* $\cos x = -1$. *Kritične točke funkcije* g *su dakle:* $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{3}$. *Sa* Slike 6.18b *vidi se da funkcija* g *u točki* x_1 *postiže lokalni maksimum, u točki* x_3 *postiže lokalni minimum, a točka* x_2 *nije točka lokalnog ekstrema.*

Primijetimo da kritična točka x_0 *u prvom slučaju i kritična točka* x_2 *u drugom slučaju ne odvaja područje monotonosti suprotnog smisla.*

(a) $f(x) = x^3$ (b) $g(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$



Slika 6.18: *Funkcija f u kritičnoj točki $x_0 = 0$ i funkcija g u kritičnoj točki $x_2 = \pi$ ne postiže lokalni ekstrem*

Dakle, uvjet **A** nije i dovoljan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema derivabilne funkcije.

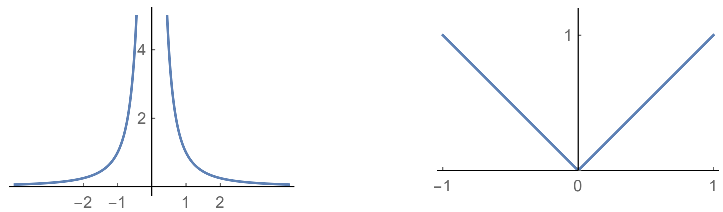
Ako je funkcija f derivabilna, na osnovi *Korolara 6.2*, str. 170 možemo ustanoviti prvi dovoljan uvjet za egzistenciju lokalnog ekstrema derivabilne funkcije.

> **B1. Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema.** *U točki $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ derivabilna funkcija f postiže lokalni ekstrem ako derivacija f' prolazeći kroz x_0 mijenja predznak. Ako je promjena predznaka od „$-$" na „$+$", x_0 je točka lokalnog minimuma, a ako se predznak mijenja od „$+$" na „$-$", x_0 je točka lokalnog maksimuma.*

Primjedba 6.24. *Derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Očigledno je $f'(x) > 0$ za $x < 0$, a $f'(x) < 0$ za $x > 0$, ali točka $x_0 = 0$ nije točka lokalnog ekstrema jer $0 \notin \mathcal{D}(f)$ (vidi* Sliku 6.19a*).*

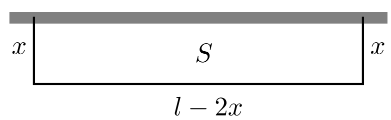
Dovoljan uvjet **B** *može se primijeniti i u slučaju ako je promatrana funkcija neprekidna, ali ne i derivabilna u točki lokalnog ekstrema. Primjerice, za $x < 0$ derivacija neprekidne funkcije $g(x) = |x|$ je $g'(x) = -1 < 0$, a za $x > 0$, $g'(x) = 1 > 0$. Zato je $x_0 = 0$ točka lokalnog minimuma funkcije g (vidi* Sliku 6.19b*).*

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (b) $g(x) = |x|$



Slika 6.19: *Ispitivanje lokalnih ekstrema*

Primjer 6.33. *Treba ograničiti pravokutni prostor zadane površine S, koji se jednom stranicom naslanja na čvrsti zid (vidi* Sliku 6.20*) tako da je ukupna duljina l potrebne pletene žice minimalna.*



Slika 6.20: *Ograđeni pravokutni prostor*

Kako je (vidi *Sliku 6.20*) $S = x(l - 2x)$, dobivamo $l(x) = 2x + \frac{S}{x}$, $x > 0$. Iz $l'(x) = 2 - \frac{S}{x^2} = 0$ dobivamo kritičnu točku $x_0 = \sqrt{\frac{S}{2}}$ (duljina stranice pravokutnika). U x_0 funkcija l postiže lokalni minimum jer je $l'(x) < 0$ za $x < x_0$, a $l'(x) > 0$ za $x > x_0$ (provjerite!). Dakle, minimalna duljina potrebne pletene žice je $l_{min} = l(\sqrt{\frac{S}{2}}) = 2\sqrt{2S}$.

Koji oblik bi imala ograđena površina kada ne bi postojao čvrsti zid?

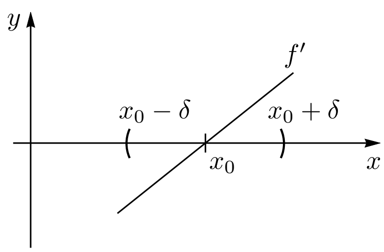
Zadatak 6.31. *Kakav mora biti omjer $\frac{h}{d}$ visine h i promjera baze d zatvorene valjkaste posude zadanog volumena V da njena ukupna površina bude minimalna?*

Zadatak 6.32. *Pronađite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, *b)* $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,
c) $f(x) = x^2 e^{-x}$, *d)* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 3$.

Ako funkcija f ima neprekidnu drugu derivaciju, umjesto uvjeta **B1** možemo koristiti:

B2. Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema. *U točki $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ dva puta neprekidno derivabilna funkcija f postiže lokalni ekstrem, ako je $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) \neq 0$. Pri tome, ako je $f''(x_0) > 0$, x_0 je točka lokalnog minimuma, a ako je $f''(x_0) < 0$, x_0 je točka lokalnog maksimuma.*



Slika 6.21

Obrazloženje. Pretpostavimo da je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$. Zbog neprekidnosti od f'', postoji okolina $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, tako da je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in \mathcal{O}(x_0)$. Zato je funkcija f' strogo rastuća (*Korolar 6.2*) u $\mathcal{O}(x_0)$ (vidi *Sliku 6.21*). Kako je $f'(x_0) = 0$, za

- $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x_0) < 0$, tj. funkcija f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ strogo pada;
- $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x_0) > 0$, tj. funkcija f na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ strogo raste.

Prema uvjetu **B1** to znači da funkcija f u točki x_0 postiže lokalni minimum. Drugi dio tvrdnje **B2** pokazuje se analogno (provjerite!). □

Primjedba 6.25. *U slučaju ako je $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, uvjet* **B2** *ne možemo koristiti. Tada ostaje još uvjet* **B1**. *Provjerite ovo na slučaju funkcija iz* Primjera 6.32, *str. 177.*

Primjer 6.34. *U* Primjeru 6.33 *ustanovili smo da je $x_0 = \sqrt{\frac{S}{2}}$ kritična točka funkcije $l(x) = 2x + \frac{S}{x}$, $x > 0$.*

Ako želimo ispitati ekstrem na osnovi uvjeta **B2**, najprije moramo izračunati $l''(x) = \frac{2S}{x^3}$. Kako je $l''(x) > 0$ za sve $x > 0$ (pa onda i za $x_0 = \sqrt{\frac{S}{2}}$), funkcija l postiže lokalni minimum (koji je u ovom slučaju ujedno i globalni minimum).

Primjer 6.35. *Za koliko će sekundi poslije početka padanja pod utjecajem sile teže (bez utjecaja otpora zraka) kinetička energija kapljice* *kiše biti najveća (i kolika će biti) ako je početna masa kapljice m_0, a kapljica se ravnomjerno (jednoliko) isparava tako da je gubitak mase proporcionalan vremenu (koeficijent proporcionalnosti je k)?*

Nakon t sekundi poslije početka pada kinetička energija $E(t)$ kapljice kiše je

$$E(t) = \frac{m(t)v^2(t)}{2} = \frac{(m_0 - kt)(gt)^2}{2},$$

gdje je g akceleracija sile teže. Treba pronaći maksimum funkcije E. Kako je

$$E'(t) = g^2 t(-\frac{3}{2}kt + m_0),$$

kritične točke su $t_0 = 0$ i $t_1 = \frac{2}{3}\frac{m_0}{k}$. Kako je $E''(t) = -3kg^2 t + m_0 g^2$, $E''(t_0) = m_0 g^2 > 0$, u točki $t_0 = 0$ kinetička energija je minimalna. Kako je $E''(t_1) = -m_0 g^2 < 0$, funkcija E u točki $t_1 = \frac{2}{3}\frac{m_0}{k}$ postiže maksimum, koji iznosi

$$E_{max}\left(\frac{2}{3}\frac{m_0}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(m_0 - k\frac{2m_0}{3k}\right)\left(g\frac{2m_0}{3k}\right)^2 = \frac{2}{27}\frac{g^2 m_0^3}{k^2}.$$

Brojeve m_0 i k trebalo bi eksperimentalno utvrditi.

Primjer 6.36. *Pokažimo da je udaljenost točke (x_0, y_0) od pravca $y = kx + l$ dana formulom:*

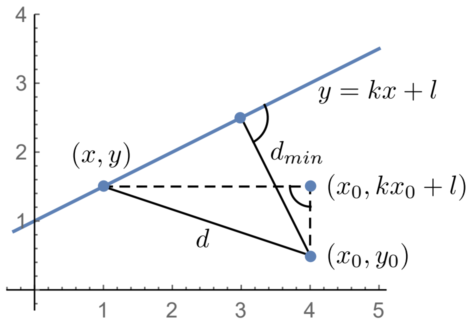
$$d_{min} = \frac{|y_0 - kx_0 - l|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Neka je $(x, y) = (x, kx + l)$ bilo koja točka s pravca $y = kx + l$. Označimo s d njenu udaljenost od točke (x_0, y_0) (vidi *Sliku 6.22*). Primjenom Pitagorinog teorema na pravokutni trokut sa slike dobivamo:

$$d^2 := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_0)^2 + (kx + l - y_0)^2.$$

Treba odrediti onu točku $(c, kc + l)$ pravca $y = kx + l$ za koju je d najmanje. U tu svrhu dovoljno je naći minimum funkcije:

$$f(x) = d^2 = (x - x_0)^2 + (kx + l - y_0)^2.$$



Slika 6.22

Rješavanjem jednadžbe:

$$f'(x) = 2(x - x_0) + 2k(kx + l - y_0) = 0$$

dobivamo jednu stacionarnu točku $c = \frac{ky_0 - kl + x_0}{1+k^2}$. Budući da je $f''(x) = 2+2k^2 > 0$, zaključujemo da funkcija f u točki c ima strogi lokalni minimum. Pri tome je:

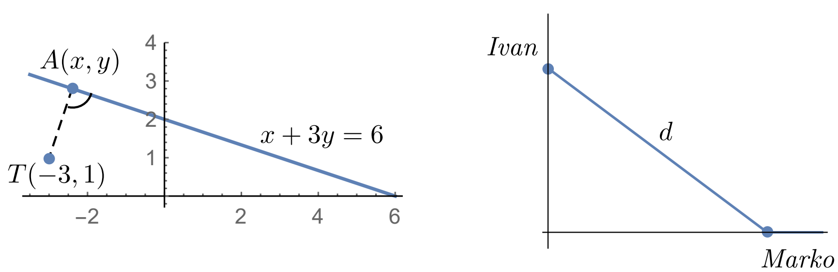
$$f(c) = (c - x_0)^2 + (kc + l - y_0)^2 = \left(\frac{ky_0 - kl + x_0}{1 + k^2} - x_0\right)^2 + \left(k\frac{ky_0 - kl + x_0}{1 + k^2} + l - y_0\right)^2.$$

Nakon sređivanja dobivamo $f(c) = \frac{(y_0 - kx_0 - l)^2}{1+k^2}$, odakle je $d_{min} = \frac{|y_0 - kx_0 - l|}{\sqrt{1+k^2}}$.

Usporedi *Zadatak 2.12, str. 53.*

Zadatak 6.33. *Odredi točku A na pravcu $x + 3y = 6$ koja je najbliža točki $T(-3, 1)$ (vidi* Sliku 6.23a*). Kolika je ta udaljenost?*

(a) *Zadatak 6.33* (b) *Zadatak 6.33*



Slika 6.23

Primjer 6.37. *Zadano je m mjerenja $y_1, \ldots, y_m$ neke veličine A. Treba pronaći takvu vrijednost A^*, za koju će suma kvadrata odstupanja od mjerenja $y_1, \ldots, y_m$ biti najmanja.*

Treba odrediti minimum funkcije

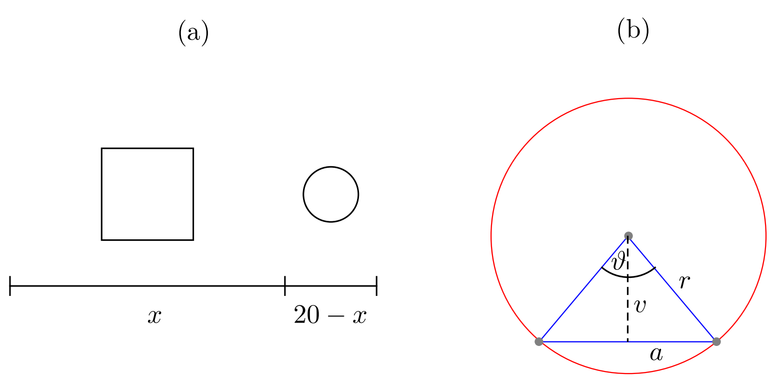
$$f(A) = \sum_{i=1}^{m} (A - y_i)^2.$$

Kako je $f'(A) = 2\sum_{i=1}^{m}(A - y_i)$, kritična točka je $A^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$, a kako je $f''(A) = 2m > 0$, onda je i $f''(A^*) > 0$ pa u točki A^* funkcija f postiže svoj minimum.

Primijetite da je veličina A^* aritmetička sredina mjerenja $y_1, \ldots, y_m$.

Zadatak 6.34. *Dvije ceste sijeku se pod pravim kutom. Jedna vodi od istoka na zapad, a druga od juga na sjever. Ivan je krenuo trčeći od raskrižja prema sjeveru brzinom od $12\,\mathrm{km/h}$, a Marko je krenuo biciklom od istoka na zapad brzinom od $24\,\mathrm{km/h}$ i stigao na raskrižje nakon 30 minuta. Pronađite minimalnu udaljenost Ivana i Marka (vidi* Sliku 6.23b*).*

Zadatak 6.35. *Komad žice duge $20\,\mathrm{m}$ treba presjeći na dva komada duljine $20 - x$ i x, tako da od komada duljine x načinimo kvadrat, a od komada duljine $20 - x$ krug, ali tako da suma površina kvadrata i kruga bude maksimalna (vidi* Sliku 6.24a*).*



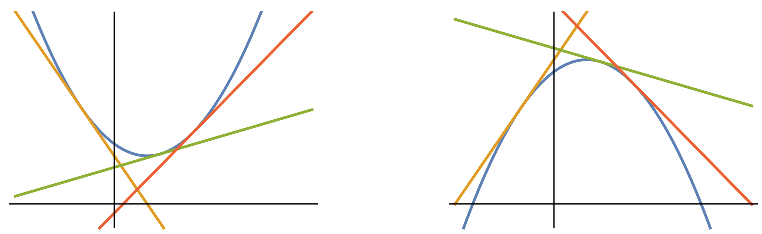
Slika 6.24

Zadatak 6.36. *Jedan vrh trokuta leži u središtu kruga radijusa r, a druga dva vrha leže na obodu kruga (vidi* Sliku 6.24b*). Odredi kut ϑ pri vrhu trokuta koji leži u središtu kruga tako da površina trokuta bude maksimalna.*

6.4.3 Konveksnost, konkavnost i točke infleksije

Pojam konveksnosti i konkavnosti funkcije na intervalu (a, b), kao i pojam točke infleksije uveli smo u *Poglavlju 2.2.c, str. 41*. Sada ćemo pokazati kako pomoću diferencijalnog računa možemo ustanoviti područje konkavnosti, konveksnosti i točke infleksije neke funkcije f.

(a) *Konveksna funkcija* (b) *Konkavna funkcija*



Slika 6.25: *Konveksna i konkavna funkcija*

Tangenta na graf konveksne funkcije f uvijek je ispod njenog grafa. Idući s lijeva na desno njen koeficijent smjera raste, tj. derivacija f' u području konveksnosti funkcije f je rastuća funkcija (vidi *Sliku 6.25a*). Prema *Korolaru 6.2* to znači da je u tom području druga derivacija f'' nenegativna ($f'' \geq 0$).

Analogno, u području konkavnosti funkcije f, njena druga derivacija f'' je nepozitivna ($f'' \leq 0$) (vidi *Sliku 6.25b*).

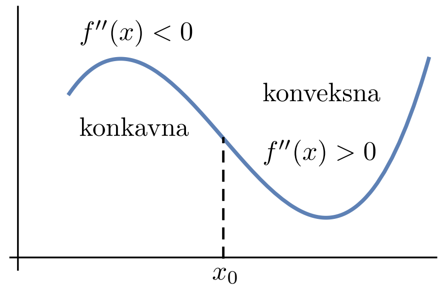
Ako je druga derivacija f'' neprekidna funkcija, onda između područja konveksnosti i konkavnosti postoji neka točka x_0 u kojoj se druga derivacija poništava: $f''(x_0) = 0$. Ta točka dijeli područje konkavnosti i konveksnosti i naziva se točka infleksije (vidi *Sliku 6.26*). Preciznije, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 6.11. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno derivabilna na (a, b).*

a) Funkcija f je konveksna na (a, b) onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

b) Funkcija f je konkavna na (a, b) onda i samo onda ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

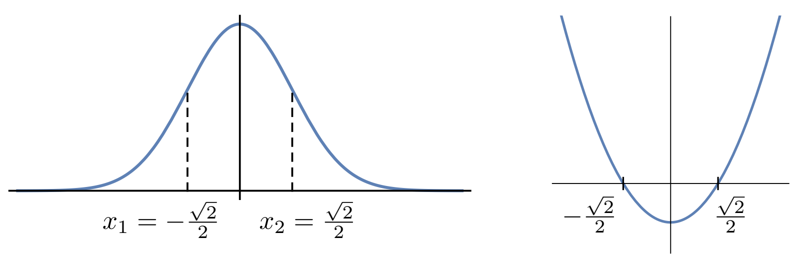
c) Točka $x_0 \in (a, b)$ je točka infleksije funkcije f onda i samo onda ako funkcija f' ima strogi lokalni ekstrem u x_0.



Slika 6.26: *Točka infleksije*

Primjer 6.38. *Odredimo točke infleksije funkcije $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.*
Ova funkcija je dvaput neprekidno derivabilna na čitavom skupu $\mathbb{R}$. Njena prva derivacija je $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, ima jednu kritičnu točku $x_0 = 0$, rastuća je na $(-\infty, 0)$ i padajuća na $(0, +\infty)$ (vidi *Sliku 6.27a*).

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ (b) $x \mapsto -1 + 2x^2$



Slika 6.27: *Određivanje točaka infleksije funkcije $f(x) = e^{-x^2}$*

Njena druga derivacija je $f''(x) = e^{-x^2}(-1 + 2x^2)$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $e^{-x^2} > 0$. Kako je $2x^2 - 1 < 0$ za svaki $x \in I_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ (vidi *Sliku 6.27b*) i $2x^2 - 1 > 0$ za svaki $x \in I_2 = (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ naša funkcija f je konkavna na I_1 i konveksna na I_2. Točke $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ su njene točke infleksije jer je $f'''(x_i) = [e^{-x^2}(6x - 4x^3)]_{x=x_i} \neq 0, \quad i = 1, 2$ (vidi *Sliku 6.27a*).

Zadatak 6.37. *Ispitajte konveksnost, konkavnost i točke infleksije sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, *b)* $f(x) = \ln(1 + x^2)$, *c)* $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

Zadatak 6.38. *Odredite lokalne ekstreme i točke infleksije, te nacrtajte grafove sljedećih funkcija:*

$$a)\ f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x, \quad b)\ f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad c)\ f(x) = x^3 e^{-x}.$$

6.4.4 Ispitivanje toka funkcije

Prilikom ispitivanja toka funkcije možemo se držati sljedećeg redoslijeda:

A. (a) Odrediti prirodno područje definicije,
   (b) Ustanoviti točke prekida i intervale neprekidnosti,
   (c) Ispitati ponašanje funkcije u okolini točaka prekida (lijevi i desni limes); izračunati vertikalne asimptote,
   (d) Pronaći ostale asimptote funkcije,
   (e) Pronaći sjecišta grafa funkcije s koordinatnim osima,
   (f) Ispitati parnost funkcije,
   (g) Ispitati periodičnost funkcije,

B. Pronaći lokalne ekstreme i ustanoviti intervale rasta i pada.

C. Odrediti područje konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije.

Treba primijetiti da ponekad neće biti potrebno provesti sva spomenuta ispitivanja, a neki puta neke elemente neće biti moguće elementarno provesti.

Primjer 6.39. *Ispitajmo tok funkcije* $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

A. Područje definicije je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.
Intervali neprekidnosti su $(-\infty, -1)$ i $(-1, +\infty)$.
Pravac $x = -1$ je vertikalna asimptota jer je

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x^2}{1+x} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+} \frac{x^2}{1+x} = +\infty.$$

Funkcija ima obostranu kosu asimptotu $y = x - 1$ jer je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x + x^2} = 1,$$

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{1+x} = -1.$$

Zbog toga ova funkcija nema horizontalnih asimptota.
Kako je $f(x) = 0$ jedino za $x = 0$, točka $x_1 = 0$ je jedina nul-točka funkcije.
Istovremeno u toj točki graf Γ_f siječe i os y.
Funkcija nije ni parna ni neparna, a nije ni periodična.

B. Kako je $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$, imamo dvije kritične točke: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Kako je $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, vrijedi:

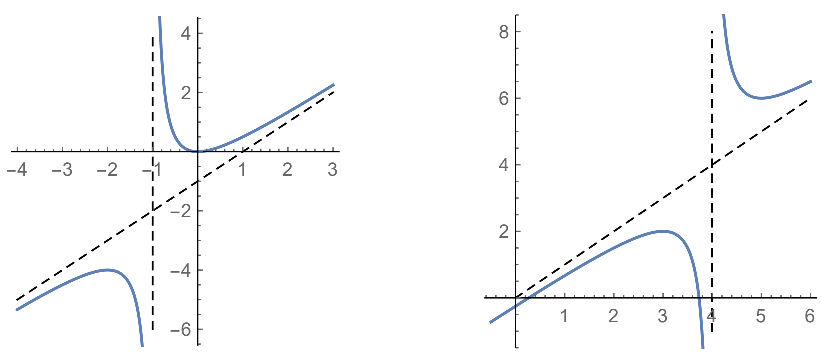
- $f''(0) = 2 > 0$ pa u točki $x_1 = 0$ funkcija f postiže lokalni minimum: $m(0, 0)$.
- $f''(-2) = -2 < 0$ pa u točki $x_2 = -2$ funkcija f postiže lokalni maksimum: $M(-2, -4)$.

Intervali rasta su $(-\infty, -2)$ i $(0, +\infty)$, a intervali pada $(-2, -1)$ i $(-1, 0)$.

C. Funkcija nema točke infleksije jer je $f''(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$, konkavna je na intervalu $(-\infty, -1)$, a konveksna na intervalu $(-1, +\infty)$.

Sada možemo skicirati graf ove funkcije (vidi *Sliku 6.28a*).

(a) $x \mapsto \frac{x^2}{1+x}$ (b) $x \mapsto \frac{x^2-4x+1}{x-4}$



Slika 6.28: *Grafovi funkcija iz Primjera 6.39 i Primjera 6.40*

Primjedba 6.26. *Računanje druge derivacije funkcije može biti obiman posao. Ako je potrebno pronaći točke infleksije funkcije, to nije moguće izbjeći, ali ako je potrebno samo ispitati karakter lokalnog ekstrema u kritičnim točkama, onda se posao u nekim slučajevima može znatno skratiti.*

Ako je x_0 kritična točka funkcije f i ako je $f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ i $v(x_0) \neq 0$, onda vrijedi

$$f''(x_0) = \left[\frac{u'(x)}{v(x)}\right]_{x=x_0} \tag{6.53}$$

Naime, budući da je x_0 kritična točka funkcije f, onda mora biti $u(x_0) = 0$, pa je

$$f''(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v(x_0)}.$$

Primjer 6.40. *Ispitajmo tok funkcije* $f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$.

A. Prirodno područje definicije je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
Intervali neprekidnosti su $(-\infty, 4)$ i $(4, +\infty)$.
Kako je $\lim\limits_{x\to 4-} \frac{x^2-4x+1}{x-4} = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 4+} \frac{x^2-4x+1}{x-4} = +\infty$, pravac $x = 4$ je vertikalna asimptota.
Pronađimo kose asimptote. Imamo

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+1}{x(x-4)} = 1$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2-4x+1}{x-4} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-4} = 0.$$

Iste vrijednosti koeficijenata k, l dobile bi se i ako bi računali limese za $x \to -\infty$. Zato je pravac $y = x$ obostrana kosa asimptota. Naravno, to znači da horizontalnih asimptota ova funkcija nema.
Funkcija ima dvije realne nul-točke: $x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.29$, $x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3.7$, a njezin graf siječe os y u točki $(0, -\frac{1}{4})$.
Funkcija nije ni parna, ni neparna, ni periodična.

B. Kako je $f'(x) = \frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}$, imamo dvije kritične točke $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$.

- Kako je prema (6.53)

$$f''(x_1) = \left[\frac{2x-8}{(x-4)^2}\right]_{x=3} = -2,$$

funkcija f u točki $x_1 = 3$ postiže lokalni maksimum. Označimo točku maksimuma s $M(3, 2)$.

- Za drugu kritičnu točku x_2 imamo

$$f''(x_2) = \left[\frac{2x-8}{(x-4)^2}\right]_{x=5} = 2,$$

što znači da funkcija f u točki $x_2 = 5$ postiže lokalni minimum. Označimo točku minimuma s $m(5, 6)$.

Intervali rasta su $(-\infty, 3)$ i $(5, +\infty)$, a intervali pada funkcije su $(3, 4)$ i $(4, 5)$.

C. Funkcija je konkavna na intervalu $(-\infty, 4)$, a na intervalu $(4, +\infty)$ ona je konveksna.

Graf funkcije prikazan je na *Slici 6.28b*.

Zadatak 6.39. *Ispitajte tok sljedećih funkcija i nacrtajte njihove grafove.*

a) $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$, *b)* $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$, *c)* $f(x) = xe^{-x}$,

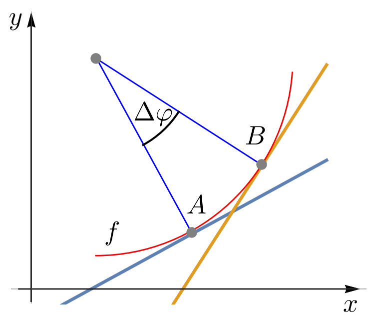
d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, *e)* $f(x) = xe^{-x^2/2}$, *f)* $f(x) = x^2e^{-x}$.

6.4.5 Zakrivljenost, evoluta, evolventa

Zakrivljenost grafa funkcije f u točki A (vidi *Sliku 6.29*) definirat ćemo kao

$$K = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\overset{\frown}{AB}}, \tag{6.54}$$

gdje je $\overset{\frown}{AB}$ duljina luka krivulje Γ_f između točaka A i B, a $\Delta\varphi$ kut između normala na graf Γ_f u točkama A i B.



Slika 6.29: *Zakrivljenost grafa funkcije*

Primjer 6.41. *Zakrivljenost kružnice radijusa r u proizvoljnoj točki je*

$$K = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\overset{\frown}{AB}} = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{\Delta\varphi}{r\Delta\varphi} = \frac{1}{r}.$$

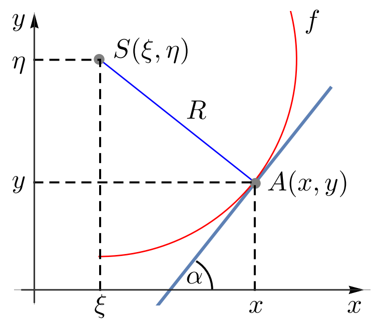
Zakrivljenost pravca u proizvoljnoj točki je

$$K = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\overset{\frown}{AB}} = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{0}{\overset{\frown}{AB}} = 0.$$

Apsolutnu recipročnu vrijednost zakrivljenosti grafa Γ_f u točki A nazivamo **radijus zakrivljenosti** u točki A:

$$R = \frac{1}{|K|}. \tag{6.55}$$

Kružnica radijusa R koja "iznutra" dodiruje graf Γ_f u točki A naziva se **kružnica zakrivljenosti**.



Slika 6.30: *Središte kružnice zakrivljenosti*

Odredimo središte $S(\xi,\eta)$ kružnice zakrivljenosti u točki $A(x,y)$ grafa funkcije $y=f(x)$. Prema *Slici 6.30* vrijedi

$$\begin{aligned} x-\xi &= R\sin\alpha = R\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}\frac{/:\cos\alpha}{/:\cos\alpha} = R\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = R\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &= \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = \frac{y'}{y''}(1+y'^2), \end{aligned}$$

odnosno

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2). \tag{6.56}$$

Slično,

$$\begin{aligned} \eta-y &= R\cos\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}\frac{/:\cos\alpha}{/:\cos\alpha} = R\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &= \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}} = \frac{1}{y''}(1+y'^2), \end{aligned}$$

odnosno

$$\eta = y + \frac{1}{y''}(1+y'^2). \tag{6.57}$$

Iz (6.56) i (6.57) dobivamo također i eksplicitnu formulu za radijus zakrivljenosti R grafa funkcije $y=f(x)$ u točki A:

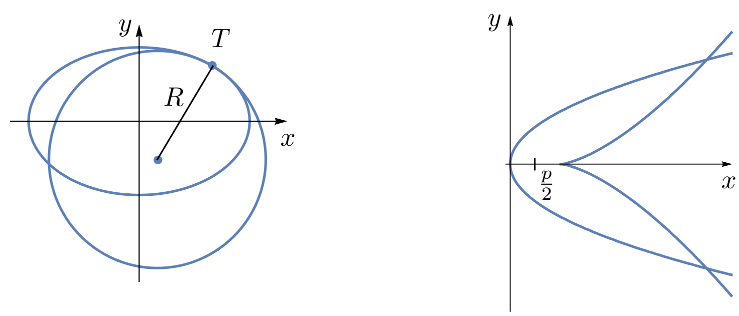
$$R=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \tag{6.58}$$

Primjer 6.42. *Izračunajmo radijus zakrivljenosti i kružnicu zakrivljenosti elipse* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ *u točki* $T(2,\frac{2}{3}\sqrt{5})$.

Nađimo najprije prvu i drugu derivaciju: $\frac{2}{9}x - \frac{1}{2}yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4}{9}\frac{x}{y} \Rightarrow y'' = -\frac{4}{9}\frac{y-xy'}{y^2}$. Budući da je $y'(2) = -\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{\frac{2}{3}\sqrt{5}} = -\frac{4\sqrt{5}}{15}$ i $y''(2) = -\frac{4}{9}\frac{\frac{2}{3}\sqrt{5}+2\frac{4\sqrt{5}}{15}}{\frac{4}{9}\cdot 5} = \frac{-6\sqrt{5}}{25}$, dobivamo $R = \frac{61\sqrt{61}}{162} \approx 2.941$, $\xi = \frac{40}{81} \approx 0.494$, $\eta = \frac{-25\sqrt{5}}{54} \approx 1.035$. U točki T elipsu iznutra dodiruje kružnica (vidi *Sliku 6.31a*):

$$\left(x - \frac{40}{81}\right)^2 + \left(y + \frac{25\sqrt{5}}{54}\right)^2 = \frac{61^3}{4 \cdot 3^8}$$

(a) *Kružnica zakrivljenosti na elipsu* (b) *Evoluta i evolventa*



Slika 6.31

Primjer 6.43. *Odredimo radijus zakrivljenosti i jednadžbu kružnice zakrivljenosti parabole $y = x^2 - 6x + 10$ u točki $A(3, 1)$.*

Kako je $y'(3) = 0$ i $y''(3) = 2$, prema (6.56) i (6.57), te prema (6.58) dobivamo: $\xi = 3$, $\eta = \frac{3}{2}$ i $R = \frac{1}{2}$. Jednadžba kružnice zakrivljenosti glasi

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Zadatak 6.40. *Odredite radijus zakrivljenosti na elipsu iz* Primjera 6.42 *u točki $T(0, 2)$. Napišite jednadžbu pripadne kružnice zakrivljenosti.*

Definicija 39. *Geometrijsko mjesto svih središta kružnica zakrivljenosti zovemo* evoluta *zadane krivulje. Zadanu krivulju u odnosu na evolutu zovemo* evolventa.

Primjer 6.44. *Odredimo evolutu parabole* $y^2 = 2px$.

Kako je $y' = \frac{p}{y}$ i $y'' = -\frac{p}{y^2}y'$, onda je

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) = x - \frac{y'}{-\frac{p}{y^2}y'}(1 + \frac{p^2}{y^2}) = 3x + p, && (*) \\ \eta &= y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = y + \frac{1}{-\frac{p}{y^2}\frac{p}{y}}(1 + \frac{p^2}{y^2}) = -\frac{y^3}{p^2}. && (**) \end{aligned}$$

Da bi dobili jednadžbu evolute, iz $(*)-(**)$ treba eliminirati x i y. Kako je $y^2 = 2px$, onda ćemo najprije iz $(*)$ isključiti x:

$$\xi = 3x + p = 3 \cdot \frac{y^2}{2p} + p$$

i zapisati u obliku

$$y^2 = \frac{2p}{3}(\xi - p). \qquad (*')$$

Jednadžbu $(**)$ zapisat ćemo slično

$$y^3 = -p^2\eta. \qquad (**')$$

Ako $(*')$ potenciramo s 3, a $(**')$ s 2 i oduzmemo jedno od drugog, dobivamo

$$\eta^2 p^4 - \frac{8}{27}p^3(\xi - p)^3 = 0. \qquad (***)$$

Jednadžba $(***)$ je jednadžba evolute parabole $y^2 = 2px$ (vidi *Sliku 6.31b*).

Zadatak 6.41. *Odredite jednadžbu evolute parabole* $y = x^2$.

6.5 Redovi potencija. Taylorov red

Kao što smo u *Poglavlju 4, str. 111* promatrali redove realnih brojeva, možemo promatrati i red funkcija

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots .$$

Kažemo da red funkcija konvergira u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ onda ako konvergira red brojeva

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots .$$

Specijalno, red funkcija oblika

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots , \qquad (6.59)$$

gdje su $x_0, a_0, a_1, \ldots$ realni brojevi, zvat ćemo **red potencija**. Ako umjesto $x - x_0$ pišemo samo x, red (6.59) prelazi u red potencija

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \tag{6.60}$$

Zato je dovoljno izučiti samo svojstva reda potencija oblika (6.60).

Teorem 6.12 (Abelov teorem)**.** *Ako red potencija (6.60) konvergira u točki $x_0 \neq 0$, onda on apsolutno konvergira na intervalu $(-|x_0|, |x_0|)$.*

Dokaz. Ako red $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konvergira, onda (nužan uvjet konvergencije!) vrijedi $a_k x_0^k \to 0$. Zato su svi članovi tog reda ograničeni, tj.

$$\text{postoji } M > 0, \ \ |a_k x_0^k| < M, \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Red (6.60) napišimo u obliku

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \cdots . \qquad (**)$$

Odgovarajući red apsolutnih vrijednosti je

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots \qquad (***)$$

Zbog uvjeta $(*)$ jedna majoranta reda $(***)$ je geometrijski red

$$M + M \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots \qquad (****)$$

s kvocijentom $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$. Ako je $|x| < |x_0|$, red $(****)$ je konvergentan, pa je konvergentan i red $(***)$, što znači da red $(**)$, odnosno red (6.60) apsolutno konvergira za sve x takve da je $|x| < |x_0|$. $\square$

Korolar 6.3. *Ako red potencija (6.60) divergira u točki x_0, onda on divergira za svaki x, takav da je $|x| > |x_0|$.*

Definicija 40. *Kažemo da je R* radijus konvergencije *reda potencija ako za sve x ($|x| < R$) red konvergira, a za sve x ($|x| > R$) red divergira. Interval $(-R, R)$ nazivamo* interval *(područje)* konvergencije.

U svrhu određivanja radijusa konvergencije reda potencija (6.60), primijetimo da se njegov interval konvergencije podudara s intervalom konvergencije reda:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots . \tag{6.61}$$

Ovo je red s pozitivnim članovima pa možemo primijeniti D'Alambertov kriterij. Red (6.61) je konvergentan za sve one x za koje je limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{6.62}$$

manji od 1, a bit će divergentan za sve one x za koje je limes (6.62) veći od 1. Zato će (u slučaju kada $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$) postoji) ona vrijednost od $|x|$ za koju je limes (6.62) jednak 1 biti radijus konvergencije reda (6.60).

Primjer 6.45. *Nađimo intervale konvergencije sljedećih redova:*

a) $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$

b) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots,$

c) $x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2} + \cdots.$

a) Kako je $|x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0$, red konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$, tj. radijus konvergencije je $R = \infty$.

b) Kako je $|x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| \cdot 1$, red konvergira za $|x| < 1$ i radijus konvergencije je $R = 1$. Provjerite da je za $x = 1$ ovaj red divergentan.

c) Radijus konvergencije ovog reda je $R = 1$ (provjerite!).

Primjer 6.46. *Pronađimo interval konvergencije reda*

$$\frac{x-1}{1\cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n} + \cdots.$$

Prema D'Alambertovom kriteriju mora biti

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1} n 2^n}{(n+1)2^{n+1}(x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = |x-1| \cdot \frac{1}{2} < 1.$$

Zato red konvergira za sve x za koje je $|x-1| < 2$, odnosno $-2 < x-1 < 2$, odnosno $-1 < x < 3$. Dakle, interval konvergencije je $(-1, 3)$.

Navedimo bez dokaza sljedeći teorem (vidi [21]).

Teorem 6.13. *Neka $R > 0$ radijus konvergencije reda potencija (6.60). Tada je funkcija $S : (-R, R) \to \infty$ definirana formulom $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ derivabilna na $(-R, R)$ i njena je derivacija dana s*

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

Pri tome je radijus konvergencije reda $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$ također R.

Korolar 6.4. *Suma reda potencija*

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

je u intervalu konvergencije reda neprekidna funkcija koja, šta više, ima derivacije svakog reda.

Primjer 6.47. *Interval konvergencije reda*

$$S(x) := 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (*)$$

je $(-1,1)$. *Za* $x \in (-1,1)$ *je* $S(x) = \frac{1}{1-x}$. *Iako je funkcija* $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ *definirana i za* $|x| > 1$, *red* $(*)$ *predstavlja tu funkciju samo za* $|x| < 1$. *Za* $|x| \geq 1$ *red* $(*)$ *je divergentan i nema smisla govoriti o njegovoj sumi.*

6.5.1 Taylorov polinom

U *Poglavlju 6.1, str. 139* neku funkciju f u okolini točke x_0 aproksimirali smo linearnim aproksimantom

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Primijetimo da linearni aproksimant l ima svojstvo

$$l(x_0) = f(x_0) \quad \& \quad l'(x_0) = f'(x_0). \tag{6.63}$$

Ako bismo željeli generalizirati ili proširiti uvjet (6.63) za n puta derivabilnu funkciju f, mogli bismo potražiti polinom n-tog stupnja

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_n)^n$$

koji će imati svojstva:

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0), \; \ldots, \; P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{6.64}$$

Lako se vidi da koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ polinoma P_n tada moraju biti

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \; \ldots, \; a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Polinom P_n s ovako definiranim koeficijentima nazivamo **Taylorov**[11] **polinom reda** n i označavamo s T_n. Dakle,

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned} \tag{6.65}$$

Primjer 6.48. *Odredimo Taylorove polinome u okolini točke $x_0 = 0$ reda $n = 1, 2, 3, 4, 5$ za funkciju $f(x) = \sin x$.*

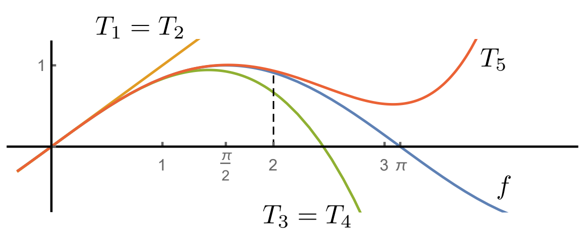
Najprije izračunajmo derivaciju funkcije f u točki $x_0 = 0$.

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$	$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$	$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$	$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = 1$

Sada imamo:

$$T_1(x) = T_2(x) = x, \;\; T_3(x) = T_4(x) = x - \tfrac{1}{3!}x^3, \;\; T_5(x) = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5.$$

Pripadni grafovi ovih polinoma prikazani su na *Slici 6.32*.



Slika 6.32: *Aproksimacija funkcije $x \mapsto \sin x$ Taylorovim polinomima T_1, T_3, T_5*

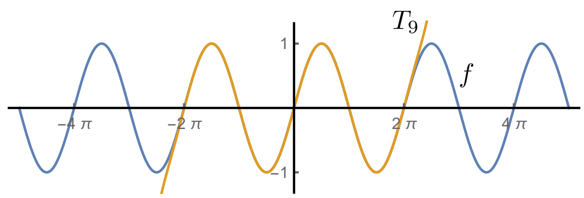
Sada je lako napisati i polinom $(2n-1)$-vog reda za funkciju $f(x) = \sin x$:

$$T_{2n-1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

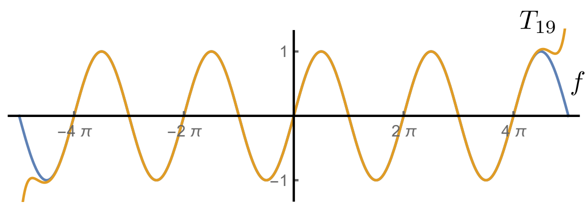
Na *Slici 6.33* prikazani su grafovi polinoma T_9 i T_{19}.

[11] Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar, učenik i sljedbenik I. Newtona

(a) T_9



(b) T_{19}



Slika 6.33: *Aproksimacija funkcije* $x \mapsto \sin x$ *Taylorovim polinomima* T_9, T_{19}

Zadatak 6.42. *Odredite Taylorov polinom n-tog reda u okolini točke $x_0 = 0$ za sljedeće funkcije:*
a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, *b)* $f(x) = e^x$, *c)* $f(x) = \ln(1 + x)$.

Prirodno je postaviti ovakvo pitanje:

> *ako u okolini točke x_0 funkciju f aproksimiramo Taylorovim polinomom n-tog reda i ako za neki x u blizini x_0 izračunamo $T_n(x)$, kolika je greška aproksimacije*
>
> $$E_n(x) = f(x) - T_n(x)? \tag{6.66}$$

Odgovor na ovo pitanje dat ćemo u sljedećoj točki.

6.5.2 Taylorov red funkcije

Znamo da je suma reda potencija neprekidna beskonačno puta derivabilna funkcija u intervalu konvergencije reda (*Korolar 6.4*). Postavimo obrnuto pitanje:

> *kada možemo tvrditi da se neka funkcija f može napisati kao suma nekog reda potencija?*

Odmah je jasno da ta funkcija f mora biti beskonačno puta derivabilna. Kao što ćemo vidjeti kasnije (*Primjer 6.49*), to neće biti i dovoljno.

Ponavljajući postupak iz *Poglavlja 6.5.1* za $n \to \infty$ dobivamo **Taylorov red** funkcije f u okolini točke x_0:

$$\begin{aligned} T(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Mogu se postaviti sljedeća pitanja:

1. Konvergira li Taylorov red T neke funkcije f za neki $x \in \mathbb{R}$?
2. Je li $T(x) = f(x)$?

Sljedeći primjer pokazuje da Taylorov red u okolini 0 jedne beskonačno puta derivabilne funkcije f za neki x blizu 0 ne konvergira prema $f(x)$, tj. nije moguće prikazati svaku funkciju Taylorovim redom.

Primjer 6.49. *Zadana je funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ova funkcija je derivabilna za svaki $x \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Za $k = 1$: $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{z:=\frac{1}{x}}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^{z^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2ze^{z^2}} = 0.$$

Za $k = 2$:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{z:=\frac{1}{x}}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{2z^4}{e^{z^2}} \overset{L'H}{=} 0, \quad \text{itd.}$$

Dakle, Taylorov red ove funkcije u okolini 0 je $T(x) \equiv 0$ i ne predstavlja funkciju f.

Da bi Taylorov red (6.67) u točki x konvergirao prema vrijednosti funkcije $f(x)$, mora biti

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - T_n(x)] = 0, \tag{6.68}$$

gdje je T_n Taylorov polinom reda n, a E_n **greška aproksimacije** ili **ostatak** Taylorovog reda.

Teorem 6.14 (Taylorov teorem). *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ puta derivabilna funkcija i neka je $x_0 \in (a, b)$. Tada za svaki $x \in (a, b)$ postoji neka točka ξ između x_0 i x, takva da je*

$$E_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{6.69}$$

Formulu (6.69) inače zovemo **Taylorov ostatak u Lagrangeovom obliku**. Dokaz *Teorema 6.14* može se vidjeti u [7], str. 208.

Sada Taylorov red funkcije f u okolini točke x_0 pišemo kao

$$T(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{6.70}$$

i zovemo **Taylorova formula n-tog reda za funkciju f u točki** x_0.

Primjedba 6.27. *Specijalno, za $n = 0$ Taylorova formula daje Lagrangeovu formulu (6.49, str. 167).*

Primijetimo također da formula (6.69) za ostatak (odnosno grešku aproksimacije) $E_n(x)$ ne daje mogućnost direktnog računanje te greške jer broj ξ nije poznat, ali zato daje vrlo dobru mogućnost ocjene greške jer je ξ između x_0 i x.

Često puta je korisno Taylorovu formulu (6.70) napisati tako da uvedemo supstituciju $h := x - x_0$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \tag{6.71}$$

pri čemu je $\xi = x_0 + \vartheta h$ za neki $\vartheta \in (0, 1)$.

Teorem 6.15. *Ako su u nekoj okolini $\mathcal{O}(x_0)$ točke x_0 apsolutne vrijednosti svih derivacija funkcije f ograničene jednim te istim brojem M, onda na toj okolini Taylorov red funkcije f u svakoj točki x konvergira prema $f(x)$.*

Dokaz. Treba dokazati da za svaki $x \in \mathcal{O}(x_0)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |E_n(x)| = 0. \tag{6.72}$$

Kako je

$$E_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

gdje je ξ između x i x_0, dakle $\xi \in \mathcal{O}(x_0)$, onda vrijedi:

$$|E_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)||x-x_0|^{n+1} \le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Budući da niz $\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ (vidi *Primjer 3.36, str. 109*), slijedi (6.72). □

Primjedba 6.28. *Specijalno, za $x_0 = 0$ Taylorov polinom (red) funkcije nazivamo* Maclaurinov[12] *polinom (red) funkcije.*

Primjedba 6.29. *Za beskonačno puta derivabilnu funkciju f kažemo da je* analitička u točki *x_0 ako postoji interval (a, b) koji sadrži točku x_0 takav da njen Taylorov red u točki x_0 konvergira broju $f(x)$ za svaki $x \in (a, b)$. Funkciju koja je analitička u svakoj točki svoje domene nazivamo* analitičkom funkcijom.

Primjer 6.50. *Za neke elementarne funkcije napišimo Taylorov (odnosno Maclaurinov) red.*

(i) *Eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$.*

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $f^{(k)}(x) = e^x$ i $f^{(k)}(0) = 1$. Zato su za proizvoljni $M > 0$ sve derivacije ove funkcije na segmentu $[-M, M]$ ograničene s e^M. Zato prema *Teoremu 6.15* Maclaurinov red ove funkcije konvergira prema e^x za svaki $x \in [-M, M]$, tj.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.73}$$

(ii) *Trigonometrijske funkcije $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$.*

Kako su apsolutne vrijednosti svih derivacija ovih funkcija ograničene s 1, njihovi Maclaurinovi redovi konvergiraju prema $\sin x$ [odnosno $\cos x$] za svaki $x \in \mathbb{R}$, tj.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.74}$$

[12] Colin Maclaurin (1698-1746) škotski matematičar, učenik i sljedbenik I. Newtona.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.75}$$

(iii) *Logaritamska funkcija* $f(x) = \ln(x+1)$.

Maclaurinov red logaritamske funkcije $x \mapsto \ln x$ ne možemo razmatrati jer ova funkcija nije definirana u 0. Zato promatramo funkciju $f(x) = \ln(x+1)$. Kako je $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$ i $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, Maclaurinov red konvergira i jednak je vrijednosti funkcije $f(x)$ za sve $x \in (-1, 1]$, tj.

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1] \tag{6.76}$$

Zašto Maclaurinov red ove funkcije ne konvergira za $x = -1$? Zašto ne konvergira za $|x| > 1$?

Zadatak 6.43. *Odredi Maclaurinov red i intervale konvergencije sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *b)* $f(x) = \operatorname{arctg} x$, *c)* $f(x) = e^{-x}$, *d)* $f(x) = \operatorname{ch} x$,
e) $f(x) = \operatorname{sh} x$, *f)* $f(x) = e^{x^2}$, *g)* $f(x) = e^x \sin x$.

Zadatak 6.44. *Odredi Maclaurinov red i interval konvergencije za funkcije*
a) $f(x) = \ln(1-x)$, *b)* $f(x) = \arcsin x$, *c)* $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Primjedba 6.30. *Taylorovim (odnosno Maclaurinovim) polinomom možemo aproksimirati neke funkcije i na taj način jednostavno (korištenjem samo 4 računske operacije) izračunati njihove vrijednosti uz željenu točnost. U nekim situacijama (primjerice transcedentne funkcije) to je i jedini način kako to možemo uraditi.*

Za primjer aproksimirat ćemo funkciju $x \mapsto \sin x$ s jednim, dva ili tri člana različita od nule iz Maclaurinovog reda:

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx x = T_1(x), & |E_1(x)| &< \tfrac{x^3}{6} \\
\sin x &\approx x - \tfrac{x^3}{6} = T_3(x), & |E_3(x)| &< \tfrac{x^5}{120} \\
\sin x &\approx x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} = T_5(x), & |E_5(x)| &< \tfrac{x^7}{5040}.
\end{aligned}$$

aproksimacija	ϵ	interval (rad)	interval $(^o)$
T_1	0.1	$(-0.843, +0.843)$	$(-48^o, +48^o)$
T_1	0.01	$(-0.391, +0.391)$	$(-22^o, +22^o)$
T_1	0.001	$(-0.182, +0.182)$	$(-10^o, +10^o)$
T_1	0.0001	$(-0.084, +0.084)$	$(-4.8^o, +4.8^o)$
aproksimacija	ϵ	interval (rad)	interval $(^o)$
T_3	0.1	$(-1.644, +1.644)$	$(-94^o, +94^o)$
T_3	0.01	$(-1.037, +1.037)$	$(-59^o, +59^o)$
T_3	0.001	$(-0.413, +0.413)$	$(-24^o, +24^o)$
T_5	0.0001	$(-0.9, +0.9)$	$(-52^o, +52^o)$

Zadatak 6.45. *Izradite sličnu analizu aproksimacije funkcije* $x \mapsto \cos x$ *polinomima* T_0, T_2, T_4.

Primjer 6.51. *Ako bismo htjeli izračunati broj* $\ln 2$ *s točnošću* $\epsilon = 10^{-5}$ *pomoću Maclaurinovog reda funkcije* $x \mapsto \ln(1+x)$, *bilo bi potrebno uzeti čak* 100 000 *članova reda*

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Da bismo povećali efikasnost, za $x \in (-1,1)$ *promatrat ćemo funkciju*

$$x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \cdots . \qquad (*)$$

Primijetite da za $x \in (-1,1)$, *argument* $\frac{1+x}{1-x}$ *funkcije* $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$ *prima sve vrijednosti iz intervala* $(0,\infty)$. *Ako bismo htjeli izračunati* $\ln 2$, *u* $(*)$ *treba staviti* $x = \frac{1}{3}$,

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\right) + E_n.$$

Pri tome je

$$\begin{aligned} E_n &= 2\left(\tfrac{1}{2n+3}\cdot\tfrac{1}{3^{2n+3}} + \tfrac{1}{2n+5}\cdot\tfrac{1}{3^{2n+5}} + \cdots\right) \\ &< \tfrac{2}{(2n+3)3^{2n+3}}\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^4} + \cdots\right) = \tfrac{2}{(2n+3)3^{2n+3}}\cdot\tfrac{9}{8} = \tfrac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Za točnost aproksimacije $\epsilon = 10^{-5}$ *treba biti* $E_n < \epsilon$, *tj.*

$$\frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}} < \frac{1}{10^5} \;\Rightarrow\; 4(2n+3)3^{2n+1} > 10^5 \;\Rightarrow\; n \geq 4.$$

Dakle,

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}\right) \approx 0.693144$$

Točna vrijednost iznosi $\ln 2 = 0.6931471806\ldots$.

Primjedba 6.31. *Ako u (6.73) umjesto x formalno stavimo ix, dobivamo*

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \tfrac{ix}{1!} + \tfrac{(ix)^2}{2!} + \tfrac{(ix)^3}{3!} + \tfrac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\tfrac{x}{1!} - \tfrac{x^3}{3!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Koristeći (6.74) – (6.75) dobivamo poznatu Eulerovu[13] formulu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{6.77}$$

Analogno vrijedi

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{6.78}$$

Primijetimo još da iz (6.77) – (6.78) direktno slijedi

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} ix, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \operatorname{sh} ix. \tag{6.79}$$

Iz (6.77) dobivamo također

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1. \tag{6.80}$$

6.5.3 Primjena na ispitivanje ekstrema funkcije

Korištenjem Taylorove formule možemo napraviti korisnu generalizaciju dovoljnog uvjeta **B2**, str. 179 za egzistenciju lokalnog ekstrema dovoljno puta derivabilne funkcije.

Teorem 6.16. *Neka funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ u nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, koji sadrži točku $x_0 \in I$, ima $2n$-tu derivaciju. Ako je*

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0 \ \ \& \ \ f^{(2n)}(x_0) \neq 0, \tag{6.81}$$

onda funkcija f u točki x_0 postiže lokalni ekstrem, i to lokalni minimum ako je $f^{(2n)}(x_0) > 0$, odnosno lokalni maksimum ako je $f^{(2n)}(x_0) < 0$.

Dokaz. Primijetimo najprije da je x_0 kritična točka funkcije f.

Pretpostavimo da je $f^{(2n)}(x_0) > 0$. Zato postoji $H > 0$, takav da je $f^{(2n)}(x) > 0$ za svaki $x \in (x_0 - H, x_0 + H)$. Koristeći Taylorovu formulu za funkciju f u okolini točke x_0, za $h \in \mathbb{R}$, takav da je $x_0 + h \in (x_0 - H, x_0 + H)$, imamo:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}h^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}h^{2n},$$

[13] L. Euler (1707-1783) njemački matematičar

gdje je ξ između x_0 i x_0+h. Zbog (6.81) ostaje

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}h^{2n}.$$

Kako je $\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}h^{2n}>0$, onda je i $f(x_0+h)>f(x_0)$, pa funkcija f u točki x_0 postiže lokalni minimum. Druga tvrdnja dokazuje se analogno. □

Korolar 6.5. *Neka funkcija $f\colon I\to\mathbb{R}$ u nekom intervalu I, koji sadrži točku $x_0\in I$, ima $(2n+1)$-vu derivaciju. Ako je*

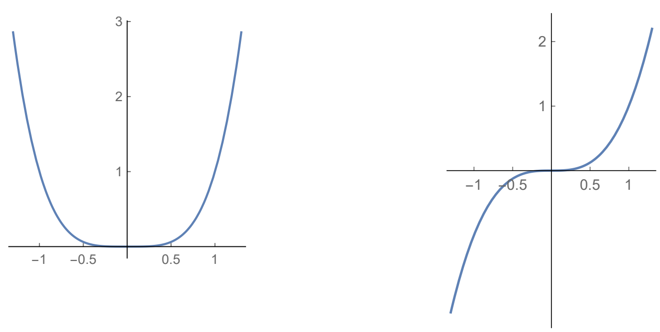
$$f'(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0 \;\;\&\;\; f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0 \tag{6.82}$$

onda je x_0 točka infleksije funkcije f.

Dokaz. Ova tvrdnja direktno slijedi iz *Teorema 6.11, str. 184* i *Teorema 6.16.* □

Primjer 6.52. *Na osnovi* Teorema 6.16 *i* Korolara 6.5 *ispitajmo lokalne ekstreme, odnosno točke infleksije funkcije $f(x)=x^4$ i $g(x)=x^5$.*

(a) $f(x)=x^4$ (b) $g(x)=x^5$



Slika 6.34

Kako je $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f'''(x)=24x$, $f^{(4)}(x)=24$, točka $x_0=0$ je kritična točka funkcije f, a kako je prva po redu derivacija, koja je različita od nule u točki x_0 parnog reda, onda funkcija f u točki x_0 ima lokalni ekstrem. Kako je osim toga, $f^{(4)}(0)=24>0$, funkcija f u točki $x_0=0$ postiže lokalni minimum (vidi *Slika 6.34a*).

Kako je $g'(x)=5x^4$, $g''(x)=20x^3$, $g'''(x)=60x^2$, $g^{(4)}(x)=120x$, $g^{(5)}(x)=120$, točka $x_0=0$ je kritična točka funkcije g, a kako je prva po redu derivacija u točki x_0, koja je različita od nule u točki x_0, neparnog reda, onda je 0 točka infleksije funkcije g (vidi *Sliku 6.34b*).

Primjer 6.53. *U* Primjeru 6.32*, str. 177 pokazali smo da su kritične točke funkcije* $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$*, zadane s* $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ *sljedeće:* $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{3}$*. Na osnovi* Teorema 6.16 *i* Korolara 6.5 *ispitat ćemo sve tri kritične točke.*

Lako se može provjeriti da vrijedi

$$f''(x) = -\sin x - 2\sin 2x = -\sin x(1 + 4\cos x).$$

Kako je $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, dobivamo

$$f''(x_1) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0, \qquad f''(x_0) = 0, \qquad f''(x_3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Na osnovi *Teorema 6.16* zaključujemo da ova funkcija postiže lokalni maksimum u točki $x_1 = \frac{\pi}{3}$, odnosno lokalni minimum u točki $x_3 = \frac{5\pi}{3}$.

Kako je $f'''(x) = -\cos x - 4\cos 2x$ i $f'''(x_2) = -3$, prema *Korolara 6.5* zaključujemo da u točki $x_2 = \pi$ ova funkcija ima točku infleksije. Graf ove funkcije prikazan je na *Slici 6.18b*, str. 177.

Ispitajte još i rubne točke 0 i 2π.

Primjer 6.54. *Ispitajmo tok funkcije* $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

A. Prirodno područje definicije je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Intervali neprekidnosti su $(-\infty,-1)$ i $(-1,+\infty)$.
Kako je $\lim\limits_{x\to-1-} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to-1+} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$, pravac $x = -1$ je vertikalna asimptota.
Pronađimo kose (što uključuje i horizontalne) asimptote. Imamo

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$l = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -5.$$

Dakle, pravac $y = x - 5$ je kosa asimptota. Funkcija nema horizontalne asimptote.
Graf funkcije f siječe os x u točki $(1,0)$, a os y u točki $(0,-1)$.
Funkcija nije ni parna, ni neparna, a nije ni periodična.

B. Kako je $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$, imamo dvije kritične točke $x_1 = 1$ i $x_2 = -5$.

- Kako je prema (6.53)

$$f''(x_1) = \left[\frac{3x^2 + 6x - 9}{(x+1)^3}\right]_{x=1} = 0,$$

računamo sljedeću derivaciju u x_1:

$$f'''(x_1) = \left[\frac{6x+6}{(x+1)^3}\right]_{x=1} = \tfrac{12}{2^3} \neq 0.$$

Prema *Korolaru 6.5*, u točki $T(1,0)$ je točka infleksije grafa funkcije f.

- Za drugu kritičnu točku $x_2 = -5$ vrijedi

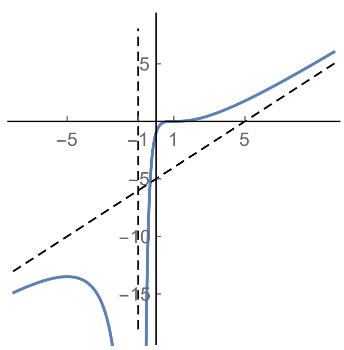
$$f''(x_2) = \left[\frac{3x^2+6x-9}{(x+1)^3}\right]_{x=-5} = -\tfrac{36}{64} < 0,$$

što znači da funkcija f u točki $x_2 = -5$ postiže lokalni maksimum. Označimo točku maksimuma s $M(-5, -\frac{27}{2})$.

Intervali rasta su $(-\infty, -5)$ i $(-1, +\infty)$, a interval pada funkcije je $(-5, -1)$.

C. Funkcija je konveksna na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$, a konkavna na intervalu $(-1, 1)$.

Graf funkcije prikazan je na *Slici 6.35*.



Slika 6.35: *Graf funkcije* $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

Zadatak 6.46. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)^n$, $a \in \mathbb{R}$. *Na osnovi* Teorema 6.16 *i* Korolara 6.5 *ispitajte lokalne ekstreme i točke infleksije u slučaju ako je n paran i u slučaju ako je n neparan prirodan broj.*

Zadatak 6.47. *Može li se na osnovi* Teorema 6.16 *i* Korolara 6.5 *ispitati kritična točka* $x_0 = 0$ *funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadane s*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} ?$$

Ako se to ne može tako uraditi, što drugo preostaje?

Poglavlje 7

Linearna algebra

7.1 Vektori u prostoru

Pojednostavljeno rečeno, vektori su veličine koje imaju iznos i smjer. Oni nam služe za potpuno određenje mnogih fizikalnih veličina kao što su primjerice pomak, brzina, ubrzanje, sila, itd.

7.1.1 Pojam vektora

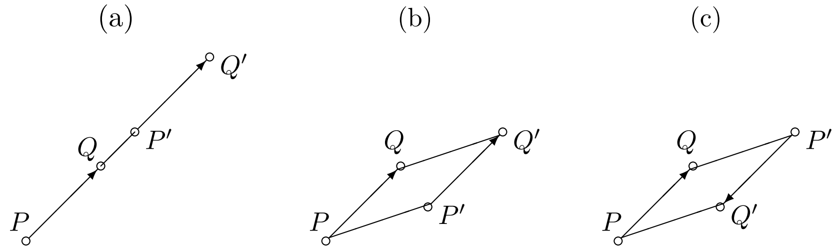
Usmjerena dužina. Neka su P i Q ($P \neq Q$) dvije točke prostora. Dužinu $\overline{PQ}$ kojoj je jedna rubna točka proglašena za početak (hvatište), a druga za kraj (vrh) zovemo **usmjerena dužina**. Usmjerenu dužinu kojoj je P početak, a Q kraj označavamo s $\overrightarrow{PQ}$ i prikazujemo strelicom kao na *Slici 7.1*. Pri tome kažemo da usmjerena dužina $\overrightarrow{PQ}$ ima **smjer** od P prema Q.

Svaku točku P također smatramo usmjerenom dužinom $\overrightarrow{PP}$ koja ima početak i kraj u istoj točki P. Njena duljina je nula i nema smisla govoriti o njenom smjeru.

Skup svih usmjerenih dužina prostora označavat ćemo s U^3.

Definicija 41. *Za dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{P'Q'}$ kažemo da su* ekvivalentne *i pišemo $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$ ako postoji translacija prostora koja točku P prevodi u P' i istovremenu točku Q u Q'.*

Tako su, primjerice, usmjerene dužine $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{P'Q'}$ prikazane na *Slikama 7.1a* i *7.1.b* ekvivalentne, dok usmjerene dužine $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{P'Q'}$ sa *Slike 7.1c* nisu ekvivalentne.



Slika 7.1:

Biti ekvivalentan u skupu svih usmjerenih dužina U^3 je relacija ekvivalencije (Provjerite!):

(i) $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PQ}$ za svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{PQ}$ (refleksivnost),

(ii) $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{PQ}$ (simetričnost),

(iii) $\left(\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \quad \& \quad \overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{TU}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{TU}$ (tranzitivnost).

Definicija 42. *Za svaku usmjerenu dužinu $\overrightarrow{PQ}$ klasu ekvivalencije*

$$\left[\overrightarrow{PQ}\right] = \{\overrightarrow{RS} \in U^3 : \overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{PQ}\}$$

svih usmjerenih dužina koje su ekvivalentne s $\overrightarrow{PQ}$ zovemo vektor*. Skup svih vektora označavat ćemo s V^3.*

Primjedba 7.1. *U fizici i tehnici za obilježavanje vektora koriste se strelice (primjerice $\vec{a}$, $\vec{b}$), dok se u matematičkoj literaturi često koriste masna slova (primjerice* **a**,**b***). U daljnjem prikazu služit ćemo se simbolom sa strelicom.*

Duljinu (**normu**, **iznos**) vektora $\vec{a} = [\overrightarrow{PQ}]$ označavamo s a ili $|\overrightarrow{PQ}|$ i definiramo kao duljinu dužine $\overline{PQ}$.

Primjedba 7.2. *Uočimo sljedeće važno svojstvo:*

> Ako je O proizvoljna točka prostora i $\vec{a}$ dani vektor onda postoji jedinstvena točka P takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$. Kažemo da je vektor $\vec{a}$ sveden na početak O.

U daljnjem tekstu vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{OP}]$ geometrijski ćemo predočivat s bilo kojom njegovim reprezentantom–usmjerenom dužinom, primjerice $\overrightarrow{OP}$.

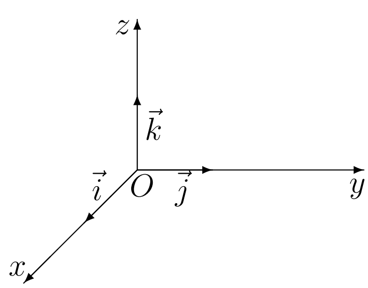
Za dva ili više vektora kažemo da su **kolinearni** ako njihovi reprezentanti leže na istom ili paralelnim pravcima. Tri ili više vektora nazivamo **komplanarnim** ako njihovi reprezentanti leže u istoj ili u paralelnim ravninama.

Za vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{PQ}]$, vektor $[\overrightarrow{QP}]$ zovemo **suprotni vektor** vektora $\vec{a}$ i označavamo ga s $-\vec{a}$.

Vektor čiji reprezentant ima i početak i kraj u jednoj te istoj točki, tj. vektor $[\overrightarrow{PP}]$ zovemo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$. Njegova duljina je nula i nema smisla govoriti o njegovom smjeru.

Svaki vektor kome je duljina jednaka broju jedan nazivamo **jediničnim vektorom**.

Primjer 7.1. *Jedinični vektori koji imaju smjer pozitivnog smjera pravokutnih koordinatnih osi x, y, z redom se označavaju s $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (vidi* Sliku 7.2*). Ti nekomplanarni vektori od naročitog su značaja za definiranje i efikasno izvođenje operacija s vektorima.*



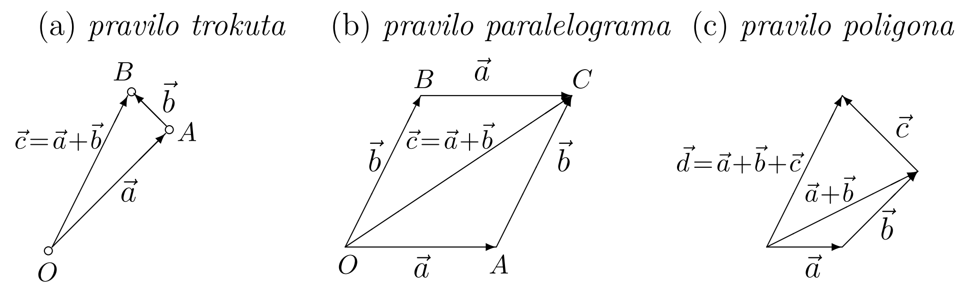
Slika 7.2

7.1.2 Operacije s vektorima

Zbrajanje vektora. Dva vektora zbrajamo po *pravilu trokuta* ili *pravilu paralelograma*, a više njih po *pravilu poligona*.

Pravilo trokuta. Definirajmo zbroj $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. U tu svrhu izaberimo proizvoljnu točku O i odredimo točke A i B takve da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{AB}]$ (na kraj vektora $\vec{a}$ sveli smo početak vektora $\vec{b}$; vidi *Sliku 7.3a*). Prema *Primjedbi 7.2* to je moguće. Vektor $\vec{c} = [\overrightarrow{OB}]$

zovemo **zbrojem vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Može se pokazati da vektor $\vec{c}$ ne ovisi o izboru točke O.



Slika 7.3: Pravila za zbrajanje vektora

Pravilo paralelograma. Izaberimo proizvoljnu točku O i odredimo točke A i B takve da je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{AB}]$ (vidi *Sliku 7.3b*). Nadopunjavanjem do paralelograma dobivamo točku C. Vektor $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$ zovemo **zbrojem vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Primijetite sa *Slike 7.3b* da su navedena dva pravila za zbrajanje vektora ekvivalentna.

Pravilo poligona. Zbroj $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ od tri vektora definira se kao vektor $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. Vektor $\vec{d}$ dobiva se jednostavnom geometrijskom konstrukcijom (*Slika 7.3c*): na kraj vektora $\vec{a}$ nanesemo početak vektora $\vec{b}$, a zatim na kraj vektora $\vec{b}$ nanesemo početak vektora $\vec{c}$. Početak vektora $\vec{d}$ podudara se s početkom vektora $\vec{a}$, a kraj s krajem vektora $\vec{c}$. Na isti način određuje se zbroj $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n}$ od n vektora. Ova konstrukcija, koja predstavlja generalizaciju pravila trokuta, poznata je pod nazivom pravilo poligona.

Zbrajanje vektora ima sljedeća četiri svojstva koja nam govore da je $(V^3,+)$ aditivna komutativna grupa:

(V1) asocijativnost: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, za sve vektore $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,

(V2) postoji vektor $\vec{0}$ takav da je $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ za svaki vektor $\vec{a}$. Vektor $\vec{0}$ je nulvektor i nazivamo ga neutralnim elementom za zbrajanje,

(V3) za svaki vektor $\vec{a}$ postoji vektor $\vec{a'}$ takav da je $\vec{a}+\vec{a'}=\vec{a'}+\vec{a}=\vec{0}$. Vektor $\vec{a'}$ je suprotni vektor vektora $\vec{a}$, tj. $\vec{a'}=-\vec{a}$, (V4) komutativnost: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, za sve vektore $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Budući da je $\vec{0}=[\overrightarrow{PP}]$ za svaku točku P, svojstva (V2) i (V3) lako je provjeriti iz definicije zbrajanja vektora. Valjanost svojstva (V4) vidi se sa *Slike 7.3b*. Svojstvo asocijativnosti može se provjeriti na *Slici 7.3c*. U tu svrhu dovoljno je sliku nadopuniti s vektorom $\vec{b}+\vec{c}$ tako da mu hvatište bude u vrhu vektora $\vec{a}$.

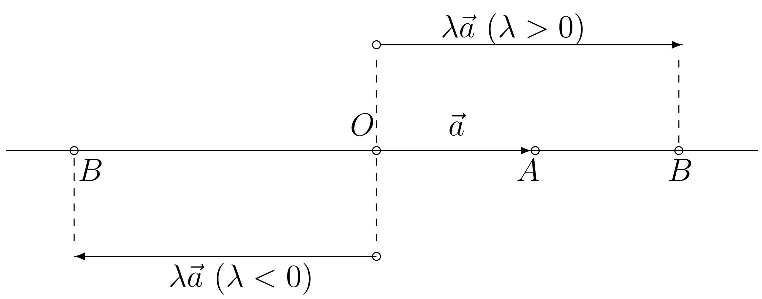
Množenje vektora skalarom. U vektorskoj algebri uobičajeno je realne i kompleksne brojeve zvati skalarima i označavati ih malim grčkim slovima. Produkt $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ skalara λ s vektorom $\vec{a}$ definira se ovako:

Ako je $\vec{a}=\vec{0}$ ili $\lambda=0$, onda se definira $\lambda\vec{a}=\vec{0}$. Ako je $\vec{a}\neq\vec{0}$ i $\lambda\neq 0$, onda prvo odaberimo točke O i A takve da je $\vec{a}=[\overrightarrow{OA}]$, a zatim na pravcu kroz točke O i A pronađimo točku B takvu da vrijedi (*Slika 7.4*):

1. $d(O,B)=|\lambda|\cdot d(O,A)$, gdje je d obična euklidska udaljenost,
2. B leži na istoj strani u odnosu na točku O kao i točka A za $\lambda>0$, odnosno na suprotnoj strani ako je $\lambda<0$.

Po definiciji stavljamo $\vec{b}=[\overrightarrow{OB}]$.

Dakle, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ imaju isti smjer ako je $\lambda>0$, a suprotnog su smjera za $\lambda<0$.



Slika 7.4: Množenje vektora sa skalarom

Može se pokazati (vidi [20], str. 5) da množenje vektora skalarima ima sljedeća svojstva:

(V5) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, za sve vektore $\vec{a},\vec{b}$ i za svaki skalar λ,

(V6) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$, za sve skalare λ,μ i za svaki vektor $\vec{a}$,

(V7) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$, za sve skalare λ,μ i za svaki vektor $\vec{a}$,

(V8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$, za svaki vektor $\vec{a}$.

Skup V^3 svih vektora prostora snabdjeven računskim operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom koje imaju spomenuta svojstva nazivamo **vektorski prostor**.

7.1.3 Linearna kombinacija vektora. Baza u V^3

Za zadane vektore $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ i skalare $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ vektor

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$$

nazivamo **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ s koeficijentima $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Skup svih linearnih kombinacija vektora $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ označavat ćemo s $L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$.

Primjer 7.2. *Ako je $\vec{a}\neq\vec{0}$, onda je $L(\vec{a})$ skup svih vektora kolinearnih s vektorom $\vec{a}$ (pravac). Ako su $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ nekolinearni, onda je $L(\vec{a},\vec{b})$ skup svih vektora koji leže u ravnini određenoj vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

Prikaz vektora $\vec{a}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ spada među važnije probleme vektorskog računa. Uvođenjem baze taj problem svodi se na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Krenimo redom. Prvo uvedimo pojam linearne nezavisnosti vektora.

Definicija 43. *Za vektore $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ kažemo da su* linearno zavisni *ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora. U suprotnom, tj. ako se ni jedan od njih ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih, za te vektore kažemo da su* linearno nezavisni.

Primjer 7.3. *Svaka tri nekomplanarna vektora su linearno nezavisni. Naime, svaki od ta tri vektora leži izvan ravnine određene s preostala dva vektora pa se on ne može prikazati kao njihova linearna kombinacija.*

Primjer 7.4. *Kolinearni vektori, kao i komplanarni, jesu linearno zavisni.*

Sljedeći teorem omogućava nam da ispitivanje linearne nezavisnosti vektora svedemo na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Teorem 7.1. *Vektori* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *su linearno zavisni onda i samo onda ako postoje skalari* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *takvi da je barem jedan od njih različit od nule, a da je pri tome*

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}. \tag{7.1}$$

Dokaz.
($\Longrightarrow$) Prema *Definiciji 43* barem jedan od vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ može se prikazati kao linearna kombinacija preostalih. Radi određenosti pretpostavimo da se vektor $\vec{a}_1$ može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora:

$$\vec{a}_1 = \mu_2 \vec{a}_2 + \cdots + \mu_n \vec{a}_n.$$

Tada za $\lambda_1 = 1 \neq 0$, $\lambda_i = -\mu_i$, $i = 2, \ldots, n$, vrijedi (7.1), tj. njihova linearna kombinacija iščezava na netrivijalan način.
($\Longleftarrow$) Neka postoje skalari λ_i, $i = 1, \ldots, n$, takvi da je barem jedan od njih različit od nule i da vrijedi (7.1). Radi određenosti neka je $\lambda_1 \neq 0$. Tada iz (7.1) dobivamo

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n,$$

tj. vektor $\vec{a}_1$ prikazali smo kao linearnu kombinaciju preostalih vektora. Dakle, vektori su linearno zavisni. □

Prije nego što definiramo bazu vektorskog prostora V^3 dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 7.2. *Neka su* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V^3$ *bilo koja tri linearno nezavisna vektora. Tada se svaki vektor* $\vec{a} \in V^3$ *može na jedinstven način prikazati kao njihova linearna kombinacija.*

Dokaz. Kao prvo, uočimo da su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ nekomplanarni (vidi *Primjer 7.3*). Neka su O, A_1, A_2, A_3 i P točke prostora takve da je $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{a}_3 = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ (vidi *Sliku 7.5*). S M označimo ravninu određenu vektorima $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$. Pravac kroz točku P koji je paralelan s vektorom $\vec{a}_3$ siječe ravninu M u točki P'. Nadalje, neka je $Q \in M$ sjecište pravca kroz P' koji je paralelan s vektorom $\vec{a}_2$ i koji leži u ravnini M. Sa slike se vidi da je

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P} = (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP'}) + \overrightarrow{P'P}. \tag{$\star$}$$

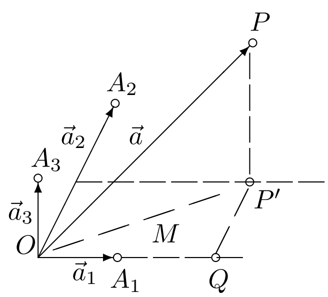
Budući da je vektor $\overrightarrow{OQ}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{QP'}$ s $\vec{a}_2$ i $\overrightarrow{P'P}$ s $\vec{a}_3$, postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ takvi da je

$$\overrightarrow{OQ} = \lambda_1 \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{QP'} = \lambda_2 \vec{a}_2, \quad \overrightarrow{P'P} = \lambda_3 \vec{a}_3. \tag{$\star\star$}$$

Sada iz ($\star$) dobivamo

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3, \tag{7.2}$$

odakle vidimo da se $\vec{a}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.



Slika 7.5: Rastava vektora $\vec{a}$ po vektorima $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

Pokažimo jedinstvenost rastava vektora $\vec{a}$ po sustavu vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Ako je $\vec{a} = \lambda_1'\vec{a}_1 + \lambda_2'\vec{a}_2 + \lambda_3'\vec{a}_3$ neki drugi rastav s koeficijentima $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$, onda oduzimanjem jednakosti (7.2) dobivamo

$$(\lambda_1' - \lambda_1)\vec{a}_1 + (\lambda_2' - \lambda_2)\vec{a}_2 + (\lambda_3' - \lambda_3)\vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, a prema *Teoremu 7.1* vrijedi $\lambda_1' - \lambda_1 = \lambda_2' - \lambda_2 = \lambda_3' - \lambda_3 = 0$, odakle slijedi jedinstvenost rastava. □

Korolar 7.1. *Svaka četiri vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ iz skupa V^3 linearno su zavisna.*

Dokaz. Ako su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linearno zavisni, tvrdnja vrijedi. Ako su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linearno nezavisni, onda se prema *Teoremu 7.1* vektor $\vec{a}_4$ može prikazati kao njihova linearna kombinacija, što daje tvrdnju korolara. □

Definicija 44. *Uređenu trojku $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ triju linearno nezavisnih vektora iz skupa V^3 nazivamo* bazom *skupa V^3.*

Neka je $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ baza u V^3 i $\vec{a} \in V^3$ bilo koji vektor. Prema *Teoremu 7.2* tada su jednoznačno određeni skalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ takvi da je

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3.$$

Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zovemo **komponente** ili **koordinate** vektora $\vec{a}$ u bazi $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Pri tome je λ_1 prva komponenta, λ_2 druga i λ_3 treća komponenta.

Zadatak 7.1. *Pokažite da su dva vektora* $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$, $\vec{b} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3$ *prikazana u istoj bazi* $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ *jednaka onda i samo onda ako je* $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$.

Pravokutne koordinate vektora. Za bazu u V^3 uzmimo jedinične vektore $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pravokutnog koordinatnog sustava (vidi *Primjer 7.1*). Ti vektori su linearno nezavisni (*Primjer 7.3*) i prema tome oni tvore jednu bazu u V^3.

Svaki vektor $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, gdje su $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, možemo rastaviti na vektore baze:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{7.3}$$

Koordinate a_x, a_y, z_z nazivamo **pravokutne koordinate** vektora $\vec{a}$.

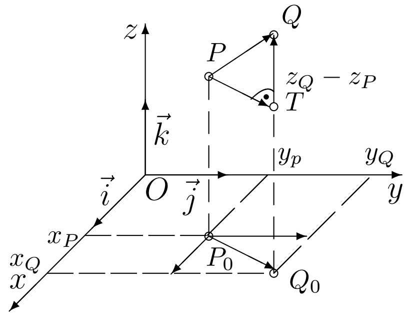
Sa *Slike 7.6* dobivamo:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{TQ} = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}.$$

Prema tome, zbog jedinstvenosti rastava po vektorima baze, pravokutne koordinate vektora $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ glase

$$a_x = x_Q - x_P, \quad a_y = y_Q - y_P, \quad a_z = z_Q - z_P. \tag{7.4}$$

Riječima: *Pravokutne kordinate vektora* $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ *dobivaju se tako da se od koordinata vrha* Q *oduzmu koordinate njegovog početka* P.



Slika 7.6: Pravokutne koordinate vektora $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$

Zadatak 7.2. *U pravokutnom koordinatnom sustavu zadan je vektor $\vec{a}$ svojim komponentama i hvatištem P. Nađite kraj Q vektora $\vec{a}$, ako je:*

$$\text{a) } a_x = 2, a_y = -3, a_z = 1, P(1, -2, 3),$$
$$\text{b) } a_x = 0, a_y = 1, a_z = 0, P(3, 3, 3).$$

Pomoću Pitagorina teorema sa *Slike 7.6.* dobivamo duljinu vektora $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$:

$$\begin{aligned} a = & \sqrt{d^2(P, T) + (z_Q - z_P)^2} = \sqrt{d^2(P_0, Q_0) + (z_Q - z_P)^2} \\ = & \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}. \end{aligned}$$

Odavde i iz (7.4) dobivamo duljinu vektora $\vec{a}$ pomoću njegovih pravokutnih koordinata:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Primjer 7.5. *Odredimo duljine sljedećih vektora:*
$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ *i* $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$.

$$a = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}, \quad b = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}.$$

Zadatak 7.3. *Za vektore* $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$ *odredite sljedeće vektore i njihove duljine:*
a) $2\vec{a} - 7\vec{b} + 4\vec{c}$, b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, c) $-3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Primjedba 7.3. *Izrazom (7.3) preko baze $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dana je bijekcija*

$$\vec{a} \mapsto (a_x, a_y, a_z)$$

skupa V^3 na skup $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ svih uređenih trojki realnih brojeva. Zbog toga vektor $\vec{a}$ možemo identificirati s njemu pridruženom trojkom (a_x, a_y, a_z). Pri tome operacije s vektorima možemo svesti na operacije s uređenim trojkama. Naime, množenjem jednakosti (7.3) skalarom λ dobivamo

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}.$$

Nadalje, zbrajanjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ dobivamo

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k},$$

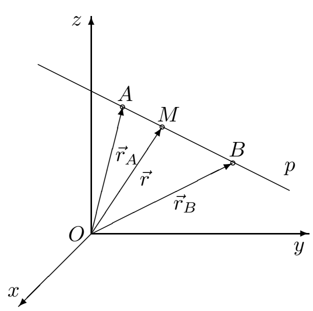
odakle dobivamo pravilo za množenje uređene trojke skalarom λ i pravilo za zbrajanje uređenih trojki:

$$\lambda \cdot (a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z),$$
$$(a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Primjer 7.6. *Neka su na pravcu p zadane točke $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$. Nadalje, pretpostavimo da točka $M(x, y, z) \in p$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ, tj. da je $\frac{d(AM)}{d(MB)} = \lambda$. Tada je $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. Ako s $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ označimo radijusvektore točaka A, B, M, onda je $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_A$, $\overrightarrow{MB} = \vec{r}_B - \vec{r}$. Sada jednakost $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ možemo zapisati kao $\vec{r} - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_B - \vec{r})$, odakle je*

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1 + \lambda}$$

ili po koordinatama: $x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$. Specijalno, za $\lambda = 1$ dobivamo koordinate polovišta dužine $\overline{AB}$:
$x = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y = \frac{y_A + y_B}{2}$, $z = \frac{z_A + z_B}{2}$.



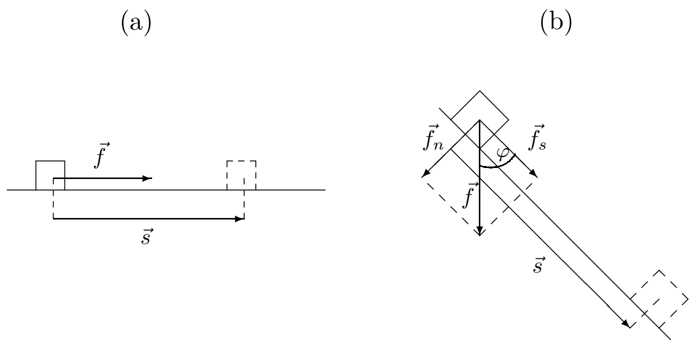
Slika 7.7: Dijeljenje dužine u zadanom omjeru

7.1.4 Skalarni produkt

Kao motivaciju za uvođenje ovog pojma razmotrimo problem radnje konstantne (po smjeru i iznosu) sile $\vec{f}$.

Ako se tijelo na koje djeluje sila $\vec{f}$ pomakne za vektor $\vec{s}$ u smjeru te sile (*Slika 7.8a*), onda se skalar $W := fs$ zove *radnja sile $\vec{f}$ na putu s.*

Na *Slici* 7.8b) prikazano je složenije gibanje tijela na kosini. U ovom slučaju konstantna sila $\vec{f}$ ne djeluje u smjeru pomaka $\vec{s}$, već s njim zatvara kut φ. Silu $\vec{f}$ možemo rastaviti na dvije komponente: na silu $\vec{f}_n$ koja je okomita na kosinu i na silu $\vec{f}_s$ u smjeru pomaka $\vec{s}$. U fizici je poznato da se sila $\vec{f}_n$ poništi sa silom reakcije podloge. Stoga je efekat isti kao da na tijelo djeluje samo sila $\vec{f}_s$ u smjeru pomaka $\vec{s}$ pa se u ovom slučaju radnja sile $\vec{f}$ definira kao skalar $W := f_s s$. Kako je $f_s = f \cos\varphi$, radnju sile $\vec{f}$ pri pomaku $\vec{s}$ možemo zapisati u obliku $W = f s \cos\varphi$.



Slika 7.8: Djelovanje sile na ravnom putu i na kosini

Motivirani problemom radnje sile definirat ćemo skalarni produkt vektora. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori prostora. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da oni imaju zajednički početak (*Primjedba 7.2*, str. 208).

Definicija 45. Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ *je skalar koji označavamo s* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *i definiramo ovako:*

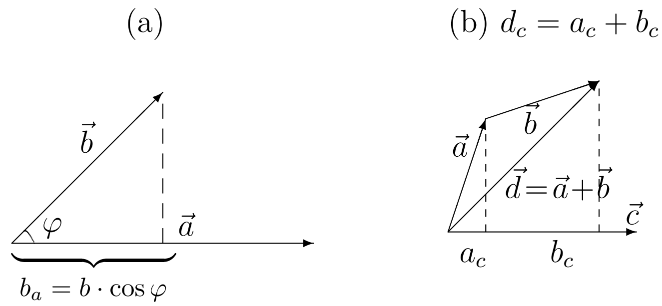
- *ako je jedan od vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *jednak nulvektoru, onda je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
- *ako su* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, *onda je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a \cdot b \cos\varphi, \tag{7.5}$$

gdje je φ *kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *takav da je* $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Iz definicijske formule vidimo da je skalarni produkt dvaju vektora jednak umnošku duljine jednog vektora i duljine projekcije drugog vektora na prvi vektor (vidi *Sliku 7.9a*). Dakle, ako s b_a označimo projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$, onda je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b_a = b\, a_b.$$



Slika 7.9: Skalarni produkt i projekcija vektora

Također, iz definicije neposredno slijedi da je skalarni produkt dvaju vektora različitih od nulvektora jednak nuli onda i samo onda ako su ti vektori međusobno okomiti, te da je $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ za svaki vektor $\vec{a} \in V^3$.

Primjer 7.7. *Za jedinične vektore pravokutnog koordinatnog sustava dobivamo sljedeću tablicu skalarnih umnožaka:*

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Funkcija $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b}$ sa $V^3 \times V^3$ u $\mathbb{R}$ zove se **skalarni produkt**. Ta funkcija ima sljedeća svojstva:

(S1) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$,

(S2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$,

Svojstva (S1)–(S2) poznata su pod nazivom pozitivna definitnost.

(S3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (simetričnost),

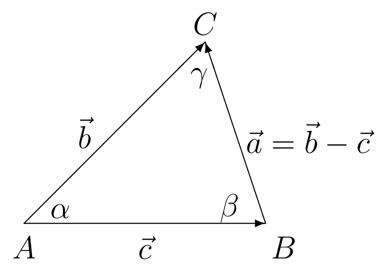
(S4) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (homogenost u prvom argumentu),

(S5) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (aditivnost u prvom argumentu).

Svojstva (S1) – (S4), lako je provjeriti pomoću definicijske formule (7.5). Valjanost svojstva (S5) možemo pokazati na sljedeći način. Neka je $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$. Kako za projekcije vektora vrijedi (*Slika 7.9b*) $d_c = a_c + b_c$, množenjem ovog izraza sa c dobivamo $d_c\, c = a_c\, c + b_c\, c$. Prema definiciji skalaranog produkta, to znači da je $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Primjer 7.8. *Neka su a, b, c duljine stranica, a α, β, γ nasuprotni kutovi kosokutnog trokuta ABC (* Slika 7.10*). Prema* **poučku o kosinusima** *tada je:*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Slika 7.10: Poučak o kosinusima

Dokažimo prvu jednakost. U tu svrhu definirajmo vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ kao na Slici *7.10. Tada je*

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

odakle dobivamo prvu jednakost. Na sličan način mogu se dokazati i preostale dvije jednakosti.

Pomoću svojstava skalarnog produkta i *Primjera 7.7* lako je dokazati sljedeću formulu koja nam daje skalarni produkt dvaju vektora pomoću njihovih komponenata u pravokutnom koordinatnom sustavu:

Ako je $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, onda je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{7.6}$$

Primjer 7.9. *Odredimo kut φ između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iz* Primjera 7.5, *str. 216:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (4) + (-1) \cdot (-4) = 0. \quad \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{0}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{41}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Vektori su okomiti.

Primjedba 7.4. *Svaki vektor možemo identificirati s uređenom trojkom realnih brojeva (*Primjedba 7.3*). Sada nam formula (7.6) omogućava definiranje skalarnog produkta uređenih trojki realnih brojeva, kao:*

$$(a_x, a_y, a_y) \cdot (b_x, b_y, b_z) := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Zadatak 7.4. *Nađite duljine stranica i veličine kutova trokuta s vrhovima* $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 2)$, $C(0, 3, 0)$.

7.1.5 Vektorski produkt

Za razliku od skalarnog produkta, vektorski produkt dvaju vektora je vektor, a ne broj. Vektorski produkt ima važnu primjenu u fizici i tehnici. Tako su, primjerice, moment veličine gibanja, moment sile i Lorentzova sila kojom magnetsko polje djeluje na naboj, opisani odgovarajućim vektorskim produktom.

Definicija 46. Vektorski produkt *vektora* $\vec{a}$ *s vektorom* $\vec{b}$ *je vektor* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *koji se definira ovako:*

1. *ako je jedan od vektora* $\vec{a}, \vec{b}$ *nulvektor, onda je* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
2. *ako su* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$*, onda*
   - *duljina vektora* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *jednaka je površini paralelograma što ga zatvaraju vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*, tj.* $c = ab \sin \varphi$*, gdje je* φ *kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*,*
   - *vektor* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *okomit je na ravninu određenu vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*,*
   - *smjer vektora* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *određen je* pravilom desnog vijka*: vektor* $\vec{a}$ *zakrećemo prema vektoru* $\vec{b}$*, za kut manji od* π rad. *Smjer vektora* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *definira se kao smjer kretanja desnog vijka.*

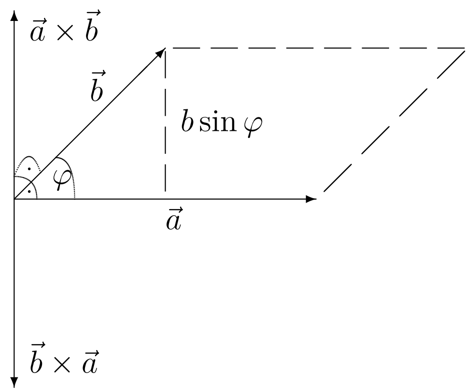
Primjedba 7.5. *Funkcija* $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b}$ *sa* $V^3 \times V^3$ *u* V^3 *zove se* **vektorski produkt**.

Iz definicije vektorskog produkta, s obzirom na određivanje smjera, zaključujemo da vektorski produkt ima svojstvo *antikomutativnosti*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

i *homogenosti*:

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$



Slika 7.11: *Vektorski produkti* $\vec{a}\times\vec{b}$ *i* $\vec{b}\times\vec{a}$

Primjer 7.10. *Za jedinične vektore pravokutnog koordinatnog sustava dobivamo:*

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Za vektorski produkt vrijede *zakoni distribucije prema zbrajanju* (vidi *Dodatak* 8.5):

$$\begin{gathered}(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\\ \vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}.\end{gathered}$$

Kao i skalarni produkt, tako i vektorski produkt dvaju vektora možemo izračunati pomoću njihovih komponenti u pravokutnom koordinatnom sustavu. Neka su $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ i $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ dva proizvoljna vektora. Koristeći svojstva vektorskog produkta i *Primjer 7.10* dobivamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k} \tag{7.7}$$

što pomoću determinante trećeg reda (vidi *Poglavlje* 7.5), koristeći razvoj po prvom retku, simbolički možemo pisati kao

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

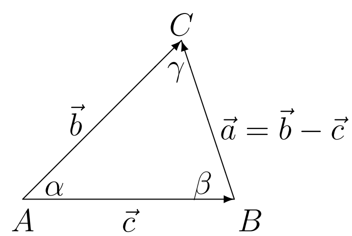
Primjer 7.11. *Neka su zadani vektori* $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. *Izračunajmo vektorske produkte* $\vec{a} \times \vec{b}$ *i* $\vec{b} \times \vec{a}$*:*

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k},$$

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Primjer 7.12. *Neka su* a, b, c *duljine stranica, a* α, β, γ *nasuprotni kutovi kosokutog trokuta* ABC *(* Slika 7.12*). Dokažimo* **poučak o sinusima***:*

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$



Slika 7.12: Poučak o sinusima

Definirajmo vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *kao na* Slici *7.12. Množenjem jednakosti* $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ *zdesna vektorski redom s* $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ *dobivamo:*

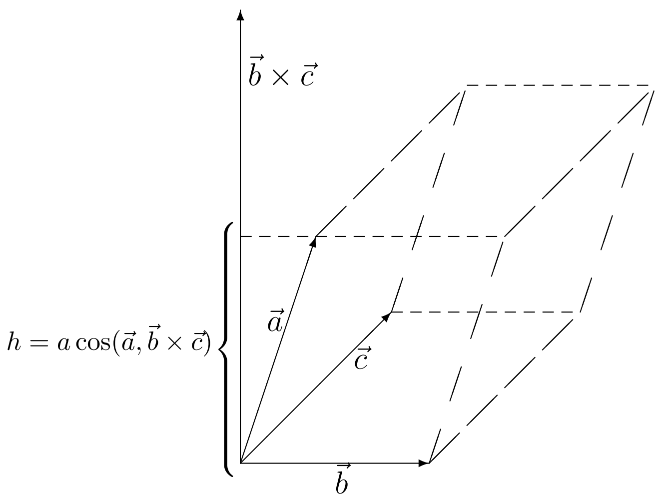
$$\begin{aligned} &\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \,/ \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{b} \times \vec{c}| \quad tj. \quad a\sin\beta = b\sin\alpha, \\ &\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \,/ \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{c}| \quad tj. \quad a\sin\gamma = c\sin\alpha, \\ &\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \,/ \times \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{c}| \quad tj. \quad b\sin\gamma = c\sin\beta. \end{aligned}$$

7.1.6 Mješoviti produkt

Produkt oblika $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, u kojem se pojavljuje i vektorski i skalarni produkt, zovemo **mješoviti produkt**. Rezultat takvog množenja je skalar.

Pokažimo kako se volumen prizme V može izračunati pomoću mješovitog produkta. U tu svrhu označimo bridove prizme s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, vodeći pri tome računa da vektorski produkt $\vec{b} \times \vec{c}$ ima smjer prema unutrašnjosti prizme, kao na *Slici* 7.13. Budući da norma $|\vec{b} \times \vec{c}|$ predstavlja površinu baze prizme (paralelogram razapet vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$) te da je $h = a\cos(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})$ visina prizme, to je

$$V = |\vec{b}\times\vec{c}|\ a\cos(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$



Slika 7.13: *Volumen prizme* $V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

Do istog rezultata možemo doći i tako da uzmemo druge baze prizme i pritom pazimo da vektorski produkt ima smjer prema unutrašnjosti prizme. To znači da vrijede ove jednakosti (dobivene cikličkom zamjenom: $\vec{a}\to\vec{b}\to\vec{c}\to\vec{a}$)

$$V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Pomoću (7.7) lako je provjeriti da se mješoviti produkt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ pomoću determinante može zapisati kao:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Zadatak 7.5. *Za vektore* $\vec{a} = 2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ *i* $\vec{c} = 2\vec{i}+3\vec{j}$ *nađite* $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ *i* $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$.

7.1.7 Višestruki produkt

Vektorski produkt vektora s vektorskim produktom zovemo **višestruki produkt**.

Primjedba 7.6. *Višestruki produkt nije asocijativan, tj. relacija*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

ne vrijedi za sve vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. *Primjerice, za* $\vec{a} = \vec{b} = \vec{j}$ *i* $\vec{c} = k$ *imamo*

$$(\vec{j} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}.$$

Međutim, za višestruki produkt vrijede sljedeće formule (vidi [20]):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \tag{7.8}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}. \tag{7.9}$$

Stavimo li $\vec{c} = \vec{a} \neq \vec{0}$ u (7.8), dobivamo

$$\vec{b} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{a^2}\vec{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}). \tag{7.10}$$

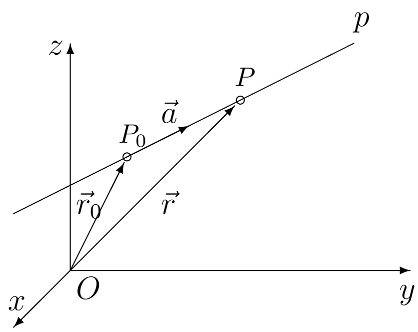
Formula (7.10) daje nam rastav vektora $\vec{b}$ na sumu dva vektora, od kojih jedan u smjeru, a drugi okomit na unaprijed zadani vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. U sljedećem poglavlju pomoću te formule odredit ćemo projekciju vektora na pravac i ravninu, kao i udaljenost točke od ravnine.

7.1.8 Pravac i ravnina u prostoru

Jednadžba pravca. Neka je p pravac u prostoru, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ točka na pravcu p i $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \neq \vec{0}$ vektor koji leži na pravcu p i ima početak u točki P_0 (vidi *Sliku 7.14*). Za svaku točku $P(x, y, z) \in p$ vektori $\vec{a}$ i $\overrightarrow{P_0P}$ jesu kolinearni. Stoga postoji skalar λ takav da je $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{a}$, pa je

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}, \tag{$\star$}$$

gdje je $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ i $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$.



Slika 7.14: Pravac u prostoru

Uspoređivanjem komponenti u ($\star$) dobivamo **parametarsku jednadžbu pravca** p:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\, a_x \\ y = y_0 + \lambda\, a_y \\ z = z_0 + \lambda\, a_z \end{array}\right. \tag{7.11}$$

Ako je $a_x \neq 0, a_y \neq 0$ i $a_z \neq 0$, onda eliminacijom parametra λ iz (7.11) dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca** p:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \tag{7.12}$$

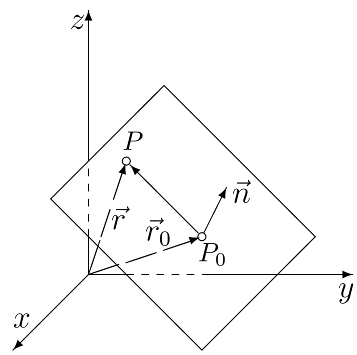
Ako je pravac p zadan točkama $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i $P_1(x_1, y_1, z_1)$, onda, uzimajući $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$, iz (7.11) dobivamo parametarsku jednadžbu pravca kroz dvije točke:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0), \end{array}\right.$$

a iz (7.12) odgovarajući kanonski oblik jednadžbe pravca:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Jednadžba ravnine. Neka je M ravnina u prostoru, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ čvrsta točka ravnine M i $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \neq \vec{0}$ vektor okomit na ravninu M s hvatištem u točki P_0 (vidi *Sliku 7.15*).



Slika 7.15: Ravnina u prostoru

Za svaku točku $P(x, y, z) \in M$ vektor $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ okomit je na vektor $\vec{n}$. Stoga je njihov skalarni umnožak jednak nuli, tj.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Uz oznaku $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, prethodna jednakost glasi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7.13}$$

i nazivamo je **općim oblikom jednadžbe ravnine** M.

Ako je $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ i $D \neq 0$, onda uz oznake $m = -\frac{D}{A}$, $n = -\frac{D}{B}$ i $p = -\frac{D}{C}$ iz (7.13) dobivamo **segmentni oblik jednadžbe ravnine** M:

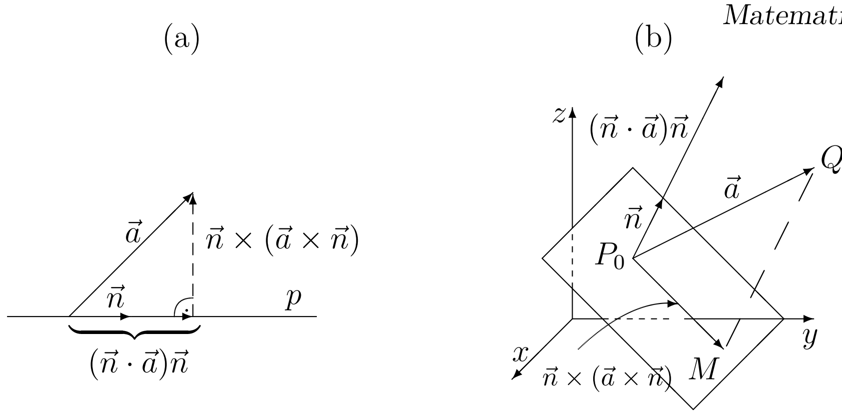
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Projekcija vektora na pravac. Neka je p pravac, $\vec{n}$ jedinični vektor koji leži na pravcu p i $\vec{a}$ vektor s istim hvatištem kao i $\vec{n}$ (*Slika 7.16a*).

Pomoću formule (7.10) dobivamo rastav vektora $\vec{a}$ na sumu dva vektora, od kojih jedan u smjeru, a drugi okomit na vektor $\vec{n}$:

$$\vec{a} = (\vec{n} \cdot \vec{a})\vec{n} + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}).$$

Pri tome je vektor $(\vec{n} \cdot \vec{a})\vec{n}$ kolinearan s vektorom $\vec{n}$ i on predstavlja **projekciju vektora $\vec{a}$ na pravac** p.



Slika 7.16: Projekcija vektora na pravac i ravninu

Projekcija vektora na ravninu. Neka je M ravnina, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ točka ravnine M, $\vec{n}$ jedinični vektor okomit na ravninu M i s hvatištem u točki P_0 i $\vec{a} = \overrightarrow{P_0Q}$ vektor (*Slika 7.16b*).

Formula (7.10) daje nam rastav vektora $\vec{a}$ na sumu dva vektora, od kojih jedan u smjeru, a drugi okomit na vektor $\vec{n}$:

$$\vec{a} = (\vec{n} \cdot \vec{a})\vec{n} + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}).$$

Vektor $\vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n})$ je okomit na vektor $\vec{n}$, leži u ravnini M i predstavlja **projekciju vektora $\vec{a}$ na ravninu M**.

Nadalje, $d = |(\vec{n} \cdot \vec{a})\vec{n}| = |\vec{n} \cdot \vec{a}|$ predstavlja udaljenost vrha vektora $\vec{a}$ (točke $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$) od ravnine M. Ako je jednadžba ravnine M zadana u općem obliku (7.13) i ako uzmemo da je

$$\vec{n} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad |\vec{n}| = 1,$$

dobivamo formulu za udaljenost d točke $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ od ravnine M, koja prolazi točkom $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i okomita je na vektor $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|A(x_Q - x_0) + B(y_Q - y_0) + C(z_Q - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

7.2 Vektorski prostori

U *Poglavlju 7.1* upoznali smo skup V^3 svih vektora u prostoru. Vektore znamo zbrajati i množiti ih skalarom, tj. na skupu V^3 definirane su dvije operacije: *zbrajanje vektora* i *množenje skalarom*. Zbrajanje vektora $(\vec{a},\vec{b}) \mapsto \vec{a}+\vec{b}$ je funkcija sa $V^3 \times V^3$ u V^3, a množenje skalarom $(\lambda,\vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}$ je funkcija sa $\mathbb{R} \times V^3$ u V^3. Te funkcije imaju svojstva (V1) – (V8) (vidi *Poglavlje 7.1.2*)

Osim skupa V^3, postoje i drugi skupovi na kojima možemo definirati zbrajanje(u oznaci $\oplus$) i množenje skalarima (u oznaci $\odot$), tako da te dvije operacije imaju ista algebarska svojstva kao zbrajanje i množenje sa skalarom na V^3. Stoga, umjesto da svaki od tih skupova izučavamo zasebno, ima smisla svrstati ih u istu kategoriju, kategoriju vektorskih prostora, i istovremeno ih izučavati.

Neka je K polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i V bilo koji neprazan skup. Nadalje, neka su definirane dvije funkcije

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}, \tag{7.14}$$
$$\odot : K \times V \to V, \quad (\lambda,\mathbf{x}) \mapsto \lambda \odot \mathbf{x}. \tag{7.15}$$

Funkciju $\oplus$ nazivamo **zbrajanje na V**, a funkciju $\odot$ **množenje skalarom**. Pretpostavimo da te dvije funkcije imaju ista algebarska svojstva kao zbrajanje i množenje skalarom na V^3, tj. da vrijedi:

(VP1) $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c})$, za sve $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V$,

(VP2) postoji element $\mathbf{0} \in V$ takav da je $\mathbf{a} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{a} = \mathbf{a}$ za sve $\mathbf{a} \in V$. Element $\mathbf{0}$ je neutralni element zbrajanja,

(VP3) za svaki $\mathbf{a} \in V$ postoji $\mathbf{a}' \in V$ takav da je $\mathbf{a} \oplus \mathbf{a}' = \mathbf{a}' \oplus \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Element $\mathbf{a}'$ je suprotni element elementa $\mathbf{a}$ i označava se s $\ominus\mathbf{a}$,

(VP4) $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$, za sve $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V$,

(VP5) $\lambda \odot (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = (\lambda \odot \mathbf{a}) \oplus (\lambda \odot \mathbf{b})$, za sve $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V$ i za sve $\lambda \in K$,

(VP6) $(\lambda + \mu) \odot \mathbf{a} = (\lambda \odot \mathbf{a}) \oplus (\mu \odot \mathbf{a})$, za sve $\lambda,\mu \in K$ i za sve $\mathbf{a} \in V$,

(VP7) $(\lambda\mu) \odot \mathbf{a} = \lambda \odot (\mu \odot \mathbf{a})$, za sve $\lambda,\mu \in K$ i za sve $\mathbf{a} \in V$,

(VP8) $1 \odot \mathbf{a} = \mathbf{a}$, za svaki $\mathbf{a} \in V$.

Definicija 47. *Neka je K polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Neprazan skup V snabdjeven funkcijama $\oplus : V \times V \to V$ i $\odot : K \times V \to V$ koje imaju svojstava*

(VP1) – (VP8) nazivamo vektorskim prostorom *nad poljem K, a njegove elemente* vektorima*. Elemente skupa K zovemo* skalarima*. Ako je $K = \mathbb{R}$, onda kažemo da je V* realan vektorski prostor*, a ako je $K = \mathbb{C}$, onda se kaže da je V* kompleksan vektorski prostor*.*

Element $\mathbf{0} \in V$ iz svojstva (VP2) zovemo **nulvektor**. Može se pokazati da je nulvektor jedinstven. Također, za svaki vektor $\mathbf{a} \in V$ jedinstven je suprotni vektor $(\ominus\mathbf{a})$.

Primjedba 7.7. *U definiciji vektorskog prostora koristili smo simbole „$\oplus$" za zbrajanje i „$\odot$" za množenje sa skalarom, tako da napravimo razliku od zbrajanja „$+$" i množenja „$\cdot$" realnih brojeva. Međutim, kada je jasno da se radi o zbrajanju na skupu V i množenju skalarom, umjesto simbola „$\oplus$" i „$\odot$" koristit ćemo simbole „$+$" i „$\cdot$".*

Primjer 7.13. *Skup $\mathbb{R}$ s uobičajenim zbrajanjem i množenjem je realan vektorski prostor. Također, skup $\mathbb{C}$ s uobičajenim zbrajanjem i množenjem je kompleksan vektorski prostor.*

Primjer 7.14. *Ako u skupu $\mathbb{R}^n$ svih uređenih n-torki realnih brojeva definiramo zbrajanje i množenje skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ na sljedeći način:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n),$$

dobivamo realan vektorski prostor. Primijetite da je nulvektor toga prostora $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Provjerite svojstva (VP1) – (VP8).

Slično, ako u skupu $\mathbb{C}^n$ svih uređenih n-torki kompleksnih brojeva definiramo zbrajanje i množenje kompleksnim brojem λ na već navedeni način, dobivamo kompleksan vektorski prostor.

Primjer 7.15. *Neka je $C([a, b])$ skup svih realnih funkcija definiranih i neprekidnih na segmentu $[a, b]$. Ako definiramo zbrajanje funkcija i množenje funkcije skalarom na prirodan način:*

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in [a, b],$$

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t); \quad t \in [a, b], \ \lambda \in \mathbb{R},$$

dolazimo do realnog vektorskog prostora čiji su elementi (vektori) funkcije.

Primjer 7.16. *Skup P_n svih polinoma stupnja $\leq n$, uz zbrajanje polinoma i množenje polinoma realnim brojem na prirodan način, je realan vektorski prostor.*

Primjer 7.17. *Skup $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ s operacijama zbrajanja i množenja skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ definiranim formulama:*

$$\begin{aligned} &x \oplus y = xy\,;\ \text{tj. zbrajanje vektora je obično množenje realnih brojeva,}\\ &\lambda \odot x = x^\lambda\,;\ \text{tj. množenje skalarom je potenciranje sa skalarom} \end{aligned}$$

je realan vektorski prostor.

Najprije uočimo da su obje operacije dobro definirane, tj. da je rezultat realan broj, a zatim provjerimo svojstva (VP1) – (VP8):

$$\begin{aligned}
&(VP1) && x \oplus (y \oplus z) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y) \oplus z,\\
&(VP2) && \textit{nulvektor } \mathbf{0} \textit{ je broj } 1: \quad 1 \oplus x = 1x = x, x \oplus 1 = x \cdot 1 = x,\\
&(VP3) && x^{-1} \textit{ je suprotni vektor vektora } x:\\
& && x \oplus x^{-1} = xx^{-1} = 1 = \mathbf{0}, x^{-1} \oplus x = x^{-1}x = 1 = \mathbf{0},\\
&(VP4) && x \oplus y = xy = yx = y \oplus x,\\
&(VP5) && \lambda \odot (x \oplus y) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y),\\
&(VP6) && (\lambda + \mu) \odot \mathbf{x} = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x),\\
&(VP7) && (\lambda\mu) \odot x = x^{\lambda\mu} = (x^\mu)^\lambda = \lambda \odot (\mu \odot x),\\
&(VP8) && 1 \odot x = x^1 = x.
\end{aligned}$$

Jasno, skup $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ s uobičajenim zbrajanjem „$+$” i množenjem „$\cdot$” realnih brojeva također je jedan realan vektorski prostor, ali različit od vektorskog prostora iz ovog primjera.

Kao što smo vidjeli na prethodnim primjerima, mnogi skupovi mogu se pretvoriti u vektorski prostor i to na razne načine. To znači da je definicija vektorskog prostora dovoljno elastična i općenita.

Zadatak 7.6. *Na jednočlanom skupu $V = \{a\}$ definirajte zbrajanje i množenje skalarom $\lambda \in \mathbb{C}$ na jedan jedini mogući način:*

$$a \oplus a = a, \quad \lambda \odot a = a.$$

Dobili ste trivijalan kompleksan vektorski prostor. Provjerite aksiome (VP1) – (VP8).

Zadatak 7.7. *Neka je* $V = \mathbb{R}^2$*. Definirajte zbrajanje na* V *i množenje skalarom* $\lambda \in \mathbb{R}$ *formulama*

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 - y_2),$$

$$\lambda \odot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Je li V *s ovako definiranim operacijama „*$\oplus$*" i „*$\odot$*" realan vektorski prostor? Ako nije, ispišite aksiome koji ne vrijede.*

Pojmovi definirani u *Poglavlju 7.1*, kao što su primjerice linearna kombinacija vektora, linearna nezavisnost vektora, baza vektorskog prostora ili skalarni produkt vektora, prirodno se poopćavaju u proizvoljnom vektorskom prostoru.

7.2.1 Linearna nezavisnost vektora. Baza vektorskog prostora

Linearnu kombinaciju kao i linearnu nezavisnost vektora prostora V^3 definirali smo u *Poglavlju 7.1.3*. Ti se pojmovi na isti način definiraju u proizvoljnom realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru V.

Definicija 48. *Neka su* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in V$ *i* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *skalari. Vektor*

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n$$

zovemo linearna kombinacija *vektora* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *s koeficijentima* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*.*

Primjer 7.18. *Neka su* $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 0)$*,* $\mathbf{a}_2 = (3, 0, 2, 1)$*,* $\mathbf{a}_3 = (1.1, 1, 1, 1)$ *i* $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 0, 0)$ *vektori prostora* $\mathbb{R}^4$*. Tada je vektor* $\mathbf{a} = 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_4 = (10.1, -4, 13, 4)$ *jedna njihova linearna kombinacija.*

Općenito, pomoću vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ možemo napraviti beskonačno mnogo linearnih kombinacija tih vektora. Za neprazan podskup S vektorskog prostora V, sa $L(S)$ označavamo skup svih linearnih kombinacija elemenata iz S. Skup $L(S)$ je **potprostor** vektorskog prostora V, tj. $L(S)$ je također vektorski prostor s obzirom na operacije zbrajanja i množenja skalarom koje su definirane u V. Ako je $L(S) = V$, tj. ako se svaki vektor $x \in V$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz skupa S, onda kažemo da skup S **generira** vektorski prostor V. Nadalje, za vektorski prostor V kažemo da je **konačno dimenzionalan** ako postoji barem jedan konačan skup vektora koji ga generira. U suprotnom, vektorski prostor je **beskonačno dimenzionalan**. Mi ćemo nadalje na umu imati samo konačno dimenzionalne vektorske prostore.

Primjer 7.19. *Vektorski prostor* $C([a,b])$ *iz* Primjera 7.15 *je beskonačno dimenzionalan (vidi primjerice [19]), dok su vektorski prostori* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$ *konačno dimenzionalni (vidi* Primjer 7.21*).*

Definicija 49. *Za vektore* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *kažemo da su* linearno zavisni *ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora. U suprotnom, tj. ako se ni jedan vektor ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih, za te vektore kažemo da su* linearno nezavisni*.*

Primjer 7.20. *Vektori* $\mathbf{a}_1 = (1,-1,2)$*,* $\mathbf{a}_2 = (2,1,1)$ *i* $\mathbf{a}_3 = (0,-3,3)$ *prostora* $\mathbb{R}^3$ *su linearno zavisni jer je* $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$*.*

Primjer 7.21. *U izučavanju vektorskog prostora* $\mathbb{R}^n$*, odnosno* $\mathbb{C}^n$ *važnu ulogu imaju linearno nezavisni vektori* $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$*. Ti vektori generiraju prostore* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$*. Naime, svaki vektor* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *može se prikazati kao njihova linearna kombinacija:*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Sljedeći teorem, dokaz kojega je napravljen u *Poglavlju 7.1.3*, govori nam da su vektori linearno zavisni onda i samo onda ako se nulvektor može prikazati kao njihova netrivijalna linearna kombinacija, tj. tako da je barem jedan koeficijent te linearne kombinacije različit od nule.

Teorem 7.3. *Vektori* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *su linearno zavisni onda i samo onda ako postoje skalari* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *takvi da je barem jedan od njih različit od nule, a da je pri tome*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \tag{7.16}$$

Primjedba 7.8. *Uočimo (negacijom prethodnog teorema) da su vektori* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *linearno nezavisni onda i samo onda ako iz jednakosti*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

slijedi da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$*.*

Primjer 7.22. *Ispitajmo linearnu nezavisnost vektora* $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 5, 7)$ *i* $\mathbf{a}_3 = (3, 7, 11)$ *iz prostora* $\mathbb{R}^3$*:*
Jednakost $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ *možemo zapisati u obliku*

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3, 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + 11\lambda_3) = (0, 0, 0),$$

odakle uspoređivanjem koordinata dobivamo sustav:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 7\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & 7\lambda_2 & + & 11\lambda_3 & = & 0. \end{array}$$

Ako trećoj jednadžbi dodamo prve dvije jednadžbe prethodno pomnožene s (-1), *dobivamo* $\lambda_3 = 0$. *Sada prvu jednadžbu pomnožimo s* (-2) *i dodajmo drugoj. Dobivamo* $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, *odakle je i* $\lambda_2 = 0$. *Konačno, iz prve jednadžbe slijedi* $\lambda_1 = 0$. *Dakle, vektori* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ *su linearno nezavisni.*

Zadatak 7.8. *Pokažite:*
a) linearnu zavisnost vektora $(1, 0, 1), (2, 0, 3), (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$,
b) linearnu nezavisnost vektora $(1, 0, -1, 1, 2)$, $(0, 1, 1, 2, 3)$, $(1, 1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^5$.

Zadatak 7.9. *Neka su* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ *vektori iz prostora* V *i* λ, μ $(\lambda \neq 0)$ *bilo koji skalari. Dokažite sljedeće tvrdnje:*

a) Vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *su linearno nezavisni onda i samo onda ako su linearno nezavisni vektori* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \lambda\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$.

b) Vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *su linearno nezavisni ako i samo ako ako su linearno nezavisni vektori* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$, $\mathbf{a}_i + \mu\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ *za svaki* $j \neq i$.

Zadatak 7.10. *Neka su* $\mathbf{x}_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, \ldots, k$, *vektori prostora* $\mathbb{R}^n$, *odnosno* $\mathbb{C}^n$ *i* $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *bilo koja permutacija skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pokažite da su vektori $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, k$, *linearno nezavisni ako i samo ako ako su linearno nezavisni vektori* $\mathbf{x}'_i = (x_{j_1}^i, x_{j_2}^i, \ldots, x_{j_n}^i)$, $i = 1, \ldots, k$. *Drugim riječima, ako istovremeno i na isti način permutiramo komponente kod svih vektora, linearna nezavisnost neće se promijeniti.*

Zadatak 7.11. *Neka su* $\mathbf{x}_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, \ldots, k$, *vektori prostora* $\mathbb{R}^n$, *odnosno* $\mathbb{C}^n$ *i* λ, μ $(\lambda \neq 0)$ *bilo koji skalari. Dokažite sljedeće tvrdnje:*

a) *Vektori* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ *su linearno nezavisni ako i samo ako ako su vektori* $\mathbf{x}_i' = (x_1^i, \ldots, \lambda x_l^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, \ldots, k$ *linearno nezavisni. Drugim riječima, ako kod svih vektora pomnožimo neku koordinatu skalarom* $\lambda \neq 0$, *linearna nezavisnost se neće promijeniti.*

b) *Vektori* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ *su linearno nezavisni ako i samo ako ako su linearno nezavisni vektori* $\mathbf{x}_i' = (x_1^i, \ldots, x_{l-1}^i, \mu x_j^i + x_l^i, x_{l+1}^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, \ldots, k$, *za svaki* $j \neq l$. *Drugim riječima, ako kod svih vektora nekoj koordinati dodamo bilo koju drugu njegovu koordinatu prethodno pomnoženu proizvoljnim skalarom, linearna nezavisnost neće se promijeniti.*

Baza vektorskog prostora. Prije nego što definiramo nove pojmove, vratimo se na *Primjer 7.21*. Vektori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ su linearno nezavisni i generiraju prostor $\mathbb{R}^n$. Međutim, i linearno zavisni vektori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ generiraju prostor $\mathbb{R}^n$, jer svaki vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ možemo zapisati kao

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i + 0 \cdot (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2).$$

Od svih konačnih podskupova vektorskog prostora V, od naročitog su značaja oni koji generiraju V i čiji su elementi linearno nezavisni vektori.

Definicija 50. *Za skup vektora* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *prostora* V *kažemo da je* baza vektorskog prostora V *ako ti vektori imaju sljedeća dva svojstva:*

- *vektori* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *generiraju* V *i*
- *vektori* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *su linearno nezavisni.*

Primjedba 7.9. *Uočite da ova definicija baze nije u suprotnosti s definicijom baze u vektorskom prostoru* V^3.

Primjer 7.23. *Vektori* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *iz* Primjera 7.21 *tvore bazu u prostorima* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$. *Tu bazu zovemo* **standardna** *ili* **kanonska baza** *prostora* $\mathbb{R}^n$, *odnosno prostora* $\mathbb{C}^n$.

Može se pokazati da bilo koje dvije baze konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V imaju isti broj elemenata(vidi primjerice [19]). Taj broj zovemo **dimenzijom prostora** V i označavamo s $\dim V$. Tako je primjerice $\dim \mathbb{R}^n = n$ i $\dim \mathbb{C}^n = n$. Nadalje, u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru svaki skup od n linearno nezavisnih vektora je baza toga prostora.

Zadatak 7.12. *Pokažite da vektori* $1, x, x^2, \ldots, x^n \in P_n$ *tvore bazu u vektorskom prostoru* P_n *svih polinoma stupnja* $\leq n$. *Odredite* $\dim P_n$.

Koordinatizacija. Važnost baze n-dimenzionalnog realnog [kompleksnog] vektorskog prostora V vidi se i u tome što se V može identificirati s prostorom $\mathbb{R}^n$ [s $\mathbb{C}^n$].

Krenimo redom. Neka je $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ bilo koja uređena baza vektorskog prostora V. Tada se svaki vektor $\mathbf{x} \in V$ može prikazati u obliku

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \tag{7.17}$$

pri čemu su skalari $x_1, \ldots, x_n$ jednoznačno određeni. Naime, iz

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)\mathbf{e}_i = \mathbf{0},$$

odakle zbog linearne nezavisnosti vektora baze slijedi $x_i = x'_i$, $i = 1, \ldots, n$. Skalare x_i, $i = 1, \ldots, n$, nazivamo **koordinate vektora x u uređenoj bazi** $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

S (7.17) preko uređene baze $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ dana je bijekcija

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{e}) := (x_1, \ldots, x_n)$$

vektorskog prostora V na vektorski prostor $\mathbb{R}^n$, odnosno $\mathbb{C}^n$, u ovisnosti o tome je li V realan ili kompleksan vektorski prostor. Ta bijekcija naziva se **koordinatizacija**, a vektor $\mathbf{x}(\mathbf{e})$ **koordinatizacija vektora x u bazi** $(\mathbf{e})$. Zbog toga vektor $\mathbf{x}$ možemo identificirati s njemu pridruženim vektorom—uređenom n-torkom $\mathbf{x}(\mathbf{e})$. Pri tome zbrajanju vektora iz V odgovara zbrajanje odgovarajućih vektora—uređenih n-torki, dok množenju skalarom odgovara množenje skalarom odgovarajućeg vektora—uređene n-torke.

7.2.2 Skalarni produkt i norma u prostoru $\mathbb{R}^n$

Pojmovi skalarnog produkta i norme vektora prostora V^3 mogu se prenijeti na proizvoljne realne i kompleksne vektorske prostore. Mi ćemo te pojmove uvesti samo za vektorski prostor $\mathbb{R}^n$.

Prisjetimo se da vektore $\vec{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k} \in V^3$ možemo identificirati s vektorima $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$ te da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Motivirani time, definiramo skalarni produkt u prostoru $\mathbb{R}^n$:

Definicija 51. Skalarni produkt vektora $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i vektora $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *je realan broj koji označavamo s* $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ *i definiramo kao*

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{7.18}$$

Funkciju $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})$ *sa* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *u* $\mathbb{R}$ *zovemo* skalarni produkt *u* $\mathbb{R}^n$.

Pomoću definicijske formule (7.18) lako je provjeriti sljedeća svojstva skalarnog produkta:

(S1) $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$,

(S2) $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Svojstva (S1)–(S2) poznata su pod nazivom pozitivna definitnost.

(S3) $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$ (simetričnost),

(S4) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z})$ (aditivnost u prvom argumentu),

(S5) $(\lambda\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ (homogenost u prvom argumentu).

Primjedba 7.10. *Napomenimo da se općenito skalarnim produktom u* $\mathbb{R}^n$ *zove svaka funkcija sa* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *u* $\mathbb{R}$ *koja ima svojstva (S1) – (S5), a skalarni produkt definiran s (7.18) zove se* standardni skalarni produkt. *Vektorski prostor* $\mathbb{R}^n$ *sa standardnim skalarnim produktom zovemo* euklidski vektorski prostor. *U daljnjem izlaganju pod skalarnim produktom podrazumijevat ćemo standardni skalarni produkt (7.18).*

Zahvaljujući svojstvu (S1) pomoću skalarnog produkta možemo definirati normu vektora:

Definicija 52. Norma *ili* duljina vektora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *je realan broj* $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Funkcija $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$ zove se **norma**, i ima sljedeća svojstva:

(N1) $|\mathbf{x}| \geq 0$, za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(N2) $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(N3) $|\lambda\, \mathbf{x}| = |\lambda|\, |\mathbf{x}|$, za sve $\lambda \in \mathbb{R}$ i za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(N4) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$, za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Svojstva (N1) – (N3) direktno slijede iz definicije norme. **Nejednakost trokuta** (N4) dokazat ćemo pomoću Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve (CSB) nejednakosti:

Teorem 7.4 (Cauchy-Schwarz-Buniakowsky). *Za svaka dva vektora* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi nejednakost*

$$|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}|\, |\mathbf{y}|.$$

Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{y}$ *kolinearni.*

Dokaz. Definirajmo kvadratnu funkciju

$$f(t) = |\mathbf{x} + t\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + t\mathbf{y}|\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = t^2|\mathbf{y}|^2 + 2t(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + |\mathbf{x}|^2.$$

Budući da je f nenegativna funkcija ($f(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$), za njenu diskriminantu vrijedi $\Delta = 4(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 - 4|\mathbf{y}|^2|\mathbf{x}|^2 \leq 0$, odakle slijedi tražena nejednakost. Jednakost vrijedi ($\Delta = 0$) onda i samo onda ako f ima nultočku, tj. ako postojii realan broj t_0 takav da je $f(t_0) = 0$. Budući da je $f(t_0) = 0$ onda i samo onda ako je $\mathbf{x} + t_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$, tj. ako su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kolinearni, jednakost vrijedi jedino u tom slučaju. □

Pomoću CSB nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\,(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\,|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \\ &= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi nejednakost trokuta.

Primjedba 7.11. *Pomoću koordinata CSB nejednakost možemo zapisati u obliku:*

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Zadatak 7.13. *Pokažite da za sve* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi jednakost*

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2\right).$$

Kut φ između vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ može se izračunati iz formule $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$. Poopćavanjem te formule na prostor $\mathbb{R}^n$ dolazimo do definicije kuta između dva vektora prostora $\mathbb{R}^n$. Prvo uočimo da za vektore $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ iz CSB nejednakosti dobivamo $-1 \leq \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \leq 1$, pa definiramo

Definicija 53. *Realan broj* $\varphi \in [0, \pi]$ *takav da je*

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$$

zovemo kut između vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. *Ako je* $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$*, onda za vektore* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *kažemo da su* okomiti.

Primjer 7.24. *Odredimo kut* φ *između vektora* $\mathbf{x} = (-1, 1, 2, -1)$ *i vektora* $\mathbf{y} = (1, -1, 1, 0)$.

Kako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$*, ovi vektori su okomiti.*

Zadatak 7.14. *Neka je* φ *kut između vektora* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Dokažite* kosinusov poučak u $\mathbb{R}^n$*:*

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\varphi.$$

7.2.3 Pojam linearnog operatora

Funkciju koja i za domenu i za kodomenu ima vektorske prostore nazivamo **operatorom**. Nas će zanimati samo linearni operatori.

Definicija 54. *Neka su* V *i* W *bilo koja dva vektorska prostora. Za operator* $\mathcal{A} : V \to W$ *kažemo da je* linearan *ako je*

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu\mathcal{A}(\mathbf{y})$$

za sve skalare λ, μ *i za sve vektore* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Primjer 7.25. *Navedimo nekoliko primjera linearnih operatora* $\mathcal{A} : V \to W$*:*

a) $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ *(simetrija ravnine u odnosu na* x_1*-os);*

b) $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$ *(centralna simetrija ravnine u odnosu na ishodište);*

c) $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ *(ortogonalna projekcija ravnine na x_1 - os)*

Zadatak 7.15. *Neka je $\mathcal{A} : V \to W$ linearan operator. Dokažite da je $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Zadatak 7.16. *Operator $\mathcal{A} : V \to W$ je:*
a) aditivan*, ako je $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})$, za sve vektore $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;*
b) homogen*, ako je $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})$ za svaki skalar λ i za sve $\mathbf{x} \in V$.*

Dokažite da je operator $\mathcal{A} : V \to W$ linearan onda i samo onda ako je on aditivan i homogen.

Zadatak 7.17. *Neka je $a \in \mathbb{R}$ zadan. Dokažite da je preslikavanje $\mathcal{A}\colon P_n \to \mathbb{R}$ definirano formulom $\mathcal{A}(p) = p(a)$ linearan operator.*

Naša daljnja razmatranja ograničavamo samo na konačno dimenzionalne vektorske prostore.

Teorem 7.5. *Dva linearna operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to W$ su jednaka onda i samo onda ako se oni podudaraju na bazi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ prostora V.*

Dokaz. Ako su dva operatora jednaka, onda se oni podudaraju na bazi. Dokažimo obrat. Pretpostavimo da je $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) = \mathcal{B}(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Treba pokazati da je $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})$ za svaki $\mathbf{x} \in V$. Neka je $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ rastav vektora $\mathbf{x}$ po vektorima baze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Tada je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{x}) = {} & \mathcal{A}(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \ldots x_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = x_1\mathcal{B}(\mathbf{e}_1) + \ldots x_n\mathcal{B}(\mathbf{e}_n) \\ = {} & \mathcal{B}(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = \mathcal{B}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Dakle, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. $\square$

Sljedeći teorem govori nam da je djelovanje linearnog operatora u potpunosti određeno njegovim vrijednostima na vektorima baze.

Teorem 7.6. *Neka je $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bilo koja baza prostora V i $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bilo kojih n vektora prostora W. Tada postoji samo jedan linearan operator $\mathcal{A} : V \to W$ takav da je*

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dokaz. Svaki vektor $\mathbf{x} \in V$ može se na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Nije teško provjeriti da je operator $\mathcal{A} : V \to W$ definiran formulom $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$ linearan i da je $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Ako je $\mathcal{B} : V \to W$ linearan operator takav da je $\mathcal{B}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, onda je prema prethodnom teoremu $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. $\square$

Primjer 7.26. *Za bazu prostora* $\mathbb{R}^3$ *uzmimo vektore* $\mathbf{v}_1=(1,0,1)$, $\mathbf{v}_2=(0,-1,2)$, $\mathbf{v}_3=(1,1,2)$ *i definirajmo linearni operator* $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ *s:* $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1)=(0,1,0,2,0)$, $\mathcal{A}(\mathbf{v}_2)=(-1,6,2,0,1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{v}_3)=(2,-3,1,4,0)$. *Izračunajmo* $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3)$.
Kako je $(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{3}(-x_1+2x_2+x_3)\mathbf{v}_1+\frac{1}{3}(-x_1-x_2+x_3)\mathbf{v}_2+\frac{1}{3}(4x_1-2x_2-x_3)\mathbf{v}_3$, *to je*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{3}(-x_1+2x_2+x_3)\mathcal{A}(\mathbf{v}_1)+\frac{1}{3}(-x_1-x_2+x_3)\mathcal{A}(\mathbf{v}_2)\\ &\quad+\frac{1}{3}(4x_1-2x_2-x_3)\mathcal{A}(\mathbf{v}_3)\\ &= \frac{1}{3}(-x_1+5x_2+x_3,x_1-14x_2+2x_3,-3x_1+3x_2,4x_1+4x_2+6x_3,\\ &\quad -x_1-x_2+x_3).\end{aligned}$$

Linearni operatori su funkcije pa ih kao funkcije možemo zbrajati, množiti sa skalarom i komponirati.

- Zbroj $\mathcal{C}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ linearnih operatora $\mathcal{A},\mathcal{B}:V\to W$ opet je linearan operator. Naime, za sve skalare λ,μ i sve vektore $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= \mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})+\mathcal{B}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\\ &= (\lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{A}(\mathbf{y}))+(\lambda\mathcal{B}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{B}(\mathbf{y}))\\ &= \lambda\,(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x}))+\mu\,(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x}))=\lambda\mathcal{C}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{C}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

- Produkt $\mathcal{C}=\alpha\mathcal{A}$ skalara $\alpha\in\mathbb{R}$ i linearnog operatora $\mathcal{A}:V\to W$ opet je linearan operator:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= \alpha\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\\ &= \alpha\,(\lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\lambda\,(\alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mu\,(\alpha\mathcal{A}(\mathbf{y}))\\ &= \lambda\mathcal{C}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{C}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

- Kompozicija $\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ linearnih operatora $\mathcal{B}:V\to W$ i $\mathcal{A}:W\to Z$ je linearan operator s V u Z:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= \mathcal{A}\,(\mathcal{B}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}))=\mathcal{A}\,(\lambda\mathcal{B}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{B}(\mathbf{y}))\\ &= \lambda\mathcal{A}\,(\mathcal{B}(\mathbf{x}))+\mu\mathcal{A}\,(\mathcal{B}(\mathbf{y}))\\ &= \lambda\mathcal{C}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{C}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

7.3 Matrice

7.3.1 Pojam matrice i operacije s matricama

Proučavanje linearnih operatora, sustava linearnih algebarskih jednadžbi i mnogih drugih važnih pojmova, znatno se olakšava uvođenjem pojma matrice.

Mi ćemo pojam matrice uvesti preko linearnog operatora. Neka je $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ uređena baza vektorskog prostora V, a $(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ uređena baza vektorskog prostora W. Prema *Teoremu 7.6* djelovanje operatora $\mathcal{A} : V \to W$ u potpunosti je određeno vrijednostima $\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, na vektorima baze. Kako su $\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)$ vektori prostora W i $(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ baza u W, jednoznačno su određeni skalari a_{ij} $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ takvi da je:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = &\quad a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{f}_m \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = &\quad a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{f}_m \\ \vdots\quad & \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = &\quad a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{f}_m. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Skalare a_{ij} $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ poželjno je pregledno zapisati u obliku tablice. Stoga uvodimo definiciju:

Definicija 55. *Familiju* $\mathbf{A}$ *od* $m \cdot n$ *realnih [kompleksnih] brojeva* a_{ij} $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ *zapisanih u obliku pravokutne tablice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

nazivamo realnom [kompleksnom] matricom formata *ili* tipa $m \times n$.

Matrica (7.20) ima m redaka i n stupaca. Brojeve a_{ij} nazivamo **elementima** te matrice. Prvi indeks i u a_{ij} označava redak, a drugi indeks j označava stupac, pa kažemo da se element a_{ij} nalazi na presjeku i-tog retka i j-tog stupca odnosno na **poziciji** (i, j). Budući da ispisivanje matrice zauzima dosta mjesta, često se upotrebljava kraća oznaka $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kad je iz konteksta jasno o kojem se formatu radi.

Za matricu (7.20) kažemo da je **kvadratna** matrica n-tog reda ako je $m = n$. Od svih kvadratnih matrica n-tog reda posebno su važne **jedinična matrica I** i **nul-matrica O**:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Općenito, svaku matricu formata $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki nuli zovemo **nul-matrica** i označavamo s $\mathbf{O}$; pri tome će iz konteksta biti jasno o kojem se formatu radi.

Dakle, u paru uređenih baza $(\mathbf{e})$, $(\mathbf{f})$ operatoru $\mathcal{A}$ pripada matrica $\mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{e})$ definirana s (7.20) koju zovemo **matricom operatora $\mathcal{A}$ u paru uređenih baza** $(\mathbf{e})$, $(\mathbf{f})$.

Primjer 7.27. *Neka je linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiran formulom*

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (-6x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - 6x_3, 3x_1 - x_2 + 4x_3).$$

Nadalje, neka je $(\mathbf{e})$ standardna baza u $\mathbb{R}^3$ i $(\mathbf{f})$ standardna baza u $\mathbb{R}^4$. Budući da je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) &= \mathcal{A}(1, 0, 0) = (0, 1, -1, 3) = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 + 3\mathbf{f}_4 \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) &= \mathcal{A}(0, 1, 0) = (-6, -1, 1, -1) = -6\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_4 \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_3) &= \mathcal{A}(0, 0, 1) = (2, 1, -6, 4) = 2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - 6\mathbf{f}_3 + 4\mathbf{f}_4, \end{aligned}$$

tom operatoru u navedenom paru baza odgovara matrica

$$\mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primjer 7.28. *Neka je $\mathcal{D} : P_3 \to P_2$ operator deriviranja na prostoru svih polinoma stupnja ≤ 3, $(\mathbf{e}) = (t^3, t^2, t, 1)$ baza u P_3 i $(\mathbf{f}) = (t^2, t, 1)$ baza u P_2. Tada operatoru $\mathcal{D}$ u paru uređenih baza $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ pripada matrica*

$$\mathbf{D}(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jednakost matrica. Neka je i $\mathcal{B} : V \to W$ linearan operator, te neka je s

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathbf{e}_1) = &\quad b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + b_{m1}\mathbf{f}_m \\
\mathcal{B}(\mathbf{e}_2) = &\quad b_{12}\mathbf{f}_1 + b_{22}\mathbf{f}_2 + \ldots + b_{m2}\mathbf{f}_m \\
\vdots \\
\mathcal{B}(\mathbf{e}_n) = &\quad b_{1n}\mathbf{f}_1 + b_{2n}\mathbf{f}_2 + \ldots + b_{mn}\mathbf{f}_m
\end{aligned} \tag{7.21}$$

zadan jednoznačni rastav vektora $\mathcal{B}(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, po vektorima baze $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ i

$$\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

matrica linearnog operatora $\mathcal{B} : V \to W$ u paru uređenih baza $(\mathbf{e})$, $(\mathbf{f})$. Prema *Teoremu 7.5* je $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ onda i samo onda ako je $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) = \mathcal{B}(\mathbf{e}_i)$ za sve $i = 1, \ldots, m$, tj. ako je $a_{ij} = b_{ij}$ za sve $i = 1, \ldots, m$ i za sve $j = 1, \ldots, n$. To motivira sljedeću definiciju:

Definicija 56. *Za dvije matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i $\mathbf{B} = (b_{ij})$ formata $m \times n$ kažemo da su* jednake *ako su im odgovarajući elementi jednaki, tj. ako je $a_{ij} = b_{ij}$ za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.*

Produkt matrice skalarom. Množenjem jednakosti (7.19) sa skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ zaključujemo da operatoru $\alpha\mathcal{A} : V \to W$ u paru uređenih baza $(\mathbf{e})$, $(\mathbf{f})$ pripada matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Motivirani time, definiramo:

Definicija 57. *Matrica $\mathbf{A}$ množi se skalarom α tako da se svaki njen element pomnoži s α.*

Primjer 7.29.

$$(-2)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -8 & -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lako je provjeriti da množenje matrica skalarima ima sljedeća svojstva:

Teorem 7.7. *Neka su* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *matrice formata* $m \times n$ *i* λ, μ *skalari. Tada vrijedi:*

1. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$,

2. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$,

3. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$,

4. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Zbroj matrica. Zbrajanjem jednakosti (7.19) i (7.21) dobivamo da operatoru $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ u paru uređenih baza $(\mathbf{e})$, $(\mathbf{f})$ pripada matrica

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\mathbf{f}, \mathbf{e}) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Definicija 58. *Zbroj* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *matrica* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *i* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *formata* $m \times n$ *definira se kao matrica* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *formata* $m \times n$ *s elementima*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots n).$$

Primjedba 7.12. *Uočimo da se jednakost i zbroj matrica definira samo za matrice istog formata.*

Primjer 7.30.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 9 \\ -6 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matricu $(-1)\mathbf{A}$ označavamo s $-\mathbf{A}$. Zbroj $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ zovemo **razlika** matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ i označavamo s $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Svojstva zbrajanja matrica iskazana su u sljedećem teoremu.

Teorem 7.8. *Neka su* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *matrice formata* $m \times n$. *Tada vrijedi:*

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$,
2. $\mathbf{A}+\mathbf{O} = \mathbf{O}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$, *gdje je* $\mathbf{O}$ *nul-matrica formata* $m \times n$,
3. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A})+\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
4. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$.

Primjedba 7.13. Teoremi 7.7 *i* 7.8 *govore nam da je skup* M_{mn} *svih matrica formata* $m \times n$ *s operacijama zbrajanja i množenja skalarom jedan vektorski prostor. Stoga kod matrica možemo govoriti o linearnoj kombinaciji, linearnoj nezavisnosti i drugim pojmovima koje smo definirali za apstraktni vektorski prostor.*

Zadatak 7.18. *Definirajte* $m \cdot n$ *matrica* E_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ *formata* $m \times n$ *na sljedeći način: na poziciji* (i, j) *neka stoji jedan, a na svim preostalim pozicijama neka je nula. Pokažite da matrice* E_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ *tvore bazu u* M_{mn} *i odredite* $\dim M_{mn}$.

Produkt matrica. Matrice se zbrajaju i množe skalarom prema jednostavnim pravilima. Pravilo za množenje matrica malo je složenije. Do njega ćemo doći tako da razmotrimo matricu pridruženu kompoziciji dvaju linearnih operatora.

Neka su $\mathcal{B} : V \to W$ i $\mathcal{A} : W \to Z$ linearni operatori. Nadalje, neka su redom $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p)$ i $(\mathbf{g}) = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m)$ uređene baze vektorskih prostora V, W i Z. Pokažimo kako se pomoću matrica $\mathbf{A} = (a_{ij}) := \mathbf{A}(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ i $\mathbf{B} = (b_{ij}) := \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{e})$ može izračunati matrica $\mathbf{C} := \mathbf{C}(\mathbf{g}, \mathbf{e})$ linearnog operatora $\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Neka je $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Tada je

$$\mathcal{C}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \mathbf{g}_i, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.23}$$

S druge strane je

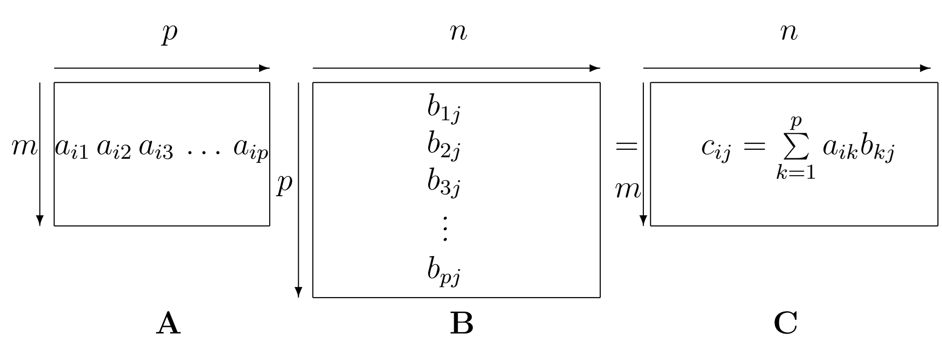
$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbf{e}_j) = \;& \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_j)) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj}\mathbf{f}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\mathcal{A}(\mathbf{f}_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{g}_i \\
= \;& \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)\mathbf{g}_i.
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

Zbog (7.23) i (7.24) je $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}\mathbf{g}_i = \sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)\mathbf{g}_i$, odakle zbog linearne nezavisnosti vektora $\mathbf{g}_i$ dobivamo:

$$
c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1,\dots,m,\; j = 1,\dots,n. \tag{7.25}
$$

Definicija 59. *Produkt* $\mathbf{AB}$ *matrica* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *definira se samo onda ako su te matrice* ulančane, *tj. ako prva matrica* $\mathbf{A}$ *ima onoliko stupaca koliko druga matrica* $\mathbf{B}$ *ima redaka. Ako je matrica* $\mathbf{A}$ *formata* $m \times p$ *i* $\mathbf{B}$ *formata* $p \times n$, *produkt* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ *je matrica formata* $m \times n$, *čiji se elementi računaju po formuli (7.25).*

Primjedba 7.14. *Uočite da se matrični element* c_{ij} *dobiva kao „skalarni produkt” i-tog retka* $\mathbf{a}^i$ *matrice* $\mathbf{A}$ *sa j-tim stupcem* $\mathbf{b}_j$ *matrice* $\mathbf{B}$, *tj. ako stupac* $\mathbf{b}_j$ *identificiramo s uređenom p-torkom, onda je* $c_{ij} = (\mathbf{a}^i|\mathbf{b}_j)$. *Takav produkt naziva se* kanonski produkt *i-tog retka s j-tim stupcem.*



Slika 7.17: *Produkt matrica*

Primjer 7.31. *Neka je* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Tada* *je*

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2+0 & -1+0+0 & 6+3+0 \\ 4-6+48 & -4+0+6 & 24+9+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 9 \\ 46 & 2 & 45 \end{bmatrix}.$$

Uočite da produkt **BA** *nije definiran (broj stupaca matrice* **B** *različit je od broja redaka matrice* **A***).*

Primjer 7.32. *Ako je* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, *onda je*

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 0+4 \\ 2+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+3 & 2+0 \\ 0+4 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oba produkta **AB** *i* **BA** *su definirana, ali su različita.*

Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, množenje matrica nije komutativno. Za dvije kvadratne matrice **A** i **B** istoga reda kažemo da **komutiraju** ako je **AB** = **BA**.

Primjer 7.33. *Odredimo sve matrice koje komutiraju s matricom drugog reda* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Treba odrediti matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *tako da bude*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad tj. \quad \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix}.$$

Prema definiciji jednakosti matrica, uspoređujući odgovarajuće elemente, mora biti:

$$\begin{array}{cc} a+2c=a \Rightarrow c=0, & b+2d=2a \Rightarrow b=2a-2d, \\ 0=c, & 0=2c. \end{array}$$

Dakle, sve matrice oblika $\begin{bmatrix} a & 2a-2d \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $a, d \in \mathbb{C}$, *komutiraju s matricom* $\mathbf{A}$.

Navedimo bez dokaza svojstva množenja matrica (dokaz vidi u [20]):

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (asocijativnost),
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributivnost slijeva),
3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributivnost zdesna),
4. $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{AB})$.

U sljedećim zadacima želimo ukazati na neke algebarske razlike između matrica i realnih (kompleksnih) brojeva.

Zadatak 7.19. *Produkt realnih brojeva jednak je nuli onda i samo onda kada je barem jedan od faktora jednak nuli. Kod matrica nemamo takvu situaciju, tj. produkt dviju matrica različitih od nul-matrice može biti nul-matrica. Navedimo primjer. Neka je* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Pokažite da je* $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ *i* $\mathbf{BA} \neq \mathbf{O}$.

Zadatak 7.20. *Neka je* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$. *Pokažite da je* $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. *Dakle, jednakost* $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, *ne povlači jednakost* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Zadatak 7.21. *Potencije kvadratne matrice* $\mathbf{A}$ *definiraju se induktivno (kao i potencije realnog broja):*

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I},\ \mathbf{A}^1 = \mathbf{A},\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^1\mathbf{A},\ \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A},\ \ldots,\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A},$$

gdje je $\mathbf{I}$ *jedinična matrica istog reda kao i matrica* $\mathbf{A}$. *Matematičkom indukcijom pokažite da je* $\mathbf{A}^p\mathbf{A}^q = \mathbf{A}^{p+q}$ *i* $(\mathbf{A}^p)^q = \mathbf{A}^{pq}$, *za sve* $p, q \in \mathbb{N}$.

Zadatak 7.22. *Pokažite da je matrica* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **idempotentna**, *tj. da je* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. *Sjetimo se da su od svih realnih brojeva jedino* 0 *i* 1 *idempotentni.*

Zadatak 7.23. *Za kvadratne matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *pokažite da je* $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$. *Kada će za kvadratne matrice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *istoga tipa vrijediti formula za kvadrat binoma?*

Pomoću *Teorema 7.6* lako je vidjeti da je preslikavanje $\mathcal{A} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{e})$ bijekcija skupa $\mathcal{L}(V, W)$ svih linearnih operatora $\mathcal{A} : V \to W$ na skup M_{mn} svih matrica formata $m \times n$. Zahvaljujući toj bijekciji, zbrajanje, množenje skalarom i množenje (komponiranje) operatora svodi se na iste te operacije s matricama.

Pokažimo sada kako se djelovanje linearnog operatora na vektor može prikazati pomoću množenja matrica. Neka je $\mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{e})$ matrica linearnog operatora $\mathcal{A} : V \to W$ u paru uređenih baza $(\mathbf{e}), (\mathbf{f})$ definirana s (7.19) i (7.20). Nadalje, neka su

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \quad \text{i} \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{f}_1 + \ldots + y_m\mathbf{f}_m$$

jednoznačni rastavi vektora $\mathbf{x} \in V$ po uređenoj bazi $(\mathbf{e})$ i vektora $\mathbf{y} := \mathcal{A}(\mathbf{x})$ po uređenoj bazi $(\mathbf{f})$, te neka su odgovarajuće koordinatizacije (vidi *Poglavlje 7.2.1*) tih vektora zapisane u obliku jednostupčastih matrica

$$\mathbf{x}(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{y}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Teorem 7.9. *Uz navedene oznake je* $\mathbf{y}(\mathbf{f}) = \mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{e})\,\mathbf{x}(\mathbf{e})$.

Dokaz. Pomoću (7.19) dobivamo

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathbf{f}_i.$$

Zbog jedinstvenosti rastava vektora $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i\mathbf{f}_i$ po vektorima baze je

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

što upravo daje jednakost $\mathbf{y}(\mathbf{f}) = \mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{e})\,\mathbf{x}(\mathbf{e})$. □

7.3.2 Neke specijalne matrice

Do sada smo definirali jediničnu matricu i nul-matricu proizvoljnog formata. Sada ćemo uvesti još neke specijalne matrice. Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica n-tog reda. Za matrične elemente $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots,$ a_{nn} kažemo da leže na **glavnoj dijagonali**, a njihov zbroj označavamo s $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ i zovemo **trag matrice A**. Dakle,

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}.$$

Primjer 7.34. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{tr}\mathbf{A} = -1 + 2 + 4 = 5.$

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ n-tog reda kažemo da je **dijagonalna**, ako su joj svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. ako je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$.

Primjer 7.35. *Matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *su dijagonalne, a matrica* $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *nije.*

Dijagonalnu matricu kojoj su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki nazivamo **skalarnom matricom**. Tako je, primjerice, dijagonalna matrica **B** iz prethodnog primjera ujedno i skalarna matrica.

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ n-tog reda kažemo da je **gornje trokutasta matrica**, ako su joj svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, tj. ako je $a_{ij} = 0$ za $i > j$. Slično, kvadratnu matricu kojoj su svi matrični elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli ($a_{ij} = 0$ za $i < j$) nazivamo **donje trokutasta matrica**.

Primjer 7.36. *Matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *su gornje trokutaste, a matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *donje trokutaste.*

Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrica formata $m \times n$. Pomoću nje definirajmo $n \times m$ matricu $\mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)$, tako da bude $a_{ij}^T = a_{ji}$. Matricu $\mathbf{A}^T$ nazivamo **transponiranom matricom matrice A**. Uočite da su reci [stupci] matrice $\mathbf{A}^T$ stupci [reci] matrice $\mathbf{A}$. Zbog toga je $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$.

Primjer 7.37. *Primjerice,*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\ \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Zadatak 7.24. *Pokažite da je* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$, $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$, $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ n-tog reda kažemo da je **simetrična** ako je $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Ako je pak $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, tj. ako je $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, onda za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je **antisimetrična**. Antisimetrična matrica na glavnoj dijagonali ima nule ($a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$).

Primjer 7.38. *Matrica* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ *je simetrična, dok je matrica* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ *antisimetrična.*

Za realnu kvadratnu matricu $\mathbf{U}$ n-tog reda kažemo da je **ortogonalna**, ako je

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}.$$

Prema definiciji produkta matrica, uvjet ortogonalnosti možemo zapisati u obliku

$$(\mathbf{u}^i|\mathbf{u}^j) = (\mathbf{u}_i|\mathbf{u}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

gdje je δ_{ij} **Kroneckerov simbol**, tj. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Primjer 7.39. *Matrica* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ *je ortogonalna, a matrica* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ *nije. Provjerite.*

Zadatak 7.25. *Prema definiciji ortogonalne matrice, njeni reci (kao i stupci) jesu jedinični i međusobno okomiti vektori iz* $\mathbb{R}^n$. *Pokažite da reci, kao i stupci, ortogonalne matrice* n*-tog reda tvore bazu prostora* $\mathbb{R}^n$. *Takvu bazu nazivamo* ortonormiranom.

Zadatak 7.26. *Neka je* $\mathbf{u}$ *matrica formata* $n \times 1$ *takva da je* $|\mathbf{u}| = 1$ *i* $\mathbf{I}$ *jedinična matrica* n*-tog reda. Matrica* $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ *naziva se* Householderova matrica. *Pokažite:*

a) *da je matrica* $\mathbf{H}$ *ortogonalna i simetrična,*

b) *ako je* $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{|\mathbf{b}-\mathbf{a}|}$, *gdje su* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ *i* $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, *onda je* $\mathbf{Ha} = \mathbf{b}$ *i* $\mathbf{Hb} = \mathbf{a}$.

7.3.3 Regularne matrice

Svaki realan broj $a \neq 0$ s obzirom na operaciju množenja ima jedinstven inverzan element a^{-1}, takav da je $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Slično pitanje može se postaviti i za matrice:

Postoji li za matricu $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ *matrica* $\mathbf{B}$ *takva da je*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}, \tag{$\star$}$$

gdje je $\mathbf{I}$ *jedinična matrica odgovarajućeg reda?*

Kao prvo, iz definicije produkta matrica zaključujemo da jednakosti ($\star$) mogu vrijediti samo ako je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica, ali i u tom slučaju odgovor na postavljeno pitanje nije uvijek pozitivan.

Primjer 7.40. *Za matricu* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}$ *ne postoji matrica* $\mathbf{B}$ *takva da vrijedi* ($\star$), *jer u oba produkta* $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ *drugi redak je jednak nulretku.*

Definicija 60. *Za kvadratnu matricu* $\mathbf{A}$ *kažemo da je* regularna *ili* invertibilna*, ako postoji kvadratna matrica* $\mathbf{B}$ *takva da je*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}. \tag{7.26}$$

U suprotnom, za matricu $\mathbf{A}$ *kažemo da je* singularna*.*

Pokažimo jedinstvenost matrice $\mathbf{B}$ (ako ona postoji) za koju vrijedi (7.26). Ako je $\mathbf{C}$ matrica takva da je $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, onda je

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B},$$

tj. $\mathbf{C} = \mathbf{B}$. Dakle, matrica $\mathbf{B}$ je jednoznačno određena zahtjevom (7.26), označavamo je s $\mathbf{A}^{-1}$ i nazivamo **inverznom matricom** matrice $\mathbf{A}$. Prema tome, imamo

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Primjer 7.41. *Uočimo da je jedinična matrica* $\mathbf{I}$ *regularna i* $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$*. Nul-matrica je singularna jer je* $\mathbf{BO} = \mathbf{OB} = \mathbf{O}$ *za svaku kvadratnu matricu* $\mathbf{B}$*.*

Dakle, skup G_n svih regularnih matrica n-tog reda je pravi podskup skupa M_n svih kvadratnih matrica n-tog reda.

Zadatak 7.27. *Neka je zadana matrica* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$*. Pokažite da je* $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Skup G_n svih regularnih matrica n-tog reda ima sljedeća svojstva:

1. $\mathbf{A} \in G_n \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \in G_n \quad \& \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in G_n \Rightarrow \mathbf{AB} \in G_n \quad \& \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Prvo svojstvo slijedi iz definicije (7.26). Dokažimo drugo svojstvo. Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in G_n$. Tada je $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ i $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$, odakle dobivamo

$$\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I},$$

što dokazuje drugu tvrdnju.

Gaussova metoda za invertiranje matrice. Postoji više načina za ispitivanje regularnosti i određivanja inverza neke matrice. Veoma jednostavna metoda je tzv. Gaussova metoda, koja koristi samo elementarne operacije nad recima matrice.

Definicija 61. *Pod* Gaussovim elementarnim operacijama *nad recima matrice podrazumijevamo:*

1. *permutiranje redaka,*
2. *množenje retka skalarom različitim od nule,*
3. *dodavanje retku nekog drugog retka prethodno pomnoženog proizvoljnim skalarom.*

Primjedba 7.15. *Na potpuno isti način definiraju se elementarne operacije nad stupcima matrice i elementarne operacije nad jednadžbama sustava linearnih algebarskih jednadžbi.*

Sada ćemo opisati Gaussovu metodu za invertiranje matrice (dokaz se može naći u [20], [19]). Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica. S $[\mathbf{A},\mathbf{I}]$ označimo matricu koju dobivamo tako da matrici $\mathbf{A}$ nadopišemo jediničnu matricu istog reda. Zatim elementarnim operacijama nad recima matricu $[\mathbf{A},\mathbf{I}]$ svodimo na oblik $[\mathbf{I},\mathbf{B}]$. Ako je to moguće, $\mathbf{A}$ je regularna i $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$, a ako to nije moguće, tada je $\mathbf{A}$ singularna matrica.

Primjer 7.42. *Ilustrirajmo Gaussovu metodu na sljedećim matricama:*
a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, *b)* $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Radi lakšeg uočavanja elementarnih operacija, s R_i označavamo i-ti redak iz prethodnog koraka. Tako, primjerice, oznaka R_1-2R_3 uz neki redak govori nam da se taj redak dobiva tako da se od prvog retka oduzme treći redak prethodno pomnožen brojem 2.

a) Elementarnim operacijama nad recima dobivamo

$$[\mathbf{A},\mathbf{I}]=\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2+R_1 \\ R_3-R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1-2R_2+R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

Matrica $\mathbf{A}$ *je regularna i njen inverz je matrica* $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $[\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$. *Elementarnim operacijama nad recima matrice* $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ *nije moguće dobiti jediničnu matricu na mjestu matrice* $\mathbf{A}$. *Prema tome, matrica* $\mathbf{A}$ *je singularna.*

Primjer 7.43. *Riješimo matričnu jednadžbu* $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$*, gdje su* $\mathbf{A}$ *matrica iz prethodnog primjera pod a),*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{A}$ *je regularna. Ako je i* $\mathbf{B}$ *regularna matrica, onda množenjem jednadžbe* $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ *slijeva s* $\mathbf{A}^{-1}$ *i zdesna s* $\mathbf{B}^{-1}$ *dobivamo*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \,/\, \mathbf{AXB} &= \mathbf{C} \,/\, \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AXBB}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}. \end{aligned}$$

Gaussovom metodom pokažimo da je $\mathbf{B}$ *regularna matrica:*

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}, \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_2 \\ R_3 - R_1 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 - R_3 \\ -R_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_3 + 10R_2 \\ R_3 + 6R_2 \\ -R_2 \end{array} \\ &\Longrightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 43 & -157 & 61 \\ -20 & 74 & -29 \\ 15 & -53 & 20 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadatak 7.28. *Gaussovom metodom invertirajte matrice:*

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, *b)* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, *c)* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 2-i \\ i & 4-2i \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, *e)* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 9 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, *g)* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

h) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

Zadatak 7.29. *Riješite matrične jednadžbe:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, *b)* $\mathbf{X} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$.

7.3.4 Rang matrice

Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

realna (odnosno kompleksna) matrica formata $m \times n$. Na njene stupce

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

možemo gledati kao na vektore prostora $\mathbb{R}^m$ (odnosno $\mathbb{C}^m$). Slično, njene retke

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1 &= [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}], \\ \mathbf{a}^2 &= [a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}], \\ &\vdots \\ \mathbf{a}^m &= [a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}] \end{aligned}$$

možemo smatrati vektorima prostora $\mathbb{R}^n$ (odnosno $\mathbb{C}^n$). To nam omogućava da govorimo o linearnoj kombinaciji, linearnoj zavisnosti i nezavisnosti stupaca (redaka) matrice $\mathbf{A}$.

Definicija 62. *Maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca matrice* $\mathbf{A}$ *zovemo* rang stupaca matrice $\mathbf{A}$, *a maksimalan broj linearno nezavisnih redaka zovemo* rang redaka matrice $\mathbf{A}$.

Primjer 7.44. *Prva dva retka matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ *su linearno nezavisna. Treći redak je linearna kombinacija prva dva:* $\mathbf{a}^3 = 2\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^3$. *Prema tome, rang redaka matrice* $\mathbf{A}$ *jednak je dva.*

Kako su prva dva stupca linearno nezavisna, a treći stupac njihova linearna kombinacija: $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$, *rang stupaca matrice* $\mathbf{A}$ *također iznosi dva.*

Teorem 7.10. *Elementarnim operacijama nad recima neke matrice, kao i elementarnim operacijama nad njenim stupcima, ne mijenjaju se ni rang stupaca ni rang redaka.*

Dokaz. Očito da se rang redaka ne mijenja permutiranjem redaka. Kako se permutiranjem redaka permutiraju na isti način koordinate svih stupaca, neće se promijeniti ni rang stupaca (vidi *Zadatak 7.10*). Slično se pokaže da se permutiranjem stupaca ne mijenjaju ni rang stupaca ni rang redaka.

Množenjem nekog retka skalarom $\lambda \neq 0$ neće se promijeniti rang redaka (vidi *Zadatak 7.9.a*). Budući da se tim množenjem kod svih stupaca množi s λ jedna te ista koordinata, neće se promijeniti ni rang stupaca (vidi *Zadatak 7.11.a*). Slično se pokaže da se množenjem nekog stupca sa skalarom $\lambda \neq 0$ ne mijenjaju ni rang stupaca ni rang redaka.

Dodavanjem nekom retku nekog drugog retka prethodno pomnoženog s bilo kojim skalarom μ ne mijenja se rang redaka (vidi *Zadatak 7.9.b*). Tim postupkom kod svih stupaca dodaje se jednoj koordinati neka druga koordinata prethodno pomnožena s μ. Stoga se neće promijeniti rang stupaca (vidi *Zadatak 7.11.b*). Slično se pokaže da se ovom elementarnom operacijom nad stupcima neće promijeniti ni rang stupaca ni rang redaka. □

Elementarnim operacijama i nad stupcima i nad recima matricu $\mathbf{A}$ možemo svesti na matricu oblika:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

koja u gornjem lijevom kutu ima jediničnu matrica r-tog reda. Za matricu $\mathbf{H}$ kažemo da je **Hermiteova forma matrice A**.

Budući da se elementarnim operacijama nad recima i stupcima matrice $\mathbf{A}$ ne mijenjaju ni rang redaka ni rang stupaca, te da matrica $\mathbf{H}$ ima r linearno nezavisnih stupaca i r linearno nezavisnih redaka, dokazali smo sljedeći teorem:

Teorem 7.11 (o rangu matrice). *Rang stupaca matrice* $\mathbf{A}$ *jednak je rangu redaka matrice* $\mathbf{A}$. *Taj broj zove se* rang matrice $\mathbf{A}$ *i označava se s* $r(\mathbf{A})$.

Primjer 7.45. *Odredimo rang matrica:*

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementarnim operacijama nad recima i stupcima dobivamo:

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_2 & S_1 & S_3 & S_4 & S_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -S_1 & S_2+2S_1 & S_3+3S_1 & S_4-2S_1 & S_5+4S_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_1 & S_3 & S_5 & S_4 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_1 & S_2 & S_3-S_2 & S_4+5S_2 & S_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

odakle vidimo da je $r(\mathbf{A}) = 2$.

$$b)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2-2R_1 \\ R_3-5R_1 \\ R_4-7R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-R_3 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2-3S_1 & S_3-5S_1 & S_4+S_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & -S_2/7 & S_3-\frac{13}{7}S_2 & S_4+\frac{6}{7}S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & -\frac{1}{4}S_4 & S_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_3 \end{array} \Rightarrow r(\mathbf{B}) = 3.$$

Zadatak 7.30. *Ispitajte rang matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ *u ovisnosti o parametru* λ.

Primjedba 7.16. *Može se pokazati (vidi [20], [19]) da je kvadratna matrica* $\mathbf{A}$ n*-tog reda regularna onda i samo onda ako je* $r(\mathbf{A}) = n$*, tj. ako su njeni stupci, kao i reci, linearno nezavisni.*

7.4 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi

Mnogi praktični problemi i problemi iz primjene vode na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

U srednjoj školi naučili smo rješavati „male” sustave linearnih jednadžbi, tj. sustave od nekoliko jednadžbi s malo nepoznanica. Pri tome smo nepoznanice označavali s $x, y, z, \ldots$. Prisjetimo se na nekoliko primjera, uz geometrijsku interpretaciju rješenja.

Primjer 7.46. *Riješimo sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice:*

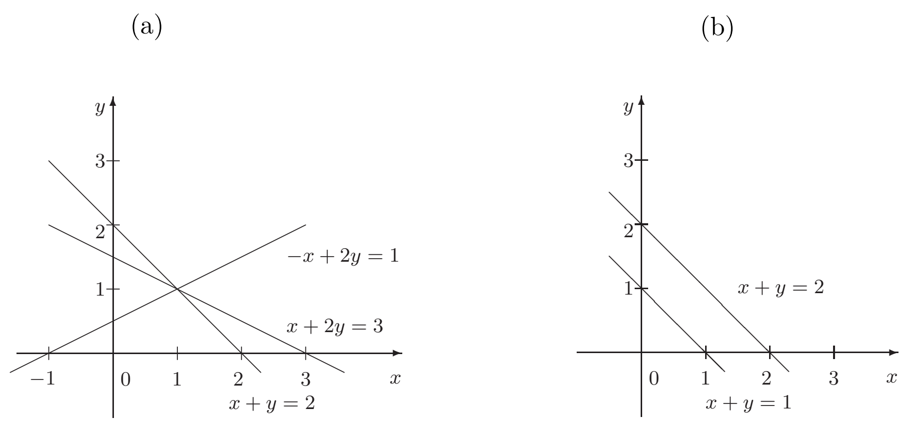
$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ -x & + & 2y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3. \end{array}$$

Ako iz prve jednadžbe izračunamo nepoznanicu x i uvrstimo u preostale dvije jednadžbe dobivamo:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ & & y & = & 1 \\ & & y & = & 1, \end{array}$$

odakle vidimo da polazni sustav ima jedinstveno rješenje: $(x, y) = (1, 1)$.

Geometrijski smisao rješenja ovog sustava prikazan je na Slici 7.18a). *Rješenje je sjecište pravaca zadanih jednadžbama sustava.*



Slika 7.18: Geometrijski smisao rješavanja sustava linearnih jednadžbi

Primjer 7.47. *Sustav*

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}$$

*nema rješenje jer nema takvih brojeva x, y čiji bi zbroj istovremeno bio i 1 i 2. Geometrijski gledano, to znači da se pravci koji odgovaraju jednadžbama sustava ne sijeku (*Slika 7.18b)*).*

Primjer 7.48. *Sustav*

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

ima beskonačno mnogo rješenja. Naime, drugu jednadžbu dobivamo množenjem prve s 2 *pa sve točke koje leže na pravcu* $x+y=1$ *rješavaju ovaj sustav.*

Mi ćemo proučavati sustave od m linearnih algebarskih jednadžbi s n nepoznanica. Nepoznanice ćemo označavati s $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Opći oblik takvog sustava glasi

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{7.27}$$

Pri tome realne (kompleksne) brojeve a_{ij} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ nazivamo **koeficijentima** sustava, a realne (kompleksne) brojeve b_i, $i = 1, \ldots, m$, **slobodnim koeficijentima** sustava.

Uočite da prvi indeks i u a_{ij} označava redni broj jednadžbe, a drugi indeks j redni broj nepoznanice uz koju se taj koeficijent nalazi.

Za sustav (7.27) kažemo da je **homogen** ako su svi slobodni koeficijenti jednaki nuli, tj. ako je $b_1 = 0$, $b_2 = 0, \ldots, b_m = 0$. U suprotnom, ako je barem jedan od slobodnih koeficijenata različit od nule, za sustav (7.27) kažemo da je **nehomogen**.

Za uređenu n-torku $(x'_1, \ldots, x'_n)$ brojeva kažemo da je **rješenje** sustava (7.27) ako je

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x'_1 & + & a_{12}x'_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x'_n & = & b_1 \\ a_{21}x'_1 & + & a_{22}x'_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x'_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x'_1 & + & a_{m2}x'_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x'_n & = & b_m. \end{array}$$

Sustav je **rješiv** ili **konzistentan** ako ima barem jedno rješenje. U suprotnom za sustav kažemo da je **nerješiv** ili **nekonzistentan** ili **kontradiktoran**. Riješiti sustav, tj. naći opće rješenje, znači pronaći sva njegova rješenja.

Za dva sustava tipa (7.27) s eventualno različitim brojem jednadžbi kažemo da su **ekvivalentni** ako je svako rješenje jednog ujedno rješenje i drugog sustava i obratno.

Matrični zapis sustava. Sustavu (7.27) pridružit ćemo **matricu sustava $\mathbf{A}$**, **stupac slobodnih koeficijenata $\mathbf{b}$** i **vektor nepoznanica $\mathbf{x}$**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sada sustav (7.27) možemo kraće zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Blok-matricu

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

zovemo **proširenom matricom sustava** (7.27). Vertikalnu crtu stavljamo samo iz razloga da vizualno odvojimo stupac slobodnih koeficijenata od matrice sustava. Na proširenu matricu $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ možemo gledati kao na kraći način zapisivanja sustava (bez nepoznanica i bez znakova jednakosti, što se podrazumijeva), pri čemu nam i-ti redak matrice $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ predstavlja i-tu jednadžbu.

7.4.1 Gaussova metoda

U ovoj točki opisat ćemo tzv. *Gaussovu metodu* (*metodu eliminacije*) za rješavanje sustava od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Najprije ilustrirajmo tu metodu na jednom primjeru.

Primjer 7.49. *Riješimo sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \end{array}$$

Zamjenom mjesta jednadžbi (permutacijom) dobivamo ekvivalentan sustav:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \end{array}$$

Iz prve jednadžbe izračunamo (eliminiramo) $x_1 = 31 - 2x_2 - 4x_3$*, i to uvrstimo u preostale dvije jednadžbe. Uočimo da je efekt isti kao da smo prvu jednadžbu pomnožili po redu s* -5 *i* -3*, zatim pribrojili drugoj i trećoj jednadžbi. Dobivamo ekvivalentan sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \\ & - & 9x_2 & - & 18x_3 & = & -126 \\ & - & 7x_2 & - & 11x_3 & = & -83 \end{array}$$

Drugu jednadžbu podijelimo s -9*, a treću s* -1*:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ & & 7x_2 & + & 11x_3 & = & 83. \end{array}$$

Sada iz druge jednadžbe izračunamo $x_2 = 14 - 2x_3$*, i to uvrstimo u treću jednadžbu. Efekt je isti kao da smo drugu jednadžbu pomnožili sa* -7 *i dodali trećoj jednadžbi. Dobivamo ekvivalentan sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ & & & - & 3x_3 & = & -15. \end{array}$$

Ovaj sustav ima gornje trokutasti oblik ($a_{ij} = 0$ *za* $i > j$) *i rješavamo ga unazad (odozdo prema gore):*

Iz treće jednadžbe dobivamo $x_3 = 5$*. Ako u drugu jednadžbu stavimo* $x_3 = 5$*, dobivamo* $x_2 = 4$*. Sada iz prve jednadžbe dobivamo* $x_1 = 3$*. Dakle,* $(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 5)$ *je rješenje polaznog sustava, i to jedinstveno (provjerite!).*

U prethodnoj točki definirali smo elementarne operacije nad jednadžbama sustava (vidi *Definiciju 61* i *Primjedbu 7.15*). Istaknimo ih još jednom: permutiranje jednadžbi, množenje jednadžbe skalarom različitim od nule, dodavanje jednadžbi neke druge jednadžbe prethodno pomnožene proizvoljnim skalarom. Lako se vidi da se elementarnim operacijama nad jednadžbama nekog sustava dobiva ekvivalentni sustav. Nadalje, kao što smo vidjeli na prethodnom primjeru, efekt koji se dobiva eliminacijom neke nepoznanice iz jedne jednadžbe i njenim uvrštavanjem u preostale jednadžbe može se postići i elementarnim operacijama nad jednadžbama.

Gaussova metoda sastoji se u tome da se polazni sustav elementarnim operacijama nad jednadžbama svede na ekvivalentni sustav u gornjem trokutastom oblikom ($a_{ij} = 0$ za $i > j$) koji se rješava unazad (odozdo prema gore).

Shematizirana Gaussova metoda. Svakoj elementarnoj operaciji nad jednadžbama sustava odgovara ta ista elementarna operacija nad recima proširene matrice $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ sustava. Tako, primjerice, množenju i- te jednadžbe skalarom $\lambda \neq 0$ odgovara množenje i-tog retka matrice $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ tim istim skalarom λ. Shematizirana Gaussova metoda nije ništa drugo nego kraći zapis Gaussove metode pomoću proširene matrice $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$. Proširena matrica $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ svodi se elementarnim operacijama nad recima, uključivši i prenumeraciju nepoznanica (ako je potrebno), na gornje trokutasti oblik ($\alpha_{ij} = 0$ za $i > j$):

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{k+1} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_m \end{array}\right] \tag{7.28}$$

Bez smanjenja općenitosti, u daljnjem možemo pretpostaviti da prenumeracija nepoznanica nije bila potrebna. Nadalje, možemo izostaviti nul-retke (Zašto?). Iz navedenog gornje trokutastog oblika vidimo da je polazni sustav kontradiktoran onda i samo onda ako iščezavaju svi elementi nekog retka, osim odgovarajućeg slobodnog koeficijenta. Ako sustav nije kontradiktoran, rješavamo ga unazad. Uočite da u tom slučaju za $k = n$ sustav ima jedinstveno rješenje, dok za $k < n$ ima beskonačno mnogo rješenja, koja dobivamo tako da nepoznanice $x_{k+1}, \ldots, x_n$ smatramo slobodnim parametrima (tj. mogu primiti vrijednost bilo kojeg realnog broja).

Primjer 7.50. *Riješimo prethodni primjer shematiziranom Gaussovom metodom:*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 31 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 5R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 11 & 83 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ -\frac{1}{9}R_2 \\ -R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 7R_2 \end{array}$$

Rješavanjem unazad dobivamo rješenje: $(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 5)$.

Primjer 7.51. *Shematiziranom Gaussovom metodom treba riješiti sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \\ 9x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 13 \end{array}$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 4R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Iz zadnjeg retka vidimo da je $x_4 = 1$. *Prvi redak predstavlja jednadžbu* $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$, *odakle je* $x_1 = -\frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}$. *Opće rješenje polaznog sustava glasi:*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}, t, s, 1\right), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Dakle, sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 7.52. *Riješimo sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 7x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \end{array}$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ 3R_2 - 7R_1 \\ 3R_3 - 5R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_2. \end{array}$$

U zadnjem retku svi koeficijenti jednaki su nuli, a odgovarajući slobodni koeficijent je različit od nule. To znači da sustav nema rješenje.

Primjedba 7.17. *Umjesto svođenja sustava na gornje trokutasti oblik primjenom ranije spomenutih (vidi* Definiciju 61*, str. 255) Gaussovih elementarnih operacija nad recima proširene matrice, proširenu matricu možemo svesti na dijagonalni oblik. Tada se rješenje sustava direktno može očitati. Taj postupak naziva se* Gauss-Jordanovom metodom*.*

Primjer 7.53. *Riješimo sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 31 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 8 & 0 & 3 & 39 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 7 & 0 & 6 & 51 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1+R_2 \\ R_2 \\ R_3+2R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -12 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 7 & 0 & 6 & 51 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1-R_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & -1 & 10 & 46 \\ 0 & 0 & 27 & 135 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2-3R_1 \\ R_3-7R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & -1 & 10 & 46 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3/27 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1+3R_3 \\ R_2-10R_3 \\ R_3 \end{array}$$

Neposrednim očitavanjem dobivamo rješenje: $(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 5)$.

Zadatak 7.31. *Riješite sustave:*

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 8x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 21 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 15 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 18 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 11x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 7x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Zadatak 7.32. *U ovisnosti o parametru λ diskutirajte rješenje sustava:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \lambda x_4 & = & 1
\end{array}$$

7.4.2 Uvjet rješivosti sustava linearnih jednadžbi

Sustav

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \tag{7.29}$$

možemo zapisati u vektorskom obliku:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ili kraće

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}, \tag{7.30}$$

gdje su $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ stupci matrice sustava $\mathbf{A}$, a $\mathbf{b}$ vektor slobodnih koeficijenata.

Iz (7.30) vidimo da riješiti sustav (7.29) znači pronaći sve moguće prikaze vektora $\mathbf{b}$ kao linearne kombinacije vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Sustav (7.29) je rješiv onda i samo onda ako se vektor $\mathbf{b}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Budući da je vektor $\mathbf{b}$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ onda i samo onda ako je rang matrica $\mathbf{A}$ toga sustava jednak rangu proširene matrica $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$, dokazali smo sljedeći teorem:

Teorem 7.12 (Kronecker-Capelli-Rouché)**.** *Sustav (7.29) ima rješenje onda i samo onda ako matrica toga sustava $\mathbf{A}$ i proširena matrica $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ imaju isti rang.*

7.5 Determinante

Determinanta $\mathbf{A} \mapsto \det \mathbf{A}$ je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Osim oznake $\det \mathbf{A}$, za determinantu kvadratne matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

često se koristi i oznaka

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice n-tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n-1)$-vog reda. Pođimo redom.

Definicija 63 (Determinanta prvog reda)**.** Determinanta matrice $\mathbf{A}=[a]$ *je broj* a*.*

Prije nego što definiramo determinantu matrice drugog reda razmotrimo sustav:

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2. \end{array} \tag{7.31}$$

On je ekvivalentan sustavu

$$\begin{array}{rcl} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & = & b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{array} \tag{7.32}$$

koji se dobiva ovako: prvu jednadžbu sustava (7.31) pomnožimo s a_{22} i pribrojimo joj drugu jednadžbu prethodno pomnoženu s $-a_{12}$. Tako dobivamo prvu jednadžbu. Druga jednadžba dobiva se tako da drugu jednadžbu sustava (7.31) pomnožimo s a_{11}, a prvu jednadžbu s $-a_{21}$ i zbrojimo ih.

Struktura sustava (7.32) navodi nas da definiramo:

Definicija 64 (Determinanta drugog reda)**.** Determinantom matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *zovemo broj* $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Sada pomoću determinante sustav (7.32) možemo kraće zapisati u obliku:

$$x_1 D = D_1, \quad x_2 D = D_2, \tag{7.33}$$

gdje su

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Uočimo da je D determinanta matrice sustava (7.31). Determinanta D_i, $i = 1, 2$, dobiva se iz determinante D, tako da se njen i-ti stupac zamijeni stupcem slobodnih koeficijenata.

Iz (7.33) zaključujemo:

- ako je $D = 0$, da bi sustav (7.31) bio rješiv mora biti $D_1 = 0$ i $D_2 = 0$,
- sustav (7.31) ima jedinstveno rješenje onda i samo onda ako je $D \neq 0$. U tom slučaju rješenje je dano s

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

Primjedba 7.18. *Prethodne dvije tvrdnje poznate su pod nazivom* Cramerovo pravilo. *U* Poglavlju 7.5.2 *to ćemo pravilo poopćiti na sustave od n jednadžbi s n nepoznanica.*

Primjer 7.54. *Riješimo Cramerovim pravilom sustave:*

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot(-1) = 3$, $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = -1$,

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 1\cdot(-1) = 4.$

Kako je $D \neq 0$, *sustav ima jedinstveno rješenje*

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{4}{3}.$$

b) Budući da je $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 0$, *da bi sustav bio rješiv, mora biti* $D_1 = D_2 = 0$. *Kako je* $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3 \neq 0$, *ovaj sustav nema rješenje.*

Kao motivaciju za definiciju determinante matrice trećeg reda, razmotrimo sustav:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3. \end{array} \tag{7.34}$$

Pomnožimo li jednadžbe toga sustava redom s

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}), \quad a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},$$

ili što je isto, s

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

a zatim dobivene jednadžbe zbrojimo, dobivamo jednadžbu:

$$\begin{gathered} x_1 \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right) = \\ b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{7.35}$$

Determinantu matrice trećeg reda definirat ćemo pomoću determinante drugog reda:

Definicija 65 (Determinanta trećeg reda)**.** Determinanta matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

je broj $\det \mathbf{A} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Sada jednakost (7.35) možemo zapisati u obliku

$$x_1 D = D_1, \tag{7.36}$$

gdje su

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Slične jednadžbe imamo za x_2 i x_3:

$$x_2 D = D_2, \quad x_3 D = D_3, \tag{7.37}$$

gdje su

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Uočimo da je D determinanta matrice sustava (7.34), a D_i, $i = 1, 2, 3$, determinanta koja se iz determinante D dobiva zamjenom i-tog stupca stupcem slobodnih koeficijenata.

Iz (7.36) i (7.37) dobivamo Cramerovo pravilo za rješavanje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

- ako je $D = 0$, a sustav (7.34) rješiv, onda mora biti $D_1 = D_2 = D_3 = 0$,
- sustav (7.34) ima jedinstveno rješenje onda i samo onda ako je $D \neq 0$. U tom slučaju rješenje je dano s

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Primjer 7.55. *Riješimo Cramerovim pravilom sustave:*

a) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 5. \end{array}$

a) $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} =$ 168. *Kako je $D = 0$ a $D_1 \neq 0$, sustav nema rješenje. Determinante D_2 i D_3 ne moramo računati.*

b) $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=-2.$

Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje, jer je $D \neq 0$. *Već smo izračunali da je* $D_1=\begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix}=168$, $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=93$, $D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -4 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}=-31.$

Rješenje sustava je: $x_1=\frac{D_1}{D}=-84$, $x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{93}{2}$, $x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{31}{2}$.

Do sada smo definirali determinantu prvog, drugog i trećeg reda. Sada ćemo definirati determinantu n-tog reda. Neka je

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

kvadratna matrica n-tog reda. S $\mathbf{A}_{kl}$ $(k,l=1,\dots,n)$ označimo kvadratnu matricu $(n-1)$-vog reda koja se dobiva iz matrice $\mathbf{A}$ ispuštanjem k-tog retka i l-tog stupca.

Definicija 66 (Determinanta n-tog reda)**.** Determinanta matrice *(7.38) je broj*

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{11}\det \mathbf{A}_{11} - a_{21}\det \mathbf{A}_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det \mathbf{A}_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\det \mathbf{A}_{k1}. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Primjer 7.56. *Izračunajmo determinantu matrica:*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 7\left(5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right) - 3\left(6 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right)$$
$$+5\left(6 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\right) - 5\left(6 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\right)$$
$$= 7 \cdot 37 - 3 \cdot (-22) + 5 \cdot (-35) - 5 \cdot 32 = -10,$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \\ b & c & d \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & c \\ b & c & d \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ b & c & d \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}$$
$$= -\left(\begin{vmatrix} 0 & c \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a \\ c & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} 1 & b \\ c & d \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & a \\ c & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}\right)$$
$$-a\left(\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}\right)$$
$$= -(-c^2 - d + ac + bc) + (d - bc + b^2 - ab) - a(c + b - a)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc + 2d.$$

Na prethodnom primjeru vidimo da računanje determinante prema definicijskoj formuli (7.39) predstavlja težak posao. Stoga ćemo navesti osnovna svojstva determinante koja nam omogućavaju brže računanje. Dokazat ćemo samo neka od tih svojstava. Dokaz preostalih svojstava zainteresirani čitatelj može naći u [20], [19].

D 1. *Matrica* $\mathbf{A}$ *i transponirana matrica* $\mathbf{A}^T$ *imaju jednake determinante, tj.*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T.$$

Primjer 7.57. *Ilustrirajmo navedeno svojstvo na dva primjera:*

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$

b) $$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -24.$$

D 2. *Ako je* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *trokutasta matrica* n*-tog reda, onda je*

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, budući da je $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$, pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ gornje trokutasta matrica. Tada tvrdnja direktno slijedi iz definicije determinante. □

Primjer 7.58. *Primjerice*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 24 = 1 \cdot 4 \cdot 6.$$

Svojstvom D.1 iskazana je ravnopravnost redaka i stupaca determinante. Naime, reci [stupci] matrice $\mathbf{A}$ podudaraju se sa stupcima [recima] matrice $\mathbf{A}^T$. Zbog toga sljedeća svojstva determinante koja su izkazana u „terminologiji stupaca" ujedno vrijede i za retke.

D 3. *Ako dva stupca determinante zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak.*

Primjer 7.59. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -24$ *(vidi* Primjer 7.57*). Zamjenom prvog i trećeg stupca dobivamo:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 24.$$

D 4. *Ako matrica* $\mathbf{A}$ *ima dva jednaka stupca, onda je* $\det \mathbf{A} = 0$.

Dokaz. Ako ta dva jednaka stupca zamijene mjesta, prema svojstvu D.3 determinanta novodobivene matrice iznosi $-\det \mathbf{A}$. S druge strane, budući da je novodobivena matrica jednaka matrici $\mathbf{A}$, njena determinanta je $\det \mathbf{A}$. Iz $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$ dobivamo da je $\det \mathbf{A} = 0$. □

Primjer 7.60. *Primjerice*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 6 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

D 5. *Determinanta je linearna u svakom svom stupcu, tj. ako je i-ti stupac $\mathbf{a}_i$ matrice $\mathbf{A}$ oblika $\mathbf{a}_i = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, gdje su $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ stupci, a λ, μ skalari, onda je*

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n] \\ &= \lambda \det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n] \\ &\quad + \mu \det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n].\end{aligned}$$

Primjer 7.61. *Provjerimo prethodno svojstvo na determinanti*

$$\begin{vmatrix} 6 & 2\cdot 3 + 3\cdot 1 & 0 \\ 1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & 7 \\ -1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -162.$$

Prema Primjeru 7.57 *je* $2\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -48$. *Nadalje, budući da je*

$$3\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\left(6\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\right) = -114,$$

vrijedi

$$\begin{vmatrix} 6 & 2\cdot 3 + 3\cdot 1 & 0 \\ 1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & 7 \\ -1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

D 6. *Ako iščezavaju svi elementi nekog stupca matrice $\mathbf{A}$, onda je*

$$\det \mathbf{A} = 0.$$

Dokaz. Nul stupac $\mathbf{0}$ zapišemo u obliku $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Prema svojstvu D.5 dobivamo $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{A}$, odakle je $\det \mathbf{A} = 0$. □

Primjer 7.62. *Primjerice*

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

I sljedeće svojstvo determinante lako se dobiva iz svojstva 5.

D 7. *Determinanta se množi skalarom tako da se samo jedan stupac pomnoži tim skalarom, tj. zajednički faktor svih elemenata nekog stupca može se izlučiti ispred determinante.*

Primjer 7.63. *Pokažimo da je* $\begin{vmatrix} 6\lambda & 3 & 0 \\ \lambda & 0 & 7 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$*:*

$\begin{vmatrix} 6\lambda & 3 & 0 \\ \lambda & 0 & 7 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6\lambda \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -24\lambda.$ *U* Primjeru 7.57 *pokazali smo da je* $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -24.$ *Dakle,* $\begin{vmatrix} 6\lambda & 3 & 0 \\ \lambda & 0 & 7 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

D 8. *Determinanta ne mijenja vrijednost ako nekom stupcu determinante dodamo linearnu kombinaciju preostalih stupaca.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{B}$ matrica koju dobivamo iz matrice $\mathbf{A}$ tako da k-tom stupcu $\mathbf{a}_k$ matrice $\mathbf{A}$ dodamo linearnu kombinaciju $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i$ preostalih stupaca. Zbog linearnosti determinante (svojstvo D.5) je

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \det \left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \right] \\ &= \det \left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\right] + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i \det \left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\right]. \end{aligned}$$

Kako svaka od matrica $[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]$ $(i \neq k)$ ima po dva stupca jednaka, prema svojstvu D.4 je $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i \det [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n] = 0$. Dakle, $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$. □

Primjer 7.64. *Znamo da je* $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -24$ *(*Primjer 7.57*). Dodajmo posljednjem stupcu dvostruki prvi stupac. Dobivamo:*

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -24.$$

Postupajući slično dokazu prethodnog svojstva, lako je dokazati sljedeće svojstvo:

D 9. *Ako je neki stupac determinante linearna kombinacija preostalih stupaca te determinante, onda je determinanta jednaka nuli.*

Na kraju navedimo kriterij regularnosti matrice pomoću determinante:

D 10. *Matrica* $\mathbf{A}$ *je regularna onda i samo onda ako je* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Zadatak 7.33. *Izračunajte determinante:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \ b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ c) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \ d) \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Na kraju ove točke navedimo bez dokaza osnovni teorem teorije determinanata (vidi [20], [19]):

Teorem 7.13 (Binet-Cauchyjev teorem)**.** *Ako su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *kvadratne matrice istog reda, onda je*

$$\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \tag{7.40}$$

Zadatak 7.34. *Za matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *provjerite Binet-Cauchyjev teorem.*

7.5.1 Laplaceov razvoj determinante

Determinanta se može razviti po bilo kojem retku ili stupcu. O tome nam govori Laplaceov razvoj determinante. Krenimo redom.

Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kvadratna matrica n-tog reda. Kao i do sada, s $\mathbf{A}_{ki}$ označimo kvadratnu matricu $(n-1)$-vog reda koja se iz dobiva iz matrice $\mathbf{A}$ tako da se ispuste k-ti redak i i-ti stupac.

Neka je

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) = [\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

matrica koja se dobiva iz matrice $\mathbf{A}$ pomoću $(i-1)$ zamjena susjednih stupaca matrice $\mathbf{A}$. Uočimo da je

$$b_{k1} = a_{ki}, \quad \mathbf{B}_{k1} = \mathbf{A}_{ki}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Prema svojstvu D.3 determinante je

$$\det \mathbf{B} = (-1)^{i-1} \det \mathbf{A}.$$

S druge strane, primjenom definicije determinante (66) imamo:

$$\det \mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{k1} \det \mathbf{B}_{k1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{ki} \det \mathbf{A}_{ki},$$

odnosno

$$(-1)^{i-1} \det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{ki} \det \mathbf{A}_{ki}.$$

Množenjem posljednje jednakosti s $(-1)^{i-1}$ dobivamo:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \det \mathbf{A}_{ki}. \tag{7.41}$$

Teorem 7.14 (Laplaceov razvoj determinante)**.**

- *po i-tom stupcu:* $\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \det \mathbf{A}_{ki}$,
- *po i-tom retku:* $\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det \mathbf{A}_{ik}$.

Dokaz. Formula (7.41) predstavlja Laplaceov razvoj determinante po i-tom stupcu. Iskoristimo li činjenicu da je $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$, iz (7.41) dobivamo Laplaceov razvoj po i-tom retku. □

Primjedba 7.19. *Uočimo da Laplaceov razvoj determinante po prvom stupcu nije ništa drugo nego li definicijska formula determinante (66).*

U literaturi se često za definiciju determinante koristi Laplaceov razvoj po prvom retku:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det \mathbf{A}_{1k}.$$

Primjer 7.65. *Napišimo Laplaceove razvoje determinante*

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

po trećem stupcu i drugom retku:

a) Laplaceov razvoj po trećem stupcu:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-4\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

b) Laplaceov razvoj po drugom retku:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+0\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Uočimo da je determinantu lakše izračunati razvojem po drugom retku. Budući da je $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -10$ *(provjerite), determinanta iznosi* 30.

7.5.2 Cramerovo pravilo

Cramerovo pravilo služi za rješavanje tzv. kvadratnih sustava tj. sustava kod kojih je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica. Neka je zadan sustav od n jednadžbi s n nepoznanica:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array} \tag{7.42}$$

Zapišimo ga u vektorskom obliku:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}, \tag{7.43}$$

gdje su $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ stupci matrice sustava $\mathbf{A}$, a $\mathbf{b}$ vektor slobodnih koeficijenata.

Neka je

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinanta matrice sustava (7.42). Nadalje, neka je

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

determinanta koju se dobiva iz determinante D zamjenom i-tog stupca stupcem slobodnih koeficijenata.

Višestrukom primjenom sedmog i osmog svojstva determinante dobivamo:

$$\begin{aligned} x_i D &= x_i \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &\overset{\text{D.7}}{=} \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, x_i\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &\overset{\text{D.8}}{=} \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &\overset{(7.43)}{=} \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n] = D_i. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x_i D = D_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

odakle dobivamo **Cramerovo pravilo**:

- ako je $D = 0$, da bi sustav (7.42) bio rješiv mora biti

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0,$$

- sustav (7.42) ima jedinstveno rješenje onda i samo onda ako je $D \neq 0$. U tom slučaju rješenje je dano s

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, n.$$

7.5.3 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrice

Mnogi problemi teorijske i primijenjene matematike vode na problem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora:

> *Neka je zadana kvadratna matricu* $\mathbf{A}$ *n-tog reda. Za koje skalare* λ *postoji vektor-stupac* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *takav da je* $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$*?*

Vezano uz ovo pitanje, prirodno se postavlja zahtjev da se za svaki takav skalar λ odrede svi vektori za koje vrijedi gornja jednakost.

Definicija 67. *Neka je* $\mathbf{A}$ *kvadratna matrica n-tog reda. Za skalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *kažemo da je* svojstvena *ili* karakteristična vrijednost matrice $\mathbf{A}$ *ako postoji vektor* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *takav da je* $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$*. Nadalje, za takav vektor* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *kažemo da je* svojstven *ili* karakterističan vektor matrice $\mathbf{A}$ *pridružen svojstvenoj vrijednosti* λ*.*

Kako odrediti sve svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ i njima pridružene svojstvene vektore? Prema definiciji, skalar λ je svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$ onda i samo onda ako postoji vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ takav da je $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, tj. ako matrična jednadžba

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{7.44}$$

ima netrivijalno rješenje. Na matričnu jednadžbu (7.44) možemo gledati kao na sustav od n jednadžbi sa n nepoznanica. Prema Cramerovom pravilu taj sustav ima jedinstveno trivijalno rješenje ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) onda i samo onda ako je $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$. Dakle, matrična jednadžba (7.44) imat će netrivijalno rješenje onda i samo onda ako je

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0.$$

Iz definicije determinante (66) slijedi $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ polinom n-tog stupnja u λ.

Definicija 68. *Polinom*

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

zovemo svojstven *ili* karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$*.*

Dakle, skalar λ je svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$ onda i samo onda ako je $\kappa(\lambda) = 0$, tj. ako je λ nul-točka svojstvenog polinoma matrice $\mathbf{A}$.

Da bi odredili sve svojstvene vrijednosti i njima pridružene svojstvene vektore, postupamo ovako:

1. rješenja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $k \leq n$, jednadžbe
$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$
jesu svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$,

2. rješavanjem sustava
$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
dobivamo svojstvene vektore pridružene svojstvenoj vrijednosti λ_i, $i=1,\ldots,k$.

Primjer 7.66. *Odredimo svojstvene vrijednosti i njima pridružene svojstvene vektore matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -7 & -6 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$*:*

Svojstveni polinom glasi (provjerite):

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 10 & -4 & 2 \\ 7 & \lambda + 6 & -7 \\ -4 & -8 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 - 64\lambda + 512$$
$$= (\lambda - 8)^2(\lambda + 8),$$

odakle vidimo da matrica $\mathbf{A}$ *ima dvije svojstvene vrijednosti:* $\lambda_1 = -8$*,* $\lambda_2 = 8$*. Odredimo njima pridružene svojstvene vektore:*

a) Za $\lambda_1 = -8$ *matrična jednadžba (7.44) prelazi u sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} -18x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 7x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & - & 8x_2 & - & 12x_3 & = & 0. \end{array}$$

Rješenje ovog sustava glasi (provjerite): $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}x_3, -\frac{7}{4}x_3, x_3\right)$*, pri čemu je nepoznanica* x_3 *slobodna. Prema tome, svi vektori* $\mathbf{x}$ *oblika*

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -7/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \neq 0$$

jesu svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -8$*. Zahtjev* $x_3 \neq 0$ *potreban je zbog toga što nul-vektor ne smatramo svojstvenim vektorom.*

b) Za $\lambda_2 = 8$ *matrična jednadžba (7.44) prelazi u sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 14x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & - & 8x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

Prva jednadžba ovog sustava dobiva se dijeljenjem treće jednadžbe s 2. *Množenjem treće jednadžbe s* $-7/3$ *dobivamo drugu jednadžbu. Prema tome, prve dvije jednadžbe su suvišne, ostaje samo treća jednadžba. Zbog toga iz treće jednadžbe dobivamo rješenje ovog sustava (provjerite):* $x_1 = -2x_2 + x_3$, *gdje su* x_2, x_3 *slobodne nepoznanice. Prema tome, svi vektori* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *oblika*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{C}$$

jesu svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 8$.

7.5.4 Definitnost kvadratne matrice

U ovoj točki navest ćemo bez dokaza neke tvrdnje koje će nam biti potrebne kod traženja lokalnih ekstrema realne funkcije više varijabli.

Definicija 69. *Za realnu kvadratnu matricu* $\mathbf{A}$ n*-tog reda kažemo da je:*

(i) pozitivno semidefinitna *ako je* $(\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) \geq 0$, *za svaki vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(ii) pozitivno definitna *ako je pozitivno semidefinitna i ako je* $(\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(iii) negativno semidefinitna *ako je* $(\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) \leq 0$, *za svaki vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(iv) negativno definitna *ako je negativno semidefinitna i ako je* $(\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(v) indefinitna *ako nije ni pozitivno semidefinitna niti negativno semidefinitna, tj. ako postoje vektori* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{y}$ *takvi da je* $(\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) > 0$ *i* $(\mathbf{Ay}|\mathbf{y}) < 0$.

Definitnost realne kvadratne matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

možemo ispitati pomoću glavnih i vodećih glavnih minora korištenjem Sylvestrovog teorem (vidi [19]). Glavni minor k-tog reda je determinanta onog dijela matrice koji se dobije izdvajanjem proizvoljnih k

redaka i k stupaca, ali tako da su skupovi indeksa odabranih redaka i stupaca identični. Vodeći glavni minori matrice $\mathbf{A}$ su:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det(\mathbf{A}).$$

Teorem 7.15 (Sylvester)**.**

i) Matrica $\mathbf{A}$ *je pozitivno definitna ako i samo ako su svi vodeći glavni minori pozitivni.*

ii) Matrica $\mathbf{A}$ *je negativno definitna ako i samo ako je matrica* $(-\mathbf{A})$ *pozitivno definitna.*

iii) Matrica $\mathbf{A}$ *je pozitivno semidefinitna ako i samo ako su svi njeni glavni minori nenegativni.*

iv) Matrica $\mathbf{A}$ *je negativno semidefinitna ako i samo ako je matrica* $(-\mathbf{A})$ *pozitivno semidefinitna.*

v) Matrica $\mathbf{A}$ *je indefinitna ako nije ni pozitivno ni negativno semidefinitna.*

Primjer 7.67. *Ispitajmo definitnost matrica:*

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -7 & 5 & -8 \\ 4 & 8 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 7 & 6 & -7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Matrica $\mathbf{A}$ *nije pozitivno definitna jer je njen prvi vodeci glavni minor negativan.*

Vodeći glavni minori matrice $(-\mathbf{A})$ *su:* $\Delta_1 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_3 = \det(-\mathbf{A}) = 320$. *Dakle, matrica* $-\mathbf{A}$ *je pozitivno definitna, pa je matrica* $\mathbf{A}$ *negativno definitna.*

b) $\Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 7 & 6 & -7 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 512$. *Matrica* $\mathbf{B}$ *je pozitivno definitna.*

Poglavlje 8

Dodaci

8.1 Interpolacija

Često za neku funkciju f nemamo analitički izraz, ali poznajemo njenu vrijednost u nekoliko točaka: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Treba odrediti vrijednost funkcije f u proizvoljnoj točki x. Ako se točka x nalazi između x_0 i x_n, govorimo o interpolaciji funkcije f; inače govorimo o ekstrapolaciji funkcije f. Ovakvi problemi česti su u praktičnim istraživanjima u fizici, tehnici itd. Funkciju f, poznatu u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$, možemo interpolirati različitim klasama funkcija: polinomima, racionalnim funkcijama, trigonometrijskim funkcijama itd. Mi ćemo se zadržati na najjednostavnijem slučaju: interpolaciji funkcije polinomom.

Pretpostavimo da je funkcija f poznata u $n+1$ točaka (zvat ćemo ih *čvorovi interpolacije*):

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n \tag{8.1}$$

u kojima redom prima vrijednosti:

$$y_0, y_1, \ldots, y_n. \tag{8.2}$$

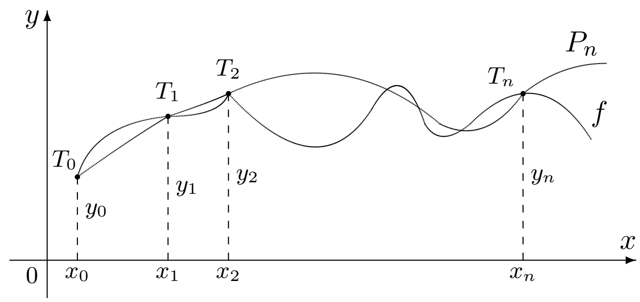
Treba pronaći polinom:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{8.3}$$

tako da bude:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{8.4}$$

Geometrijski, to znači da treba pronaći polinom P_n čiji graf prolazi točkama $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (*Slika 8.1*). Koeficijente polinoma P_n



Slika 8.1: *Interpolacija funkcije*

mogli bi odrediti iz uvjeta (8.4) rješavajući sustav od $(n+1)$ jednadžbi s $(n+1)$-nom nepoznanicom:

$$\begin{array}{l} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{array} \tag{8.5}$$

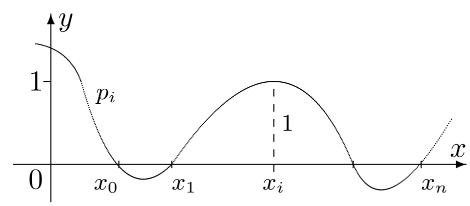
Uz uvjet (8.1) ovaj sustav je uvijek rješiv i ima jedinstveno rješenje (determinanta matrice sustava je poznata *Vandermondova* determinanta, koja je uz uvjet (8.1) različita od nule - vidi primjerice [19, 20]. Drugi problem je samo rješavanje sustava (8.5). Za veliki n i međusobno relativno bliske čvorove interpolacije tu ćemo naići na ozbiljne numeričke probleme. Matrica sustava (8.5) obično je vrlo loše uvjetovana (vidi [19], [29]). Zbog toga ćemo se upoznati s drugim metodama za rješavanje ovog problema.

8.1.1 Lagrangeova interpolacijska formula

Pogledajmo najprije jedan specijalan slučaj:
- treba pronaći polinom p_i n-tog stupnja za koji vrijedi:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \tag{8.6}$$

Geometrijski, to znači da treba pronaći polinom čiji graf presjeca os x u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, a u x_i prima vrijednost 1 (vidi *Sliku 8.2*).



Slika 8.2: *Polinom* p_i

Kako polinom p_i iščezava u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, mora biti:

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n), \quad (8.7)$$

gdje je C_i konstanta koju ćemo odrediti iz uvjeta $p_i(x_i) = 1$:

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \quad (8.8)$$

Uvrštavajući (8.8) u (8.7), dobivamo traženi polinom:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \quad (8.9)$$

Sada je lako riješiti opći problem. Polinom P_n za koji vrijedi (8.4) uz uvjet (8.1) glasi:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) \cdot y_i, \quad (8.10)$$

gdje su p_i polinomi definirani s (8.9). Očigledno je:

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x_j) \cdot y_i = p_j(x_j) \cdot y_j = y_j.$$

Polinom (8.10) obično se označava s L_n, naziva se Lagrangeov interpolacijski polinom i piše u obliku:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \quad (8.11)$$

Osim toga, polinom L_n je jedinstveni interpolacijski polinom sa svojstvom (8.4). Naime, u protivnom postojao bi još neki polinom Q_n, stupnja ne većeg od n, takav da je:

$$Q_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tada bi polinom:

$$R_n(x) = Q_n(x) - L_n(x),$$

čiji stupanj također nije veći od n, imao $n+1$ nultočaka. To je moguće jedino tako da je $R_n(x) \equiv 0$, odakle slijedi: $Q_n(x) \equiv L_n(x)$.

Primjer 8.1. *Odredimo Lagrangeov interpolacijski polinom koji prolazi točkama:* $T_0(-1, 4)$, $T_1(2, 7)$, $T_2(4, 29)$.

Prema (8.11) imamo:

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(-1-2)(-1-4)} \cdot 4 + \frac{(x+1)(x-4)}{(2+1)(2-4)} \cdot 7 + \frac{(x+1)(x-2)}{(4+1)(4-2)} \cdot 29,$$

ili nakon sređivanja:

$$L_2(x) = 2x^2 - x + 1.$$

8.1.2 Newtonov interpolacijski polinom za ekvidistantne razmake

Ako su razmaci između čvorova interpolacije ekvidistantni (jednoliki), tj. ako je:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} =: \Delta x, \tag{8.12}$$

onda se izračunavanje odgovarajućeg interpolacijskog polinoma može pojednostaviti.

Ako je $n = 1$, onda interpolacijski polinom koji prolazi točkama $T_0(x_0, y_0)$ i $T_1(x_1, y_1)$ je linearna funkcija (pravac kroz dvije točke):

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

što uz oznaku $\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$, možemo pisati:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} \cdot \frac{\Delta^1 y_0}{\Delta x}. \tag{8.13}$$

Očigledno je $P_1(x_0) = y_0$ i $P_1(x_1) = y_1$.

Uzmimo sada $n = 2$, tj. promatramo tri točke T_0, T_1, T_2. Polinom P_2, koji treba prolaziti ovim točkama, ima oblik:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} \cdot \frac{\Delta^1 y_0}{\Delta x} + \alpha \cdot (x - x_0)(x - x_1), \tag{8.14}$$

Naime, lako je vidjeti da je $P_2(x_0) = y_0$ i $P_2(x_1) = y_1$. Parametar α treba odrediti tako da bude $P_2(x_2) = y_2$. Ako u (8.14) uvrstimo $x = x_2$, dobivamo:

$$\alpha = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2 \cdot \Delta x^2}. \tag{8.15}$$

Ako uvedemo oznake:

$$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta^1 y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0,$$

onda (8.15) možemo pisati:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}, \tag{8.16}$$

pa polinom (8.14) glasi:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} \cdot \frac{\Delta^1 y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}. \tag{8.17}$$

Općenito, za $n + 1$ točku $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ dobivamo:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 &+ \frac{x - x_0}{1!} \cdot \frac{\Delta^1 y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \cdots \\ &\cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{n!} \cdot \frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}, \end{aligned} \tag{8.18}$$

gdje je:

$$\Delta^1 y_i = y_{i+1} - y_i, \ldots, \Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i, \quad i = 0, \ldots, n - 1.$$

Polinom (8.18) nazivamo Newtonov interpolacijski polinom n-tog reda za ekvidistantne razmake.

Primjer 8.2. *Treba odrediti* Newtonov interpolacijski polinom *za točke* $T_0(-2, -5)$*,* $T_1(0, -5)$*,* $T_2(2, 3)$*,* $T_3(4, 211)$*,* $T_4(6, 1195)$*.*

Čvorovi interpolacije su ekvidistantno raspoređeni i $\Delta x = 2$. Diferencije u (8.18) izračunat ćemo pomoću tablice:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	-5				
		0			
0	-5		8		
		8		192	
2	3		200		384
		208		576	
4	211		776		
		984			
6	1195				
	$\sum$	1200	984	768	384

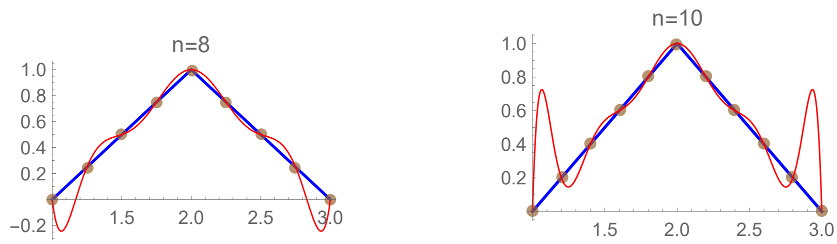
Primijetimo da suma svakog stupca odgovara razlici posljednjeg i prvog broja u prethodnom stupcu. Prema (8.18) imamo:

$$\begin{aligned}P_4(x) =& -5 + \frac{x+2}{1!}\cdot\frac{0}{2} + \frac{(x+2)x}{2!}\cdot\frac{8}{4} + \frac{(x+2)x(x-2)}{3!}\cdot\frac{192}{8}\\ &+ \frac{(x+2)x(x-2)(x-4)}{4!}\cdot\frac{384}{16}\end{aligned}$$

odakle, nakon sređivanja, dobivamo:

$$P_4(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5.$$

Primjer 8.3. *Zadana je funkcija $f(x) = 1 - |x-1|$, $x \in [0,2]$. Pronađimo interpolacijski polinom koji će prolaziti točkama $(x_i, f(x_i))$, $x_i = \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$*



Slika 8.3: *Oscilacije interpolacijskog polinoma na rubovima*

Na *Slici 8.3* prikazan je graf funkcije f i odgovarajući interpolacijski polinomi za $n = 8$ i $n = 10$. Vidi se da na rubovima područja interpolacije dolazi do jakih oscilacija, zbog čega je ovakav interpolacijski polinom praktično neupotrebljiv. Zbog toga su se prije 30-tak godina pojavile tzv. spline-aproksimacije, kod kojih je izbjegnut ovaj nedostatak (za više detalja vidi [29]).

8.2 Broj e

Pokažimo da je niz (e_n) realnih brojeva definiran općim članom

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergentan. U tu svrhu prema *Teoremu 3.4, str. 103* dovoljno je pokazati da je ovaj niz strogo rastući i omeđen.
Najprije primijetimo da je $e_1 = 2$, $e_2 = 2.25$. Nadalje, za $n \geq 2$ primjenom binomne formule dobivamo

$$\begin{aligned} e_n = & \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\cdot n^k} \\ = & \ 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Slično se dobiva:

$$e_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Članovi kod e_n su manji od odgovarajućih članova kod e_{n+1}, a osim toga e_{n+1} ima dodatni pozitivan član. Stoga je

$$e_n < e_{n+1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

tj. niz (e_n) je strogo rastući. Nadalje, za donju među možemo uzeti $e_1 = 2$.

Iz nejednakosti $k! \geq 2^{k-1}$ (vidi *Zadatak 1.6, str. 12*) i formule za zbroj prvih n članova geometrijskog niza dobivamo:

$$\begin{aligned} e_n = & \ 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ \leq & \ 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 3, \end{aligned}$$

pa za gornju među možemo uzeti broj 3.

8.3 Neki važniji limesi

Pokažimo da vrijede formule

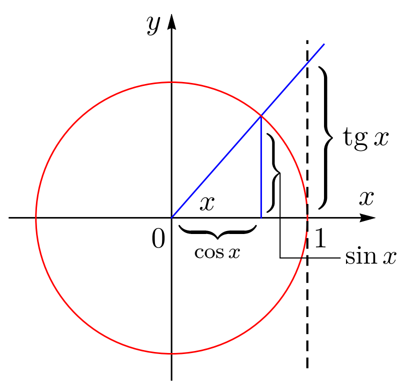
$$\text{a)}\qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x}{x}=1, \tag{8.1}$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x=e. \tag{8.2}$$

a) Uočimo najprije da je $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ parna funkcija:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x).$$

Zato, ako postoji $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$, onda postoji i $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$ i oni su jednaki. Promatrajući površine trokuta i kružnog isječka Slici 8.4,



Slika 8.4

vidi da za $x>0$ vrijedi

$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}<\frac{x\cdot 1}{2}<\frac{tgx\cdot 1}{2},$$

odakle množenjem s $\frac{2}{\sin x}$ dobivamo

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

odnosno

$$\frac{1}{\cos x}>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$, mora biti i $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Zbog parnosti funkcije f je također $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$, odakle dobivamo traženu formulu (8.2).

b) • Razmotrimo najprije slučaj kada $x \to +\infty$. Za $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je

$$n \le x \le n+1. \tag{8.3}$$

Iz (8.3) slijedi

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ 1 + \frac{1}{n+1} \le 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n},$$

odnosno

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Kako je prema *Dodatku 8.2*:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

onda je i

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{8.4}$$

Naime, veličina $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ je stalno između dviju veličina kojima je granična vrijednost jednaka e.

• Pokažimo sada da je

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{8.5}$$

Uvođenjem supstitucije $x = -1 - y$, dobivamo

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(\tfrac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\tfrac{1+y}{y}\right)^{1+y} =$$

$$\lim_{y\to+\infty} \left(1 + \tfrac{1}{y}\right)^y \left(1 + \tfrac{1}{y}\right) \overset{(8.4)}{=} e \cdot 1 = e.$$

Dakle, vrijedi (8.5). Iz (8.4) i (8.5) slijedi (8.2).

8.4 Derivacije

8.4.1 Pravila za deriviranje

Teorem 8.1. *Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x \in I$. Tada vrijedi*

(i) $f+g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

(ii) $f-g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) :$$

(iii) $f \cdot g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

(iv) ako je $g(x) \neq 0$, onda je f/g derivabilna u x i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dokaz.
(i). Zbog derivabilnosti funkcija f i g u točki x je (vidi *Primjedbu 6.4*, str. 144)

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + r_1(\Delta x), \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r_2(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{8.1}$$

$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(x)\cdot\Delta x + r_2(\Delta x), \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{8.2}$$

pa je

$$(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x) = (f'(x)+g'(x))\cdot\Delta x + r_1(\Delta x) + r_2(\Delta x)$$

i $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{r_1(\Delta x)+r_2(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Prema *Primjedbi 6.4* funkcija $f+g$ je derivabilna u točki x, a zbog jedinstvenosti derivacije je $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Dokaz tvrdnje (ii) provodi se analogno.

(iii). Zbog derivabilnosti vrijedi (8.1) i (8.2) pa je

$$\begin{aligned}
(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x) &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\
&= g(x)\,[f(x+\Delta x) - f(x)] + f(x)\,[g(x+\Delta x) - g(x)] \\
&\quad + [f(x+\Delta x) - f(x)]\,[g(x+\Delta x) - g(x)] \\
&= g(x)[f'(x)\Delta x + r_1(\Delta x)] + f(x)[g'(x)\Delta x + r_2(\Delta x)] \\
&\quad + [f'(x)\Delta x + r_1(\Delta x)]\,[g'(x)\Delta x + r_2(\Delta x)] \\
&= [g(x)f'(x) + f(x)g'(x)]\,\Delta x + r(\Delta x),
\end{aligned}$$

gdje je

$$r(\Delta x) = f(x)r_2(\Delta x) + g(x)r_1(\Delta x) + [f'(x)\Delta x + r_1(\Delta x)]\,[g'(x)\Delta x + r_2(\Delta x)]\,.$$

Pri tome zbog (8.1) i (8.2) je

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{r(\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x)\frac{r_2(\Delta x)}{\Delta x} + g(x)\frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} + \left(f'(x) + \frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x}\right)(g'(x)\Delta x + r_2(\Delta x))\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Prema *Primjedbi 6.4* funkcija fg je derivabilna u točki x i pri tome je $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(iv). Zbog neprekidnosti funkcije g u točki x i pretpostavke $g(x) \neq 0$, ta funkcija je različita od 0 i na nekom intervalu koji sadrži točku x. Stoga je funkcija f/g definirana na tom intervalu. Zbog prethodno dokazane tvrdnje, dovoljno je pokazati da je funkcija $1/g$ derivabilna u točki x.

Pomoću (8.2) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)} &= -\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x)g(x+\Delta x)} = -\frac{g'(x)\Delta x + r_2(\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\\ &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\Delta x + r(\Delta x),\end{aligned}$$

gdje je

$$r(\Delta x) = \frac{g(x+\Delta x)g'(x)\Delta x - g(x)[g'(x)\Delta x + r_2(\Delta x)]}{g^2(x)g(x+\Delta x)}.$$

Zbog (8.2) i neprekidnosti funkcije g u točki x je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(g(x+\Delta x) - g(x))g'(x) - g(x)r_2(\Delta x)/\Delta x}{g^2(x)g(x+\Delta x)}\right] = 0.$$

Prema *Primjedbi 6.4* to znači da je funkcija $1/g$ derivabilna u točki x i da je $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$. Sada imamo:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \overset{(iii)}{=} f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

□

Teorem 8.2. *Neka su f i g realne funkcije, takve da je kompozicija $f\circ g$ definirana. Neka je također g derivabilna u x, a f u točki $g(x)$. Tada vrijedi*

$$\textit{(vi)}\qquad (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Dokaz. Neka je $y_0 := g(x)$. Zbog derivabilnosti funkcija f i g je (vidi *Primjedbu 6.4, str. 144*)

$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(x)\cdot\Delta x + r_1(\Delta x), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

$$f(y_0+\Delta y) - f(y_0) = f'(y_0)\cdot\Delta y + r_2(\Delta y), \quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{r_2(\Delta y)}{\Delta y} = 0.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x+\Delta x) - (f\circ g)(x) =& f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))\\ =& f'(g(x))[g(x+\Delta x)-g(x)] + r_2(g(x+\Delta x)-g(x))\\ =& f'(g(x))[g'(x)\Delta x + r_1(\Delta x)] + r_2(g(x+\Delta x)-g(x))\\ =& f'(g(x))g'(x)\Delta x + r(\Delta x),\end{aligned}$$

gdje je

$$r(\Delta x) = f'(g(x))r_1(\Delta x) + r_2(g(x+\Delta x)-g(x)).$$

Kako je

$$\frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = f'(g(x))\frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{r_2(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x},$$

pri čemu prvi sumand ide u nulu kada $\Delta x\to 0$, preostaje pokazati da tada i drugi sumand ide u nulu. Zbog $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{r_1(\Delta y)}{\Delta y} = 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta' > 0$ takav da je $|r_2(\Delta y)| \le \varepsilon|\Delta y|$ za svaki $\Delta y\in(-\delta',\delta')$. Nadalje, zbog neprekidnosti funkcije g u točki x, postoji $\delta > 0$ takav da je $|g(x+\Delta x) - g(x)| < \delta'$ za svaki $\Delta x\in(-\delta,\delta)$. Stoga za svaki $\Delta x\in(-\delta,\delta)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\frac{r_2(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}\right| &\le \frac{\varepsilon|g(x+\Delta x)-g(x)|}{|\Delta x|} = \varepsilon\left(\frac{|g'(x)\Delta x + r_1(\Delta x)|}{|\Delta x|}\right)\\ &\le \varepsilon\left(|g'(x)| + \frac{|r_1(\Delta x)|}{|\Delta x|}\right).\end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{r_1(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, a ε proizvoljan, zaključujemo: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{r_2(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x} = 0$. Prema *Primjedbi 6.4* funkcija $f\circ g$ je derivabilna u točki x, a zbog jedinstvenosti derivacije je $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$. □

8.4.2 Derivacije elementarnih funkcija

Prema *Primjedbi 6.3, str. 143*, funkcija f je derivabilna u točki x ako postoji

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{gdje je} \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

To je derivacija funkcije f u točki x, koju označavamo s $f'(x)$.

a) Derivacija logaritamske funkcije $f(x) = \log_a x$, $x > 0$

Kako je

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

onda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},\end{aligned}$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \overset{(5.7)}{=} \frac{1}{x}\log_a \lim_{\frac{x}{\Delta x}\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x}\log_a e.\end{aligned}$$

Dakle,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e, \quad x > 0$$

i specijalno za $a = e$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

b) Derivacija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$

Kako je

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

onda koristeći (5.10), str. 138, dobivamo

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \overset{(5.10)}{=} a^x \ln a.$$

Dakle,

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}$$

i specijalno za $a = e$,

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primjedba 8.1. *Pokušajte formulu za derivaciju eksponencijalne funkcije izvesti na osnovi poznavanja derivacije logaritamske funkcije i pravila za derivaciju inverzne funkcije.*

c) Derivacija opće potencije $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$

Kako je $\ln f(x) = \alpha \ln x$, možemo pisati

$$f(x) = e^{\alpha \ln x},$$

pa je

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Dakle,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

d) Derivacije trigonometrijskih funkcija: sin, cos, tg, ctg

- $(\sin x)' = \cos x, \ \ x \in \mathbb{R}$
  Kako je $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{2x+\Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$ koristeći (5.8), str. 138, dobivamo

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \stackrel{(5.8)}{=} \cos x.$$

  Dakle,

$$(\sin x)' = \cos x, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

- $(\cos x)' = -\sin x, \ \ x \in \mathbb{R}$
  Koristeći vezu (2.22), str. 71, između trigonometrijskih funkcija sin i cos, dobivamo

$$(\cos x)' \stackrel{(2.22)}{=} (\sin(\tfrac{\pi}{2} - x))' = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x.$$

  Dakle,

$$(\cos x)' = -\sin x, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
Koristeći formulu *(iv)* iz *Teorema 8.1, str. 296* i prethodno dokazane formule za derivaciju funkcija sin i cos dobivamo
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
Dakle,
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
Analogno dobivamo
$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$
Dakle,
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

e) Derivacije ciklometrijskih funkcija: arcsin, arccos, arctg, arcctg

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$
Neka je $y = \arcsin x$. Ako načinimo kompoziciju s funkcijom sin, dobivamo
$$\sin y = \sin(\arcsin x), \quad \text{odnosno} \quad \sin y = x.$$
Tako smo funkciju arcsin zapisali u implicitnom obliku, pa je tako možemo i derivirati (vidi *Poglavlje 6.2.6, str. 160*):
$$\cos y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y}.$$
Još treba $\cos y$ izraziti pomoću x. To ćemo uraditi na sljedeći način:
$$y' = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$
Pri tome smo izabrali predznak „+” jer je arcsin rastuća funkcija. Dakle,
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$
 Ova formula dobiva se analogno prethodnoj.
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
 Neka je $y = \operatorname{arctg} x$. Slično kao u prethodnom slučaju i ovu funkciju zapisat ćemo u implicitnom obliku

$$\operatorname{tg} y = x.$$

 Deriviranjem ove implicitne funkcije, dobivamo

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y.$$

 Još treba $\cos^2 y$ prikazati pomoću $x = \operatorname{tg} y$:

$$y' = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} \frac{/ : \cos^2 y}{/ : \cos^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

 Dakle,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
 Ova formula dobiva se analogno prethodnoj.

f) Derivacije hiperbolnih funkcija: sh, ch, th, cth

Formule (6.37) – (6.40) za derivacije hiperbolnih funkcija jednostavno se dobivaju primjenom *Teorema 8.1, str. 296.*

g) Derivacije area funkcija: arsh, arch, arth, arcth

- $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
 Neka je $y = \operatorname{arsh} x$, ili u implicitnom obliku

$$\operatorname{sh} y = x.$$

 Deriviranjem ove implicitne funkcije, dobivamo

$$\operatorname{ch} y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y}.$$

Kako je $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, imamo

$$y' = \frac{1}{+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pri tome smo izabrali predznak „+” jer je arsh rastuća funkcija.

Dakle,

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$
  Ova formula dobiva se analogno prethodnoj.
- $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$
  Neka je $y = \operatorname{arth} x$, $|x| < 1$, ili u implicitnom obliku

  $$\operatorname{th} y = x.$$

  Deriviranjem ove implicitne funkcije, dobivamo

  $$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \operatorname{ch}^2 y,$$

  $$y' = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{1} = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y} \frac{/:\ \operatorname{ch}^2 y}{/:\ \operatorname{ch}^2 y} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

  Dakle,

  $$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$
- $(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$
  Ova formula dobiva se analogno prethodnoj.

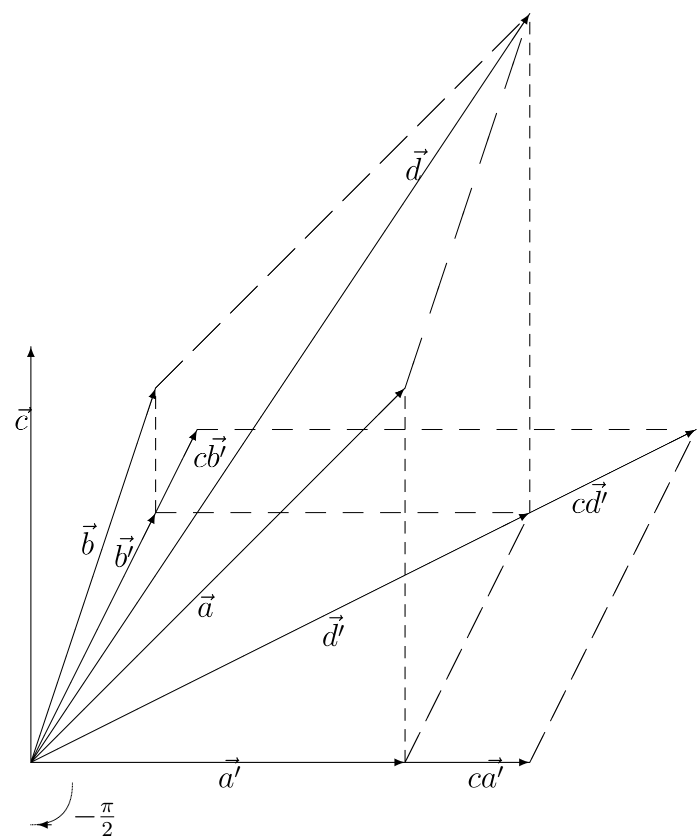
Primjedba 8.2. *Pokušajte formule za derivacije ciklometrijskih (odnosno area) funkcija izvesti na osnovi poznavanja derivacija trigonometrijskih (odnosno hiperbolnih) funkcija i pravila za deriviranje inverzne funkcije.*

8.5 Distributivnost vektorskog množenja prema zbrajanju vektora

Treba dokazati sljedeće dvije formule:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}.$$

Dokaz. Zbog antikomutativnosti vektorskog produkta dovoljno je dokazati samo prvu jednakost. Neka je $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$. Projicirajmo vektore u ravninu okomitu na vektor $\vec{c}$ (vidi *Sliku 8.5*). Dobivamo vektore $\vec{a'}, \vec{b'}$ i $\vec{d'}$. Pri tome se paralelogram određen vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ projicira u paralelogram što ga određuju vektori $\vec{a'}$ i $\vec{b'}$.



Slika 8.5

Povećamo li stranice toga paralelograma c puta dobivamo

$$c\vec{d'}=c\vec{a'}+c\vec{b'}.$$

Sada zarotirajmo čitav paralelogram za $\frac{\pi}{2}$ rad u negativnom smislu (u smjeru kretanja kazaljke na satu) oko vektora $\vec{c}$. Tom rotacijom vektori $\vec{a'}, \vec{b'}, \vec{d'}$ redom prelaze u vektore $\vec{a''}, \vec{b''}, \vec{d''}$. Osim toga, dobivamo:

$$c\vec{d''} = c\vec{a''} + c\vec{b''}. \qquad (\star)$$

Budući da je

$$\begin{aligned} a'' &= a' = a \sin \angle(\vec{a}, \vec{c}) \\ b'' &= b' = b \sin \angle(\vec{b}, \vec{c}) \\ d'' &= d' = a \sin \angle(\vec{d}, \vec{c}) \end{aligned}$$

te da je

$$\vec{d''} \perp \vec{d}, \vec{c}, \quad \vec{a''} \perp \vec{a}, \vec{c}, \quad \vec{b''} \perp \vec{b}, \vec{c},$$

prema definiciji vektorskog produkta, jednakost $(\star)$ predstavlja jednakost

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Upute i rješenja zadataka

1. Uvod: Pripremni materijal

Z.1.2. 1) $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$,
2) postupite slično kao pod 1),
4) $|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{x^2 - 2xy - y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2|x||y| + y^2}$
$= \sqrt{(|x|+|y|)^2} = ||x|+|y|| = |x|+|y|$,
5) vidi *Primjedbu 1.3*,
6) postupite slično kao pod 4).

Z.1.3. a) $x = 5$, b) $x = 4$,
c) $x \in \left(-\frac{6}{5}, 4\right)$, d) $x \in \left(-\infty, -\frac{6}{5}\right)$.

Z.1.4. a) $x \in [2,4] \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 7 \leq 2x+3 \leq 11 \Leftrightarrow 2x+3 \in [7,11]$.
U zadacima b) – h) postupite slično.

Z.1.7. Uputa: $n_0 = 25$.

Z.1.10. a) $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = 6$, b) $\operatorname{Re} z = 10$, $\operatorname{Im} z = -8$,
c) $\operatorname{Re} z = -6$, $\operatorname{Im} z = 6$, d) $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = 7$,
e) $\operatorname{Re} z = -10$, $\operatorname{Im} z = 5$, f) $\operatorname{Re} z = 27$, $\operatorname{Im} z = 11$,
g) $\operatorname{Re} z = 15$, $\operatorname{Im} z = 0$, h) $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = 0$,
i) $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 0$, j) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -1$,
k) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$, l) $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 0$,
m) $\operatorname{Re} z = \sqrt{12}$, $\operatorname{Im} z = \sqrt{50}$, n) $\operatorname{Re} z = -3\sqrt{2}$, $\operatorname{Im} z = 0$.

Z.1.12. Neka je $z = a + ib$, $w = c + id$.
a) $|zw|^2 = |(ac-bd) + i(ad+bc)|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + (a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd) = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2|w|^2$. Kako je $|\bar{w}| = |w|$ i $\frac{z}{w} = \frac{1}{|w|^2} z\bar{w}$, to je $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{|w|^2}|z\bar{w}| = \frac{1}{|w|^2}|z||\bar{w}| = \frac{|z|}{|w|}$,

c) Pomoću jednakosti e) iz prethodnog zadatka i tvrdnje b) iz ovog zadatka dobivamo: $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w = |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2+|w|^2+2|z\bar{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||w| = (|z|+|w|)^2$. Sada dobivamo i drugu nejednakost: $|z-w| = |z+(-w)| \leq |z|+|-w| = |z|+|w|$,

d) $||z|-|w|| = \sqrt{(|z|-|w|)^2} = \sqrt{|z|^2+|w|^2-2|z||w|}$
$\leq \sqrt{|z|^2+|w|+2+2|z||y|} = \sqrt{(|z|+|w|)^2} = |z|+|w|$,

e) $|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = |z|^2+|w|^2-(z\bar{w}+\bar{z}w) = |z|^2+|w|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

Z.1.13. Uputa: Traženi skup je

a) presjek zatvorenog kruga radijusa 2 s centrom u točki $(1,1)$ s otvorenim krugom radijusa 1 s centrom u točki $(1,0)$,

b) imaginarna os,

c) poluravnina $x > -3$.

Z.1.15. $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Z.1.16. Uputa:

a) Izračunajte treće korijene iz $1-i$,

b) Izračunajte korijene odgovarajuće kvadratne jednadžbe.

Z.1.17. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\overbrace{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}^{(n-k)!}}{k!(n-k)!}$
$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Z.1.18. Uputa: Tvrdnju je lako provjeriti za $n=0$ i $n=1$. Nadalje, pretpostavite da je tvrdnja istinita za svaki skup S koji nema više od n elemenata. Neka je sada $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ i $S' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = S\backslash\{x_{n+1}\}$. Sve k-člane podskupove skupa S podijelite u dvije grupe: one koji ne sadrže x_{n+1} (ima ih koliko i k-članih podskupova od S') i one koji sadrže x_{n+1} (ima ih koliko i $(k-1)$-članih podskupova od S'). Prema induktivnoj pretpostavci, prva grupa ima $\binom{n}{k}$, a druga $\binom{n}{k-1}$ podskupova.

Z.1.19. 720.

Z.1.20. Uputa: a) $(1-1)^n = 0$, b) $(1+1)^n = 2^n$.

2. Funkcije

Z. 2. 2 a) Nakon $T = 10s$ b) $\mathcal{D}(h) = [0, T]$

Z. 2. 3 a) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ b) $\mathcal{D}(f) = [2, +\infty)\backslash\{4\}$
c) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0)$ d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$
e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ f) $\mathcal{D}(f) = \emptyset$.

Z. 2. 4 a) $(-5, 2)$ b) $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$ c) $\mathbb{R}$
d) $(4, +\infty)$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

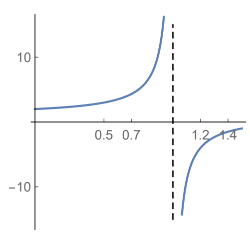
Z. 2. 5 Nije. Ako svi studenti imaju različita imena, onda je f injekcija. Ako barem dva studenta imaju isto ime, onda f nije injekcija.

Z. 2. 6 24

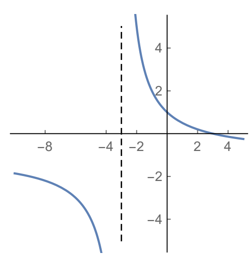
Z. 2. 7 a) f je injekcija, ali nije surjekcija, pa onda ni bijekcija.
b) g je surjekcija, ali nije injekcija, pa onda ni bijekcija.
c) h je surjekcija i injekcija, pa onda i bijekcija.

Z. 2. 8

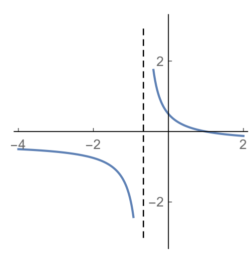
(a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$



(b) $f(x) = \frac{-2x+6}{-x+3}$



(c) $f(x) = \frac{-x+1}{3x+2}$



Z. 2. 9 a) strogo monotono padajuća b) strogo monotono rastuća
c) monotono rastuća
d) strogo monotono padajuća na $\mathbb{R}_-$ i strogo monotono rastuća na $\mathbb{R}_+$
e) strogo monotono padajuća f) monotono padajuća

Z. 2. 10 $f(f^{-1}(x)) = f(\frac{1}{k}(x - l)) = k\frac{1}{k}(x - l) + l = x$
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(kx + l) = \frac{1}{k}((kx + l) - l) = x$

Z. 2. 11 Najprije treba odrediti pravac koji je okomit na pravac $y = kx + l$, a koji prolazi točkom T_0. Dobivamo:

$$y = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0.$$

Nakon toga treba odrediti sjecište T_s ta dva pravca. Tražena udaljenost d tada je

$$d = \frac{|kx_0 + l - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

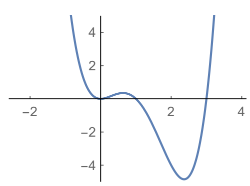
Z. 2. 12 a) $S^+ = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$, $\quad S^- = (1, 3)$

b) $S^+ = (-2, -1) \cup (2, +\infty)$, $\quad S^- = (-\infty, -2) \cup (-1, 2)$

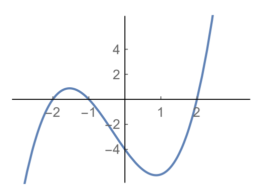
c) $S^+ = \mathbb{R}$, $\quad S^- = \emptyset$

d) $S^+ = (0, 3) \cup (5, +\infty)$, $\quad S^- = (-\infty, 0) \cup (3, 5) \backslash \{-1\}$

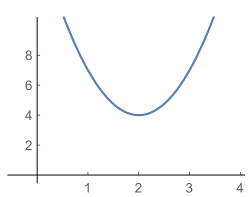
(a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$



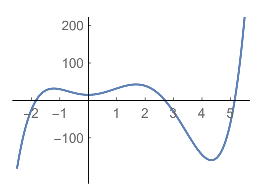
(b) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$



(c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$



(d) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 22x^2 + 15x$



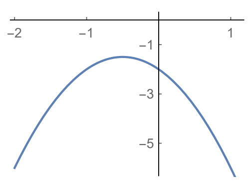
Z. 2. 13 $x_1 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q})$, $x_2 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) \Rightarrow x_1 + x_2 = -p$,
$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}[(-p)^2 - (p^2 - 4q)] = q$. Za jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ Vieteove formule glase $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

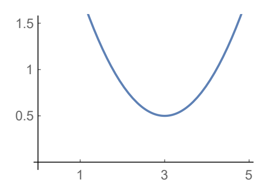
Z. 2. 14 a) $f(x) = -2(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2},\ \ T(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}),\ \ x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

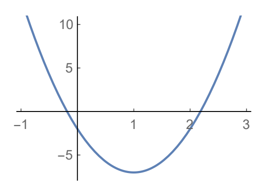
b) $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + \frac{1}{2},\ \ T(3, \frac{1}{2}),\ \ x_{1,2} = \frac{1}{2}(6 \pm i\sqrt{6})$

c) $f(x) = 5(x-1)^2 - 7,\ \ T(1, -7),\ \ x_{1,2} = 1 \pm \frac{i}{5}\sqrt{35}$

(a) $f(x) = -2x^2 - 2x - 2$ (b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{7}{2}$ (c) $h(x) = 5x^2 - 10x - 2$







Z. 2. 15 $f(2) = 10,\ f(-3) = -1030,\ f(12) = 663740$

Z. 2. 16 Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Tada je $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$. Treba odrediti b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0; r, tako da bude $P(x) = Q(x)(x-a)+r$, odnosno

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)(x-a) + r \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - ab_1)x + (r - ab_0) \end{aligned}$$

Koristeći *Definiciju 2.4, str. 52* o jednakosti dva polinoma, dobivamo

$$\left.\begin{array}{l} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2} \\ \vdots \\ a_2 = b_1 - ab_2 \\ a_1 = b_0 - ab_1 \\ a_0 = r - ab_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 = a_2 + ab_2 \\ b_0 = a_1 + ab_1 \\ r = a_0 + ab_0 \end{array}$$

Z. 2. 17 a) $x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5,\ \ P(x) = (x+3)(x-2)(x-5)$

b) $x_1 = -7,\ x_2 = -4,\ x_3 = 0,\ x_4 = 6,\ \ P(x) = (x+7)(x+4)x(x-6)$

c) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = \frac{3}{5},\ P(x) = (2x+1)(3x-2)(5x-3)$

d) $x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1,\ \ P(x) = (3x+2)(2x-1)(4x-3)(x-1)$.

Z. 2. 18 *(i)* Neka je $n = 1$. To znači da promatramo polinom prvog stupnja $P_1(x) = a_1 x + a_0$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$. Kako je $P(x) = 0$ samo za $x = -\frac{a_0}{a_1} \in \mathbb{R}$, polinom P_1 samo jednu realnu nultočku, što se uklapa u tvrdnju;

(ii) Pretpostavimo da svaki polinom n-tog stupnja ima najviše n realnih nultočaka;

(iii) Treba pokazati da svaki polinom $(n+1)$-og stupnja ima najviše $(n+1)$-nu realnu nultočku.

Neka je P_{n+1} proizvoljni polinom $(n+1)$-og stupnja. Ako on nema realnih nultočaka, dokaz je završen. Ako je x_0 realna nultočka polinoma P_{n+1}, onda prema 2.13 možemo pisati

$$P_{n+1}(x) = (x - x_0) P_n(x),$$

gdje je P_n neki polinom n-tog stupnja. Kako po pretpostavci indukcije P_n ima najviše n realnih nul-točaka, onda polinom P_{n+1} (za koji znamo da ima barem jednu realnu nul-točku x_0) može imati najviše $(n+1)$-nu realnu nul-točku.

Z. 2. 19 a) $\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

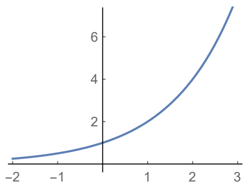
b) $\frac{1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{1}{6x} - \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x-3)}$

c) $\frac{x+1}{x^4+2x^3-x^2+4x-6} = \frac{-1-7x}{33(x^2+2)} + \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{22(x+3)}$

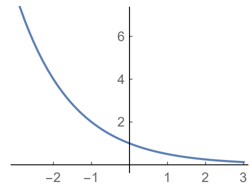
d) $\frac{2x^2+7x+1}{x^4-x^2} = -\frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x-1} + \frac{2}{x+1}$

Z. 2. 20

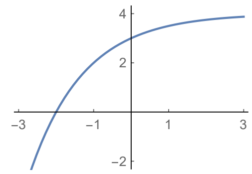
(a) $f(x) = 2^x$



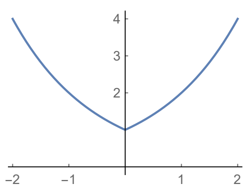
(b) $f(x) = 2^{-x}$



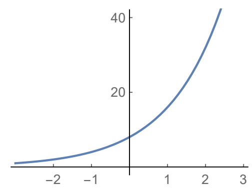
(c) $f(x) = 4 - 2^{-x}$



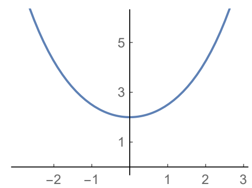
(d) $f(x) = 2^{|x|}$



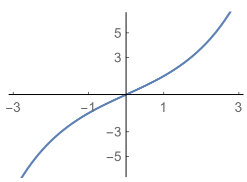
(e) $f(x) = 2^{x+3}$



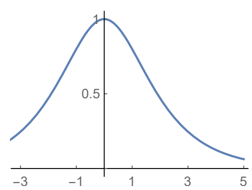
(f) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$



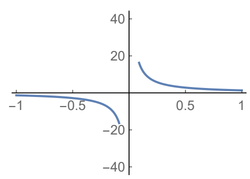
(g) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$



(h) $f(x) = \frac{2}{2^x + 2^{-x}}$



(i) $f(x) = \frac{2}{2^x - 2^{-x}}$



Z. 2. 21 a) $x = -8/3$, b) $x = 3$, c) $x = 3$

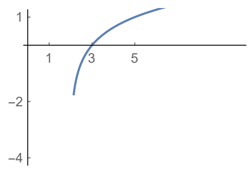
Z. 2. 22 a) $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\sqrt[10]{10} = 1.25893$

d) $2 + 2\sqrt{2} \approx 4.82843$ e) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ f) $x_1 = 1$, $x_2 = 16$

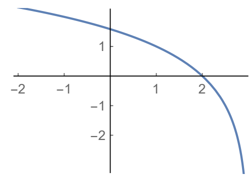
Z. 2. 23 a) 0.3 b) 0.125 c) 1.8

Z. 2. 24

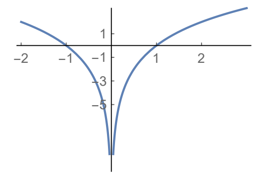
(a) $f(x)=\log_3(x-2)$



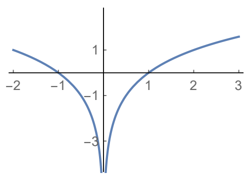
(b) $f(x)=\log_2(3-x)$



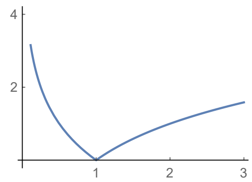
(c) $f(x)=\log_2 x^2$



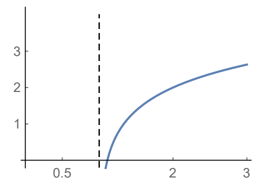
(d) $f(x)=\log_2|x|$



(e) $f(x)=|\log_2 x|$



(f) $f(x)=2+\log_3(x-1)$

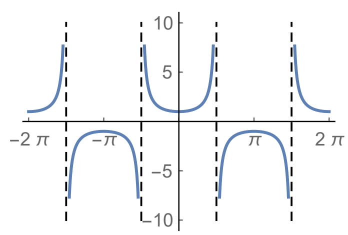


Z. 2. 25 $1^o=\frac{\pi}{180}\,rad,\;\; 30^o=\frac{\pi}{6}\,rad,\;\; 45^o=\frac{\pi}{4}\,rad,\;\; 60^o=\frac{\pi}{3}\,rad,$
$62^o=0.344\,rad,\;\; 73^o=0.4056\,rad,\;\; \frac{\pi}{6}\,rad=30^o,$
$\frac{\pi}{12}\,rad=15^o,\;\; 1.3\,rad=74.48^o,\;\; 1\,rad=57.296^o$

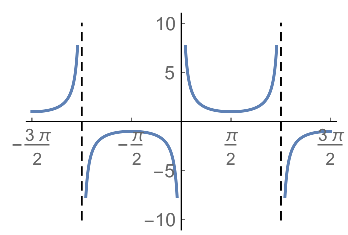
Z. 2. 26 $\mathcal{D}(\mathrm{ctg})=\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$

Z. 2. 27

(a) $f(x)=\sec x$

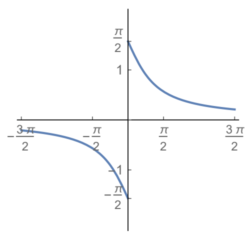


(b) $f(x)=\csc x$

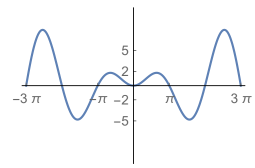


Z. 2. 28

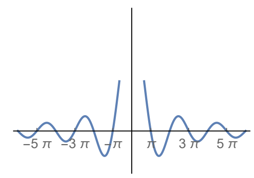
(a) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$



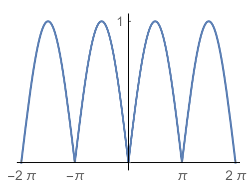
(b) $f(x) = x\sin x$



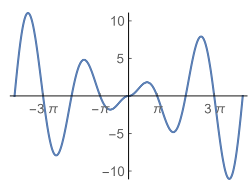
(c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



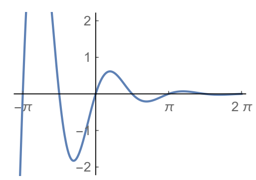
(d) $f(x) = |\sin x|$



(e) $f(x) = |x|\sin x$



(f) $f(x) = 2^{-x}\sin 2x$



Z. 2. 29 a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)} = \frac{1}{x}$

b) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)} = \frac{1}{x}$

U c) i d) treba iskoristiti činjenicu da vrijedi $\operatorname{ctg}x = \operatorname{tg}x(\frac{\pi}{2} - x)$, odnosno $\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x)$.

U e) i f) treba iskoristiti jednakost $\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u}$, odnosno $\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$.

U g) i h) treba iskoristiti jednakost $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 u}}$, odnosno $\sin u = \frac{\operatorname{tg}u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$.

U i) i j) treba iskoristiti jednakost $\sin 2u = \frac{2\sin u\cos u}{\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{2\operatorname{tg}u}{1+\operatorname{tg}^2 u}$,

odnosno $\cos 2u = \frac{\cos^2 u - \sin^2 u}{\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 u}{1+\operatorname{tg}^2 u}$.

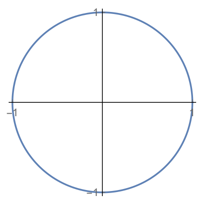
Z. 2. 31 a) domet je jednak $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = 82\,568.8m$, vrijeme leta je $\frac{2v_0}{g}\sin\alpha = 129.7s$

b) maksimalna visina je $\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = 20\,642.2m$

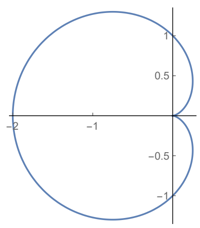
Z. 2. 32 $x(t) = v_0 t, \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + H, \quad y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + H$

Z. 2. 33

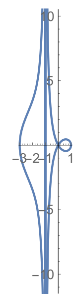
(a) *Kružnica*



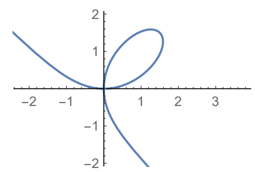
(b) *Kardioida*



(c) *Konhoida*

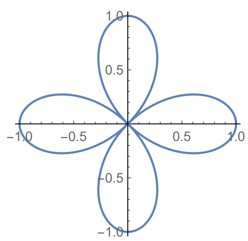


(d) *Descartesov list*

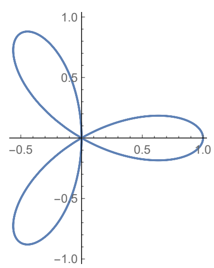


(e) *Lemniskata* $r = \cos k\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

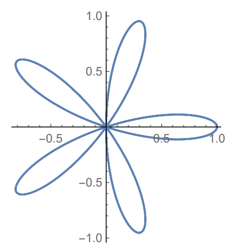
$k = 2$



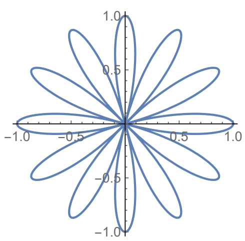
$k = 3$



$k = 5$



$k = 6$



Z. 2. 34 a) Kružnica: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5, \ S(1,2), \ R = \sqrt{5}$

b) Kružnica: $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1, \ S(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \ R = 1$

c) Kružnica: $x^2 + (y+3)^2 = 10, \ S(0,-3), \ R = \sqrt{10}$

d) Kružnica: $(x-2)^2 + y^2 = 16, \ S(2,0), \ R = 4$

e) Parabola: $(y+2)^2 = x + 3, \ a = 1, \ T(-3,-2)$

f) Parabola: $-2(y-1)^2 = x - 2, \ a = -2, \ T(2,1)$

g) Elipsa: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1, \ a = 5, \ b = \sqrt{5}, \ S(0,0)$

h) Elipsa: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81} = 1, \ a = 3, \ b = 9, \ S(0,0)$

i) Elipsa: $\frac{x^2}{(4/5)^2} + \frac{y^2}{16} = 1, \ a = \frac{4}{5}, \ b = 4, \ S(0,0)$

j) Hiperbola: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1, \ a = 5, \ b = 3, \ S(0,0)$

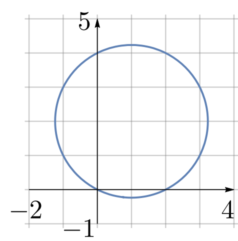
k) Hiperbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \;\; a = 3, \, b = 4, \, S(0,0)$

l) Hiperbola: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1, \;\; a = 2, \, b = 2, \, S(0,0)$

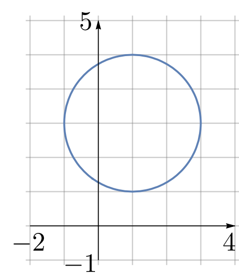
m) Elipsa: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1, \;\; a = 3, \, b = 2, \, S(2,3)$

n) Hiperbola: $\frac{(x-1)^2}{225} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1, \;\; a = 15, \, b = 3, \, S(1,2)$

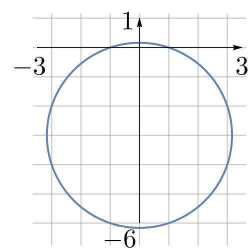
(a) $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$



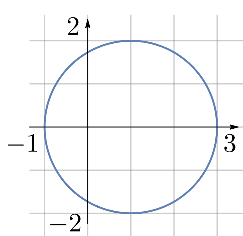
(b) $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2 = 1$



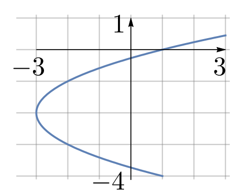
(c) $x^2 + (y+3)^2 = 10$



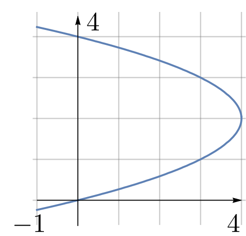
(d) $(x-2)^2 + y^2 = 16$



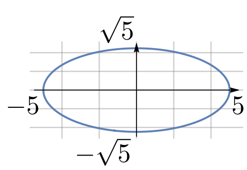
(e) $(y+2)^2 = x+3$



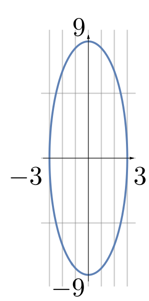
(f) $-2(y-1)^2 = x-2$



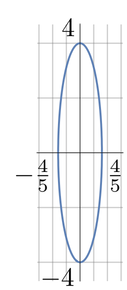
(g) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$



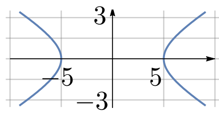
(h) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81} = 1$



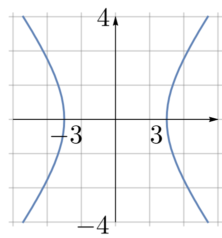
(i) $\frac{x^2}{(4/5)^2} + \frac{y^2}{16} = 1$



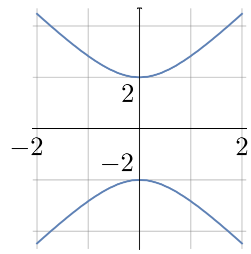
(j) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$



(k) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

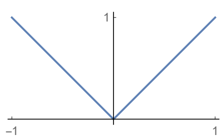


(l) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

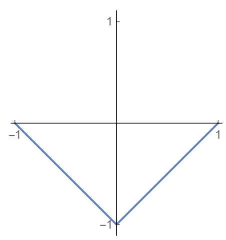


Z. 2. 35

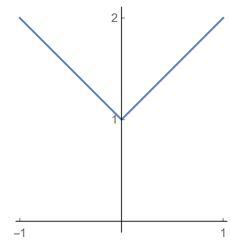
(a) $f(x) = |x|$



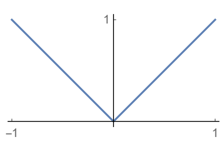
(b) $f(x) = |x| - 1$



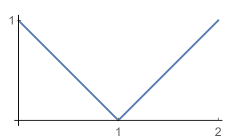
(c) $f(x) = |x| + 1$



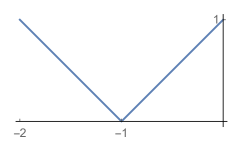
(d) $f(x) = |x|$



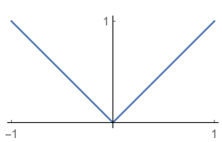
(e) $f(x) = |x - 1|$



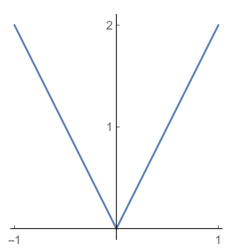
(f) $f(x) = |x + 1|$



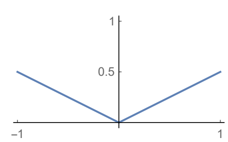
(g) $f(x) = |x|$



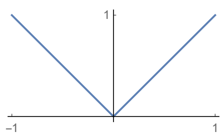
(h) $f(x) = 2|x|$



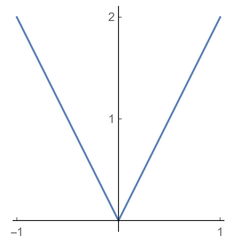
(i) $f(x) = 5|x|$



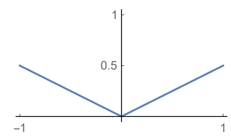
(j) $f(x) = |x|$



(k) $f(x) = |2x|$

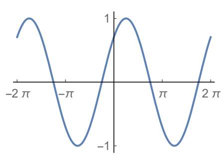


(i) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$

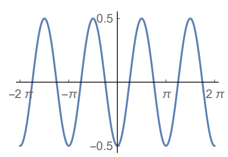


Z. F. 36

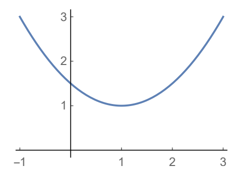
(a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$



(b) $g(x) = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi)$

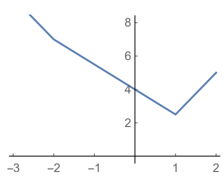


(c) $h(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$

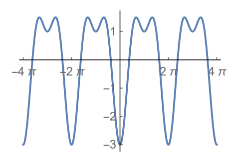


Z. F. 36

(a) $f(x) = 2|x-1| + \frac{1}{2}|x+2| + 1$



(b) $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{2}) - \cos 2x$



3. Nizovi

Z.3.1. a) $a_n = (-1)^n$, b) $a_n = 1 + (-1)^n$, c) $a_n = 3n - 2$, d) $a_n = n^2 - 2$.

Z.3.2. $h_n = h_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Z.3.3. a) $a_n = -4 + (n-1)3$.

Z.3.4. Uputa: Prirodnih brojeva koji su djeljivi s 19 i manji od 5 000 ima $\left[\frac{5\,000}{19}\right] = 263$. Treba odrediti zbroj prvih 263 članova aritmetičkog niza s općim člano $a_n = 19n$. Rješenje: $s_{263} = 659604$.

Z.3.5. Uputa: treći član niza označite s x. Tada traženi niz glasi: $\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2, xq^3, \ldots$. Nadalje je $x^2 = 144$, odakle je $x = \pm 12$. Iz jednadžbe $\frac{x}{q} + x + xq = 18$ odredite q. Za $x = -12$ je $q_1 = -2\ q - 2 = -\frac{1}{2}$. Za $x = 12$, $q \in \mathbb{C}$.

Z.3.6. $n = 14.2$ godina. Uputa: $C_0 r^n = 2C_0 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log r}$.

Z.3.8. a) 0, b) $-1, 1$, c) 0, d) $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$.

Z.3.10. a) e^2, b) e, c) e^{-3}, d) e^{-2}.

Z.3.11. Uputa: Najprije potencirajte.
Rješenje: a) $-\infty$, b) $-\infty$, c) $-\frac{12}{7}$, d) 0, e) 0, f) 2.

Z.3.12. Uputa: Pod a) i b) podijelite brojnik i nazivnik s n^3, pod c) dijelite s $n^{(4/3)}$, a pod d) s n^2.
Rješenje: a) 7, b) 3, c) 0, d) ∞.

Z.3.13. Uputa:
a) Iz rekurzivne formule vidi se da je niz strogo rastući. Matematičkom indukcijom pokažite da je $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$. Prijelazom na limes dobiva se $a = \sqrt{2 + a}$, gdje je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, odakle je $a = 2$.
b) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$.
c) Prvo matematičkom indukcijom pokažite da je ovaj niz odozgo omeđen s $\frac{1}{2}$, a zatim pokažite da je ovaj niz strogo rastući. Prijelazom na limes iz rekurzivne formule dobiva se da $a_n \to \frac{1}{2}$.
d) $a_n \to \infty$.

Z.3.14. Uputa: Prvo matematičkom indukcijom dokažite nejedenakost $\frac{n^2}{2} < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, odakle je $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$.

4. Redovi

Z.4.1. a) Geometrijski red sa sumom $s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$,
b) Geometrijski red s kvocijentom $q = 2^{1-\alpha}$. Ovaj red je konvergentan onda i samo onda ako je $q = 2^{1-\alpha} < 1$, tj. $\alpha > 1$.
c) Red divergira, jer nije ispunjen nužan uvjet za konvergenciju.

Z.4.2. a) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
$= \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$, $s_n \to \frac{1}{2}$,
b) $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$
$= \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, $s_n \to \frac{1}{3}$,
c) $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$
$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$, $s_n \to \frac{11}{18}$,
d) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
$= \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$,
$s_n \to \frac{1}{4}$,
e) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$
$+\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} - 2$, $s_n \to \frac{3}{2}$.

Z.4.3. Uputa: Rastavite opći član reda na parcijalne razlomke.
Rješenje: a) $\frac{17}{6}$, b) $\frac{5}{6}$, c) $\frac{11}{48}$, d) $-\frac{2}{3}$, e) $\frac{11}{8}$, f) $\frac{1}{3}$.

Z.4.4. a) $a_n < \frac{1}{4^n}$, red konvergira,
b) $a_n > \frac{1}{n}$, red divergira,
c) $a_n > \frac{1}{3n}$, red divergira,
d) $a_n < \frac{1}{(n-2)^2}$, red konvergira,
e) $a_n > \frac{1}{(n+2)^2}$, red divergira,
f) $a_n < \frac{1}{n^{3/2}}$, red konvergira,
g) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{2n}$, red divergira,
h) $a_n = \frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} < \frac{1}{(n-1)^{3/2}}$, red konvergira,
i) $a_n > \frac{1}{n}$, red divergira.

Z.4.5. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \infty$, red divergira,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, red divergira,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} = 0$, red konvergira,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2(2n+1)} = 0$, red konvergira,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{49}{2n(2n+1)} = 0$, red konvergira,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+3)} = 0$, red konvergira,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{4(n+3)} = 0$, red konvergira,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\frac{3^n+2}{3^{n+1}+2} = \infty$, red divergira,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} = (n+1)\sqrt{\frac{2^n+3}{2^{n+1}+3}} = \infty$, red divergira.

Z.4.6. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2}$, red divergira,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2} = e$, red divergira,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = a$, ako je $0 \leq a < 1$ red konvergira, dok za $a \geq 1$ red divergira,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sqrt[n]{2} = 0$, red konvergira,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = 0$, red konvergira,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{5}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{3} = \frac{3}{5}$, red konvergira,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{3-\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}\right)^2 = \infty$, red divergira,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^3 = \frac{1}{8}$, red konvergira,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2n+1}(\sqrt[n]{n})^5 = 0$, red konvergira.

Z.4.7. Svi redovi konvergiraju.

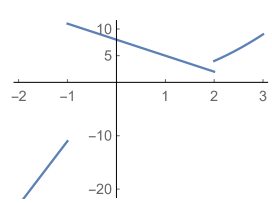
Z.4.8. a) uvjetno konvergentan, b) uvjetno konvergentan,
c) divergentan, d) uvjetno konvergentan,
e) uvjetno konvergentan, f) apsolutno konvergentan.

5. Limes funkcije. Neprekidnost

Z. 5. 1 a) -1 b) 2 c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$

Z. 5. 2 a) 0 b) $\frac{7}{4}$ c) 0

Z. 5. 3 Ima prekid prve vrste u točkama -1 i 2. Naime, $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = -11 \neq \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 11$, odnosno $\lim\limits_{x\to 2-} = 2 \neq \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 4$ (vidi sliku).

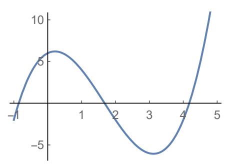


Z. 5. 4 a) Kako je $f(-1) = -2$ i $f(0) = 6$, na intervalu $[-1, 0]$ nalazi se jedna nultočka. Druga nultočka je na intervalu $[1, 2]$ jer je $f(1) = 4$ i $f(2) = -2$, a treća je na intervalu $[4, 5]$ jer je $f(4) = -2$ i $f(5) = 16$ (vidi Sliku a)

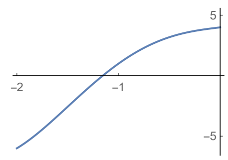
b) Kako je $f(-2) = -6$ i $f(-1) = 1$ na intervalu $[-2, -1] \subset [-2, 0]$ postoji jedna nultočka (vidi Sliku b).

c) Ne postoji ni jedna realna nultočka na $[-4, 4]$ (vidi Sliku (c)).

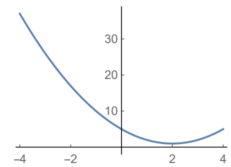
(a)



(b)



(c)



Z. 5. 5 a) lažna b) lažna c) istinita d) lažna

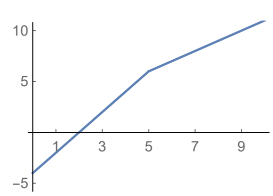
Z. 5. 6 a) 33.3^oC b) opada za 7.5^oC c) 20.5^oC

Z. 5. 7 a) $\lim\limits_{x\to 5-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5-} (2x-4) = 6$, $\lim\limits_{x\to 5+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5+} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$ $= \lim\limits_{x\to 5+} \frac{(x-5)(x+1)}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5+} (x+1) = 6.$

b) Funkcija je neprekidna u točki $x_0 = 5$ jer je $\lim\limits_{x\to 5-} f(x)$ $= \lim\limits_{x\to 5+} f(x) = \lim f(5).$

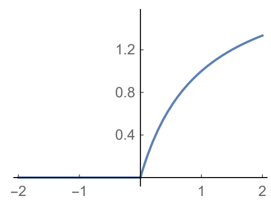
c) Funkcija f je neprekidna funkcija jer je neprekdina $\forall x \in \ \mathbb{R}.$

Funkcija f



Z. 5. 8 Nije, jer je $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 0$, ali $f(-1) = 1$.

Funkcija f



Z. 5. 9 a) 3 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
g) $1/e$ h) 1 i) ∞ j) $1/e$ k) $\frac{2}{3}$ l) e

6. Derivacije

Z 6. 1 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2}$.

Z 6. 2 a) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(x_0^n + n x_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + n x_0 \Delta x^{n-1} + \Delta x^n\right) - x_0^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x\left(n x_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}\right)}{\Delta x} = n x_0^{n-1}.$$

b) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{1}{(x_0+\Delta x)^n} - \frac{1}{x_0^n}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{x_0^n - (x_0+\Delta x)^n}{x_0^n (x_0+\Delta x)^n \Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-n x_0^{n-1}\Delta x - \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2}\Delta x^2}{x_0^n (x_0+\Delta x)^n \Delta x} = \frac{-n x_0^{n-1}}{x_0^{2n}} = \frac{-n}{x_0^{n+1}}.$$

Z 6. 3 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)-a(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1-a(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1-a) = 2-a$.

Linearni aproksimand je $l(x) = 1 + 2(x-1) = 2x-1$.

Z 6. 4 $\cos(x_0+\Delta x) \approx \cos x_0 - \Delta x \sin x_0$

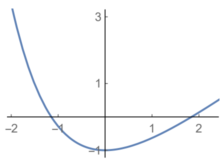
$\mathrm{tg}\,(x_0+\Delta x) \approx \mathrm{tg}\, x_0 + \frac{\Delta x}{\cos^2 x_0}$

$\mathrm{ctg}\,(x_0+\Delta x) \approx \mathrm{ctg}\, x_0 - \frac{\Delta x}{\sin^2 x_0}$

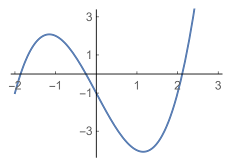
Z 6. 5 Opseg O kruga radijusa r je $O = 2r\pi$. Zato je $dO = 2\pi dr$. Za $dr = 0.5m$ imamo $dO = 3.14m$. Uže treba produžiti za $3.14m$.

Z 6. 6 a) $x_1 = -1.14619 \quad x_2 = 1.84141$
b) $x_1 = -1.86081,\ x_2 = -0.2541,\ x_3 = 2.11491$
c) $x_1 = 0.283248,\ x_2 = 0.904673$
d) $x_0 = 2.47266$

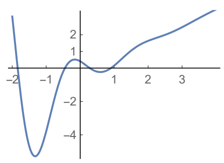
(a) $f(x) = e^{-x} + x - 2$



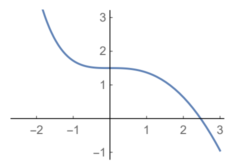
(b) $f(x) = x^3 - 4x - 1$



(c) $f(x) = e^{-x}\sin(3x+2) + x - \frac{1}{2},\ x > 0$



(d) $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$



Z 6. 7 Nije jer je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$
$= \infty$.

Z 6. 8 a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}}$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x) - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0})} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$,
$x_0 \neq 0$

b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0+\Delta x}}{\Delta x \sqrt{x_0}\sqrt{x_0+\Delta x}}$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0+\Delta x}}{\Delta x \sqrt{x_0}\sqrt{x_0+\Delta x}} \cdot \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0+\Delta x}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0+\Delta x}}$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x_0}\sqrt{x_0+\Delta x}(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0+\Delta x})} = \frac{-1}{2x_0\sqrt{x_0}}, \quad x_0 \neq 0$

Z 6. 13 a) $y' = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ b) $y' = \frac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{1-3x}} + \arccos\sqrt{1-3x}$
c) $y' = \arcsin x$ d) $y' = \frac{x^2}{1-x^4}$ e) $y' = \frac{1}{4ch^4\frac{x}{2}}$ f) $y' = 2\mathrm{sh}2x$

Z 6. 14 a) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2}),\ n\in\mathbb{N}$

b) $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}$

c) $(xe^x)^{(n)}=e^x(x+n),\ n\in\mathbb{N}$

d) $(\sqrt{x})^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}},\ n \in \mathbb{N},\quad (-1)!! = 1,\ 1!! = 1,\ 3!! = 1 \cdot 3, \dots$

Z 6. 18 $y = \frac{4\sqrt{5}}{15}x + \frac{18\sqrt{5}}{15}$

Z 6. 19 $y' = \frac{x^2-ay}{y^2-ax}$

Z 6. 20 a) $y''(x_0) = -\frac{1}{r\sin^3 t_0}$, b) $y''(x_0) = -\frac{1}{(\cos t_0-1)^2}$

Z 6. 21 Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 \neq x_2)$ nultočke funkcije f, tj. $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Prema Rolleovom teoremu tada postoji barem jedna točka $x_0 \in (x_1, x_2)$ takva da je $f'(x_0) = 0$.

Z 6. 23 Označimo $G(x) = G_1(x) - G_2(x)$. Kako je $G'(x) = G_1'(x) - G_2'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$. Prema *Korolaru 6.1* G je konstanta.

Z 6. 24 a) $G(x) = x^3 - \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + 7x + c$

b) $G(x) = -2\cos x + \sin x + c$

c) $G(x) = x\ln x - x + c$ d) $G(x) = e^x + c$

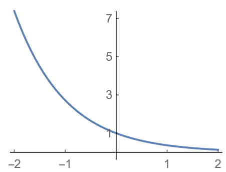
Z 6. 26 a) $f'(x) = -e^{-x} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Funkcija f strogo pada na čitavom $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. Za $x \in (0, 1)$ je $f'(x) < 0$, pa na intervalu $(0, 1)$ funkcija f strogo pada, dok za $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ je $f'(x) > 0$, pa tu funkcija strogo raste.

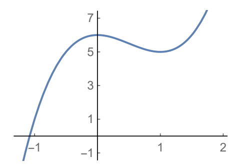
c) $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$. Za $x > 0$ funkcija strogo raste, a za $x < 0$ pada.

d) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$. Za $|x| < 1$ je $f'(x) < 0$ pa na intervalu $(-1, 1)$ funkcija f strogo pada, a izvan tog intervala strogo raste.

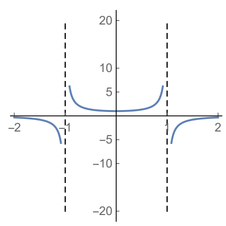
(a) $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$



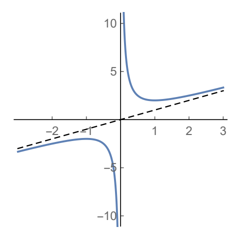
(b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$, $x \in \mathbb{R}$



(c) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$



(d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$



Z 6. 27 a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x lna}{1} = lna$

b) $\lim\limits_{n\to 0} \frac{(1+n)^\alpha - 1}{n} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{n\to 0} \frac{\alpha(1+n)^{\alpha-1}}{1} = \alpha$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x-3} = -1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - arctgx}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$

Z 6. 28 a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x - x \sin x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 1$

Z 6. 29 a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{2}{x} = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}\cos\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} 2\cos\frac{2}{x} = 2$

Z 6. 30 a) $\ln A = \lim\limits_{x\to0}(\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}) = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x = \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x} \stackrel{L'H}{=} -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ A = e^{-\frac{1}{2}}$

b) $\ln A = \lim\limits_{x\to0}(\ln x^{\sin x}) = \lim\limits_{x\to0}\sin x\ln x = (0\cdot\infty)$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{\frac{-1/x}{\ln^2 x}} = -\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x}{\ln^2 x} = 0$

$\Rightarrow\ A = e^0 = 1$

c) $A = \lim\limits_{x\to1}(\{\ln(1-x)^{\operatorname{tg}\pi x}) = \lim\limits_{x\to1}\operatorname{tg}\pi x\{\ln(1-x) = (0\cdot\infty)$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{\{\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{-\pi}{\sin^2\pi x}} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{\pi(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

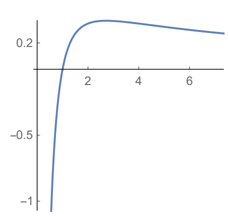
$= \lim\limits_{x\to1}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{\pi} = \lim\limits_{x\to1}\sin 2\pi x = 0\ \Rightarrow\ A = e^0 = 1$

Z 6. 31 Kako je ukupna površina posude zadana s $\pi dh + 2\frac{d^2}{4}\pi$, a volumen s $V = \frac{d^2}{4}\pi h$, onda ukupnu površinu možemo izraziti kao $P(d) = \frac{\pi}{2}d^2 + 4\frac{V}{d}$. Kritična točka funkcije $d \mapsto P(d)$ je $d^* = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Kako je $P'(d) < 0$ za $d < d^*$ i $P'(d) > 0$ za $d > d^*$, u d^* se postiže minimum funkcije P. Odgovarajuća visina posude je $h^* = \frac{4V}{\pi d^{*2}}$. Dakle $\frac{h^*}{d^*} = 1$.

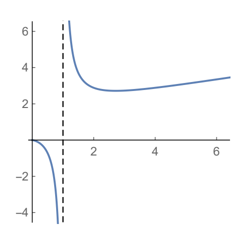
Z 6. 32 a) $Max(e, \frac{1}{e})$ b) $Min(e, e)$

c) $Min(0,0)$, $Max(2, \frac{4}{e^2})$ d) $Min(3, -84)$, $Max(-5, 172)$

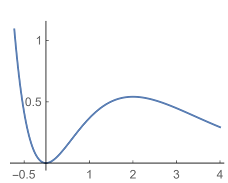
(a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$



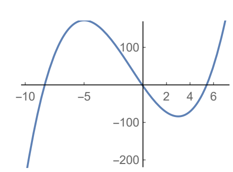
(b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$



(c) $f(x) = x^2e^{-x}$



(d) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 3$



Z 6. 33 $A(-\frac{12}{5}, \frac{14}{5})$, $d_{min} = 3.715$

Z 6. 34 Treba pronaći minimum funkcije $d(t) = \sqrt{(-24t+12)^2 + (12t)^2}$. Dobivamo $d_{min}(\frac{2}{5}) = 5.367km$.

Z 6. 35 Stranica kvadrata je $a = \frac{x}{4}$, a radijus kruga $r = \frac{20-x}{2\pi}$. Treba pronaći maksimum funkcije $P(x) = \frac{x^2}{16} + \pi\frac{(20-x)^2}{4\pi^2}$. Dobivamo $x^* = 11.2m$, površina kruga je $6.16m^2$, a površina kvadrata $7.84m^2$.

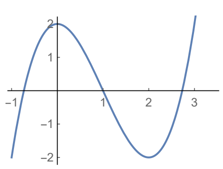
Z 6. 36 Površina trokuta je $P(\vartheta) = \frac{1}{2}a(\vartheta)v(\vartheta)$, gdje je $\frac{1}{2}a(\vartheta) = r\sin\vartheta$ i $v(\vartheta) = r\cos\vartheta$. $P_{max}(\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}r^2$.

Z 6. 37 a) $I(1,0)$, na $(-\infty, 1)$ konkavna, na $(1, +\infty)$ konveksna

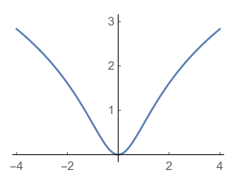
b) $I_1(-1, \ln 2)$, $I_2(1, \ln 2)$, na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ konkavna, na $(-1, 1)$ konveksna

c) $I(1, -1)$, na $(-\infty, 1)$ konkavna, na $(1, +\infty)$ konveksna

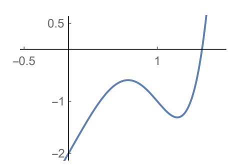
(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$



(b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$



(c) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$

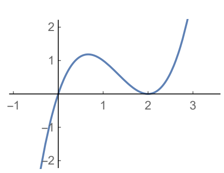


Z 6. 38 a) $Min(2,0)$, $Max(\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$, $I(\frac{4}{3}, \frac{16}{27})$

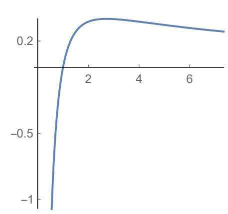
b) $Max(e, \frac{1}{e})$, $I(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$

c) $Max(3, \frac{27}{e^3})$, $I_1(0,0)$, $I_2(1.27, 0.57)$, $I_3(4.73, 0.93)$

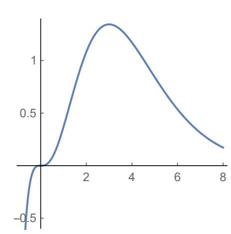
(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$



(b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$



(c) $f(x) = x^3 e^{-x}$



Z 6. 39 a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$, funkcija je parna, nul-točka: $x_0 = 0$, asimptote: $x = -2, \quad x = 2, \quad y = 0$, ekstremi: $Max(0, 0)$, točke infleksije nema

b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, funkcija je neparna, nul-točka: $x_0 = 0$, asimptota: $y = 0$, ekstremi: $Min(-2, -1), \quad Max(2, 1)$, točke infleksije: $I_1(0, 0), \quad I_2(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad I_3(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

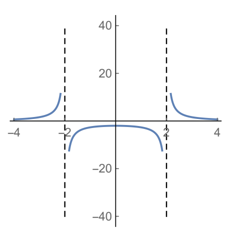
c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, nul-točka: $x_0 = 0$, asimptota: $y = 0$, ekstremi: $Max(1, 1/e)$, točka infleksije: $I(2, \frac{2}{e^2})$

d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, nul-točaka nema, asimptote: $x = 1, \quad y = 0$, ekstrema nema, točke infleksije nema

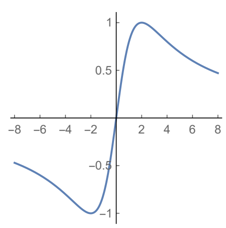
e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, funkcija je neparna, nul-točka: $x_0 = 0$, asimptota: $y = 0$, ekstremi: $Max(1, \frac{1}{\sqrt{e}}), \quad Min(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}})$, točke infleksije: $I_1(0, 0), \quad I_2(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-3/2}), \quad I_3(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2})$

f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, nul-točka: $x_0 = 0$, horizontalna asimptota: $y = 0$, ekstremi: $Max(2, \frac{4}{e^2}), \quad Min(0, 0)$, točke infleksije: $I_1(0, 59, 0.19), \quad I_2(3.41, 0.38)$

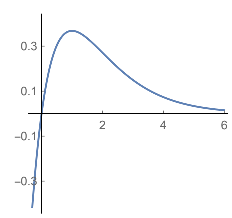
(a) $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$



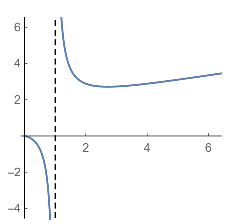
(b) $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$



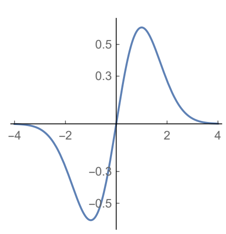
(c) $f(x) = xe^{-x}$



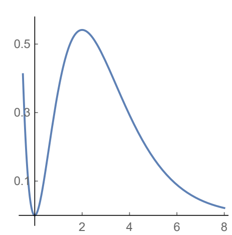
(d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$



(e) $f(x) = xe^{-x^2/2}$

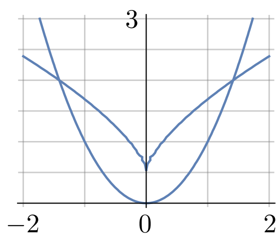


(f) $f(x) = x^2e^{-x}$



Z 6. 40 $K = -\frac{2}{9}, \quad R = \frac{9}{2}, \quad x^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{81}{4}$

Z 6. 41 $\frac{1}{27}(\eta - \frac{1}{2})^3 - \frac{1}{16}\xi^2 = 0$



Z 6. 42 a) $T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

b) $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

c) $T_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

Z 6. 43 a) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$

b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$

c) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

e) $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

f) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

g) $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

Z 6. 44 a) $\{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \quad x \in (-1, 1)$

b) $\{\ln\frac{1+x}{1-x} = \{\ln(1+x) - \{\ln(1-x) = 2(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots), \ x \in (0, 1)$

c) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]$

Z 6. 45 $\cos x \approx 1 = T_0(x), \qquad |E_0(x)| < \frac{x^2}{2}$

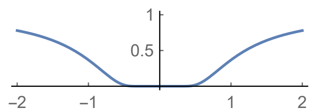
$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} = T_2(x), \qquad |E_2(x)| < \frac{x^4}{24}$

$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = T_4(x), \quad |E_4(x)| < \frac{x^6}{720}$

Z 6. 46 Točka $x_0 = a$ je jedina kritična točka. Ako je n paran, u toj točki funkcija postiže lokalni minimum. Ako je n neparan, $x_0 = a$ je točka infleksija.

Z 6. 47 U ovom slučaju *Teorem 6.16* i *Korolar 6.5* ne mogu se primijeniti. Korištenjem dovoljnog uvjeta **B1**, str. 178 može se ustanoviti da ova funkcija u točki $x_0 = 0$ postiže lokalni minimum.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$



7. Linearna algebra

7. 1 Uputa: upotrijebite *Teorem 7. 2.*

7. 2 a) $Q(3,-5,4)$, b) $Q(3,4,3)$.

7. 3 a) $2\vec{a}-7\vec{b}+4\vec{c}=-2\vec{i}-3\vec{j}-12\vec{k}$, $|2\vec{a}-7\vec{b}+4\vec{c}|=\sqrt{157}$

b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{19}$

c) $-3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=-7\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$, $|-3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{83}$.

7. 4 Uputa: upotrijebite poučak o kosinusima.

7. 5 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=-79$.

7. 7 Ne, jer grupoid $(V,\oplus)$ nije asocijativan, nema neutralni element i nije komutativan.

7. 8 a) $(2,0,3)=2(1,0,1)+(0,0,1)$,
b) Uputa: vektorsku jednadžbu $\lambda_1(1,0,-1,1,2)+\lambda_2(0,1,1,2,3)+\lambda_3(1,1,0,1,0)=(0,0,0,0,0)$ zapišite u obliku sustava od 5 jednadžbi s 3 nepoznanice, a zatim pokažite da taj sustav ima samo trivijalno rješenje, tj. $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$.

7. 9 Uputa: upotrijebite *Teorem* 7. 3.

7. 10 Uputa: Ispitivanje linearne nezavisnosti svedite na rješavanje odgovarajućeg sustava od n jednadžbi s k nepoznanica. Istovremenom permutiranju komponenti kod vektora odgovara permutiranje jednadžbi toga sustava.

7. 11 Uputa: kao i u prethodnom zadatku, ispitivanje linearne nezavisnosti svedite na rješavanje odgovarajućeg sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

7. 12 Očito da polinomi $1,x,x^2,\ldots,x^n$ generiraju P_n. Ti su polinomi linearno nezavisni, jer jednakost $p(x):=\lambda_1+\lambda_2x+\cdots+\lambda_nx^n=0$ može vrijediti za sve $x\in\mathbb{R}$ jedino ako je p nulpolinom, tj. ako je $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots,n$. $\dim P_n=n+1$.

7. 13 $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - (\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) - [(\mathbf{x},\mathbf{x}) - 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y})] = 4(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

7. 14 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\varphi$.

7. 15 $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) + \mathcal{A}(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

7. 16 Neka je $\mathcal{A}$ linearan operator. Tada je $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})$, odakle vidimo da je $\mathcal{A}$ aditivan. Kako je $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mathbf{0}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})$, operator $\mathcal{A}$ je i homogen. Obratno, ako je $\mathcal{A}$ aditivan i homogen operator, onda vrijedi $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mu\mathbf{y}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu\mathcal{A}(\mathbf{y})$, što znači da je $\mathcal{A}$ linearan operator.

7. 17 Neka su $p(t), q(t) \in P_n$. Tada je $\mathcal{A}(\lambda p(t) + \mu q(t)) = \lambda p(a) + \mu q(a) = \lambda\mathcal{A}(p(t)) + \mu\mathcal{A}(q(t))$.

7. 18 $\dim M_{mn} = m \cdot n$.

7. 23 Formula za kvadrat binoma vrijedi kod komutativnih matrica.

7. 24 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T_{ij} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = \mathbf{A}^T_{ij} + \mathbf{B}^T_{ij}$, $(\lambda\mathbf{A})^T_{ij} = (\lambda\mathbf{A})_{ji} = \lambda a_{ji} = \lambda\mathbf{A}^T_{ij}$, $(\mathbf{AB})^T_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{p} \mathbf{B}^T_{ik}\mathbf{A}^T_{kj} = (\mathbf{BA})_{ij}$.

7. 25 Neka je $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ ortogonalna matrica. Ako jednakost $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ skalarno pomnožimo s $\mathbf{u}_k$, $k = 1, \ldots, n$, dobivamo $\lambda_k = 0$, odakle vidimo da su njeni stupci linearno nezavisni. Slično se pokaže linearna nezavisnost redaka matrice $\mathbf{U}$. Kako stupaca (redaka) ima $n = \dim\mathbb{R}^n$, oni tvore bazu u prostoru $\mathbb{R}^n$.

7. 26 a) simetričnost: $\mathbf{H}^T = (\mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{I}^T - 2(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{I} - 2(\mathbf{u}^T)^T\mathbf{u}^T = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{H}$, ortogonalnost: $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{H}\mathbf{H} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(\mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \mathbf{I}$,
b) $\mathbf{Ha} = \mathbf{a} - 2(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{a}) = \mathbf{a} - 2(\mathbf{u}^T\mathbf{a})\mathbf{u} = \mathbf{a} - 2\left(\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{b})^T}{|\mathbf{b}-\mathbf{b}|}\mathbf{a}\right)\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{b})}{|\mathbf{b}-\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2}(2(\mathbf{b}-\mathbf{a})^T\mathbf{a} + |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2) + \mathbf{b}$. Kako je $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$, to je $2(\mathbf{b}-\mathbf{a})^T\mathbf{a} + |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 = 0$ (provjerite), a zbog toga je $\mathbf{Ha} = \mathbf{b}$. Slično se pokaže da je $\mathbf{Hb} = \mathbf{a}$.

7. 27 Uputa: izračunajte umnožke $\mathbf{AA}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$.

7. 28 a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2i & i \\ -(2+i)/5 & (2+i)/5 \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$,

e) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} -9 & 14 & -13 \\ 1 & 2 & 5 \\ 12 & -8 & -4 \end{bmatrix}$,

f) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 9 & -14 & -1 \\ 13 & -6 & -5 \\ -2 & 12 & 2 \end{bmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

i) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$.

7. 29 a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{2+3c_1}{2} & \frac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$, gdje su c_1, c_2 proizvoljni brojevi,

b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} c_1 & \frac{2-3c_1}{2} \\ c_2 & \frac{9-3c_2}{4} \end{bmatrix}$, gdje su c_1, c_2 proizvoljni brojevi.

7. 30 $r(\mathbf{A}) = \begin{cases} 2, & \lambda = 3 \\ 3, & \lambda \neq 3 \end{cases}$.

7. 31 a) sustav ima jedinstveno rješenje: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -5$, $x_4 = 11$,
b) sustav nema rješenje,
c) $x_1 = \frac{1}{2}x_4 + \frac{31}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - \frac{7}{6}$, gdje je x_4 slobodna varijabla,

7. 32 Za $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$ sustav ima jedinstveno rješenje: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/(\lambda + 3)$; za $\lambda = 1$ opće rješenje glasi: $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, gdje su x_2, x_3, x_4 slobodne varijable; za $\lambda = -3$ sustav nema rješenje.

7. 33 a) -8, b) -3, c) -9, d) 18.

Literatura

[1] H. Anton, C. D. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, John Wiley & Sons, 2000.

[2] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] M. Benšić, N. Šuvak, *Primijenjena statistika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2012.

[4] D. Blanuša, *Viša matematika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.

[5] T. Blyth, E. Robertson, *Basic Linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[6] R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis I, II/1, II/2*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[7] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.*, Ekonomski fakultet u Osijeku, Sveučilište u Osijeku, 1994.

[8] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1999.

[9] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[10] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Braunschweig/Wiesbad : Friedr. Vieweg&Sohn, 1986.

[11] R. Fraga, *Calculus Problems for a New Century*, MAA, Washington, DC, 1999.

[12] J. S. Golan, *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*, Dordrecht : Kluwer, 2004.

[13] E. F. Haeussler, S. P. Richard, *Introductory Mathematical Analysis*, Pretince- Hall Company, Reston, 1983.

[14] O. Hijab, *Introduction to Calculus and Classical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[15] L. Hogben, *Handbook of Linear Algebra*, Boca Raton : Chapman & Hall, 2007.

[16] A. Jovičić, K. Sabo, *Formule za udaljenost točke do pravca u ravnini, u smislu l_p-udaljenosti,* $1 \leq p \leq \infty$, math.e, Hrvatski matematički elektronski časopis, **29**(2016).

[17] D. Jukić, *Mjera i integral*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2012.

[18] D. Jukić, *Konveksni skupovi*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015.

[19] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1985.

[20] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[21] S. Kurepa, *Matematička analiza I, II*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[22] I. Kuzmanović, K. Sabo, *Linearno programiranje*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016.

[23] S. Lang, *A First Course in Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[24] S. Lang, *Short Calculus*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[25] R. E. Larson, R. P. Hostetler, *Calculus With Analytic Geometry .*, Heath and Company, Lexington : D. C., 1982.

[26] L. Leithold, *The Calculus With Analytic Geometry : Part 1*, Harper & Row, New York, 1976.

[27] L. Leithold, *The Calculus of A Single Variable with Analytic Geometry*, Harper & Row, New York, 1986.

[28] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. B. ckensdörfer Ehlers, K. Schelkes, *Analysis 1, 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[29] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015.

[30] R. Scitovski, M. B. Alić, *Grupiranje podataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2016.

[31] J. Stewart, *Calculus*, Brooks/Cole Cengage Learning, Canada, 2012.

[32] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[33] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[34] E. B. Vinber, *A Course in Algebra*, Providence : American Mathematical Society, 2003.

[35] I. Wolfram Research, *Mathematica*, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2016, version 11.0 edition.

[36] F. Zhang, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.

Indeks

ISBN 978-953-6032-18-1