Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
26. siječnja 2018.

Matematički praktikum (2017./2018.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a)Kada za funkciju $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna? Je li funkcija $x \mapsto -|x-1|+1$ Lipschitz-neprekidna?

(b) Pokažite da je funkcija $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0.5(x-1)^2+2, & \text{ako je } 0 \le x < 2 \\ -3x/2+5.5, & \text{ako je } 2 \le x < 3 \\ 1, & \text{ako je } 3 \le x < 4 \\ x-3, & \text{ako je } 4 \le x \le 6 \end{cases}$

Lipschitz-neprekidna i odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu $L > 0$. Je li ova funkcija neprekidna na $[0,6]$? Je li derivabilna na $(0,6)$?

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $L = 3/2$; Ova funkcija je neprekidna na $[0,6]$, ali nije derivabilna na $(0,6)$.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) Kako se definira globalni minimum funkcije $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$?
(b) Koliko točaka globalnog minimuma ima funkcija iz Zadatka 1b? Što je $\operatorname*{argmin}_{x\in[0,5]} f(x)$, a što $\min_{x\in[0,5]} f(x)$ za funkciju iz Zadatka 1b?
(c) Počevši s $u_0 = 0$ odredite sljedeće tri aproksimacije prema metodi slomljenih pravaca.
(d) Dokažite da za svaki slomljeni pravac P_n kod metode Pijavskog vrijedi $P_n(u_i) \le f(u_i)$, $i = 0,1,\dots,n$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) beskonačno (svaka točka iz $[3,4]$); $\operatorname*{argmin}_{x\in[0,5]} f(x) = [3,4]$, $\min_{x\in[0,5]} f(x) = 1$; (c) $u_1 = 6$, $u_2 = 17/6 \approx 2.833$, $u_3 = 11/6 \approx 1.833$; d) Vidi Nastavne materijale.*

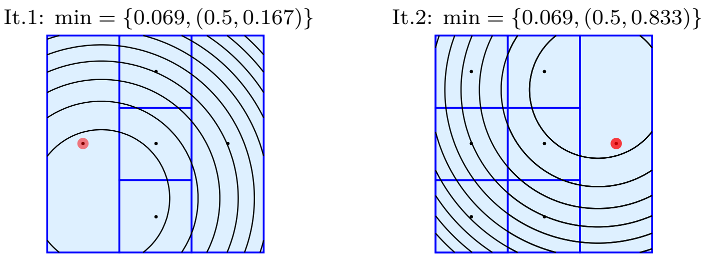
Zadatak 3. [20 bodova]
(a) Za funkciju $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$ iz Zadatka 1b. odredite donju ogradu i $\mathcal{B}$-vrijednost ove funkcije na intervalu $[0,6]$ u skladu s metodom DIRECT.
(b) U skladu s DIRECT metodom podijelite interval $[0,6]$ na tri jednaka dijela i na svakom odredite $\mathcal{B}$ vrijednost. Kolika je aktualna vrijednost minimuma i u kojoj točki se postiže?

Rješenje: *a)* $x \mapsto \begin{cases} f(c)+L(x-c), & x \le c \\ f(c)-L(x-c), & x \ge c \end{cases} = \begin{cases} f(3)+3(x-3)/2, & x \le 3 \\ f(3)-3(x-3)/2, & x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}, & x \le 3 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}, & x \ge 3 \end{cases}$,
$\mathcal{B} = f(c) - L\frac{b-a}{2} = -\frac{7}{2} = -3.5$; *b)* $\mathcal{B}_i = 0.5, -0.5, 0.5$; $\min f(c_i) = \min\{2,1,2\} = 1$ *i postiže se u točki* $c_2 = 3$

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) Kako se definiraju potencijalno optimalni intervali kod metode DIRECT?.
(b) Za funkciju iz Zadatka 1b i intervale: $[a_i,b_i]$: $[0,6]$, $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$, $[2,\frac{8}{3}]$, $[\frac{8}{3},\frac{10}{3}]$, $[\frac{10}{3},4]$

nacrtajte točke $T_i = (d_i, f(c_i))$, gdje je d_i polušírina intervala $[a_i, b_i]$, a $f(c_i)$ vrijednost funkcije u centru intervala. Koji od navedenih intervala su potencijalno optimalni?
Rješenje: *a) Vidi Nastavne materijale; b) Potencijalno optimalni intervali su: $[0, 6]$, $[2, 4]$, $[\frac{10}{3}, 4]$.*

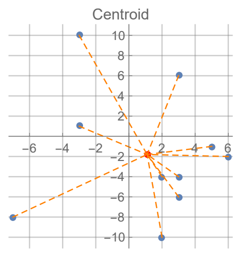
Zadatak 5. [25 bodova]
(a) *Kada za funkciju $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*
(b) *Je li funkcija $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = (x_1 - .25)^2 + (x_2 - .25)^2$ Lipschitz-neprekidna? Ako je, odredite Lipschitzovu konstantu $L > 0$.*
(c) *`DIRECT` algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata $[0,1]^2$ na kome je definirana funkcija g. U svakoj iteraciji odredite subpravokutnik s najmanjom $\mathcal{B}$-vrijedosti i trenutnu vrijednost minimuma.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $L = \frac{3}{2}$; (c) Vidi Sliku 3; U It.1 može se dijeliti ili kao na Slici 5.3a ili kao na Slici 5.3b jer je $w_1 = w_2$. Odabrano je dijeljenje kao na Slici 5.3a. U It.2 dijeli se subpravokutnik s centrom u $(.5, .5) - \delta e_1$, gdje je $\delta = \frac{1}{3}$.*



Slika 1: Dijeljenje kvadrata $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ u slučaju funkcije $g(x_1, x_2) = (x_1 - .25)^2 + (x_2 - .25)^2$. Crvenim točkicama označeni su centri subpravokutnika na kojima se postiže najmanja $\mathcal{B}$-vrijednost

Zadatak 6. [15 bodova]
(a) *Neka je $\mathcal{A} = \{a^i : i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ skup podataka i $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ kvazimetrička funkcija. Kako se definira najbolji reprezentant $c^\star$ skupa $\mathcal{A}$? Što je $c^\star$ u slučaju LS-kvazimetričke funkcije?*
(b) *Neka je $\mathcal{A} = \{(6,-2), (-7,-8), (3,-4), (-3,1), (2,-4), (-3,10), (3,-6), (5,-1), (3,6), (2,-10)\}$. Odredite najbolji reprezentant $c^\star$ skupa $\mathcal{A}$ u slučaju LS-kvazimetričke funkcije.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $c^\star_{LS} = (1.1, -1.8)$;*



Slika 2: Centroid skupa podataka $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
26. siječnja 2018.

B

Matematički praktikum (2016./2017.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Kada za funkciju $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna? U kakvom su odnosu sljedeci skupovi funkcija: $C[a,b]$, $Lip_L[a,b]$, $C^1[a,b]$?*

(b) *Pokažite da je funkcija* $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ako je } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ako je } 1 \le x < 2 \\ x-1, & \text{ako je } 2 \le x < 3 \\ 0.5(x-4)^2+1.5, & \text{ako je } 3 \le x \le 6 \end{cases}$
Lipschitz-neprekidna i odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu $L > 0$. Je li ova funkcija neprekidna na $[0,6]$? Jeli derivabilna $(0,6)$?
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $L = 2$; $C^1[a,b] \subset Lip_L[a,b] \subset C[a,b]$,*

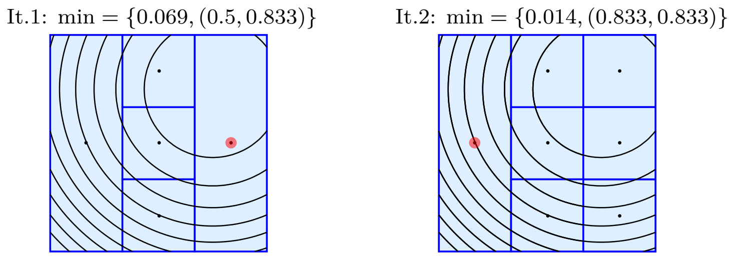
Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Kako se definira lokalni minimum funkcije $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$?*
(b) *Koliko točaka lokalnog minimuma ima funkcija iz Zadatka 1? Što je $\operatorname*{argmin}_{x\in[0,6]} f(x)$, a što $\min_{x\in[0,6]} f(x)$ za funkciju iz Zadatka 1?*

(c) *Počevši s $u_0 = 6$ odredite sljedeće tri aproksimacije prema metodi slomljenih pravaca.*
(d) *Dokažite da za svaki slomljeni pravac P_n kod metode Pijavskog vrijedi $P_n(u) \le f(u)$, $\forall u \in [a,b]$*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) beskonačno (svaka točka iz $[1,2]$); $\operatorname*{argmin}_{x\in[0,6]} f(x) = [1,2]$, $\min_{x\in[0,6]} f(x) = 1$; (c) $u_1 = 0$, $u_2 = 2.625$, $u_3 = 1.40625$; d) Vidi Nastavne materijale.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Za funkciju $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$ iz Zadatka 1. odredite donju ogradu i $\mathcal{B}$-vrijednost ove funkcije na intervalu $[0,6]$ u skladu sa Shubertovom metodom.*
(b) *Odredite prve dvije aproksimacije prema Shubertovoj metodi. Usporedite rezultat s onim iz Zadatka 2 koji ste dobili metodom Pijavskog. Što primjećujete?*
Rješenje: *a) Donja ograda: $x \mapsto \max\{f(a) - L(x-a), f(b) + L(x-b)\}$, $\mathcal{B} = \frac{1}{2}(f(a)+f(b) - \frac{L}{2}(b-a) = -3.25$; b) $u_1 = 2.625$, $u_2 = 1.40625$ – aproksimacije se podudaraju s onima iz metode Pijavskog.*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kako se definiraju potencijalno optimalni intervali kod metode DIRECT?.*
(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 i intervale: $[a_i, b_i]$: $[0,6]$, $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$, $[0,\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},\frac{4}{3}]$, $[\frac{4}{3},2]$ nacrtajte točke $T_i = (d_i, f(c_i))$, gdje je d_i poluširina intervala $[a_i,b_i]$, a $f(c_i)$ vrijednost funkcije u centru intervala. Koji od navedenih intervala su potencijalno optimalni?*
Rješenje: *a) Vidi Nastavne materijale; b) Potencijalno optimalni intervali su: $[0,6]$, $[0,2]$.*

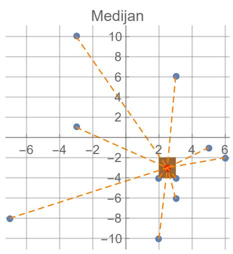
Zadatak 5. [25 bodova]
(a) *Kada za funkciju $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*
(b) *Je li funkcija $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1,x_2) = (x_1 - .75)^2 + (x_2 - .75)^2$ Lipschitz-neprekidna? Ako je, odredite Lipschitzovu konstantu $L > 0$.*
(c) `DIRECT` *algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata $[0,1]^2$ na kome je definirana funkcija g. U svakoj iteraciji odredite subpravokutnik s najmanjom $\mathcal{B}$-vrijedosti i trenutnu vrijednost minimuma.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $L = \frac{3}{2}$; (c) Vidi Sliku 3; U It.1 može se dijeliti ili kao na Slici 5.3a ili kao na Slici 5.3b jer je $w_1 = w_2$. Odabrano je dijeljenje kao na Slici 5.3a. U It.2 dijeli se subpravokutnik s centrom u $(.5,.5) + \delta e_1$, gdje je $\delta = \frac{1}{3}$.*



Slika 3: Dijeljenje kvadrata $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ u slučaju funkcije $g(x_1,x_2) = (x_1 - .75)^2 + (x_2 - .75)^2$. Crvenim točkicama označeni su centri subpravokutnika na kojima se postiže najmanja $\mathcal{B}$-vrijednost

Zadatak 6. [15 bodova]
(a) *Neka je $\mathcal{A} = \{a^i : i = 1,\dots,m\} \subset \mathbb{R}^n$ skup podataka i $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ kvazimetrička funkcija. Kako se definira najbolji reprezentant $c^\star$ skupa $\mathcal{A}$? Što je $c^\star$ u slučaju ℓ_1-metričke funkcije?*
(b) *Neka je $\mathcal{A} = \{(6,-2),(-7,-8),(3,-4),(-3,1),(2,-4),(-3,10),(3,-6),(5,-1),(3,6),(2,-10)\}$. Odredite najbolji reprezentant $c^\star$ skupa $\mathcal{A}$ u slučaju ℓ_1-metričke funkcije.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $c_1^\star = [2,3] \times [-4,-2]$*



Slika 4: Medijan skupa podataka $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.