Sveučilište u OsijekuOdjel za matematiku
30. siječnja 2018.

Matematički praktikum (2017./2018.)

Popravni kolokvij 1.

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Neka je $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ skup točaka. Kako se definira centroid, kako medijan, a kako geometrijski medijan skupa $\mathcal{A}$?*

(b) *Odredite centroid i medijan skupa $\mathcal{A} = \{(1,1), (6,9), (8,5)\}$.*
(c) *Može li se geometrijski medijan proizvoljnog skupa $\mathcal{A}$ postići u nekoj od točaka skupa $\mathcal{A}$? Obrazložite svoju tvrdnju!*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) centroid: $(5,5)$, $\operatorname{med}\mathcal{A} = (6,5)$; (c) Može, primjerice za $n = 1$ geometrijski medijan je jednak medijanu koji je za neparan m točka iz skupa $\mathcal{A}$.*

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Neka je $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = (x-2)^2 + 1$ zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja najkraće Euklidske ℓ_2-udaljenosti točke $T_0 = (3,4)$ do grafa parabole q. Koliko lokalnih minimuma postiže minimizirajuća funkcija u ovom slučaju? Lokalizirajte intervale lokalnih minimuma. Na kome od njih se postiže globalni minimum?*

(b) *Postavite optimizacijski problem traženja najkraće ℓ_1-udaljenosti točke $T_0 = (3,4)$ do grafa parabole q.*
Rješenje: *(a) Minimizirajuća funkcija postiže dva lokalna minimuma; Intervali u kojima se nalaze lokalni minimumi su primjerice $[0,1]$ i $[3,4]$; Globalni minimum postiže se na intervalu $[3,4]$ (b) Vidi Nastavne materijale.*

Zadatak 3. [15 bodova]
(a) *Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu D. Dokažite da je nivo - skup $D_\lambda(f) = \{x \in D : f(x) \le \lambda\}$ konveksan skup za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(b) *Vrijedi li obrat prethodne tvrdnje? Obrazložite.*
Rješenje: *Vidi nastavne materijale.*

Zadatak 4. [20 bodova]
Zadana je funkcija $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$ te neka je $(x_0, y_0) = (2,3)$. Odredite vektor $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ i $\alpha > 0$ tako da vrijedi

$$f(x_0 + \alpha p_1, y_0 + \alpha p_2) < f(x_0, y_0).$$

Rješenje: *Primjerice: $p = -\nabla f(x_0, y_0) = -(4,4)$, $\alpha^\star = \operatorname*{argmin}_{\alpha>0} f(x_0 + \alpha p_1, y_0 + \alpha p_2) = \frac{1}{2}$.*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \le 3, \\ |x^2 - 1| - 6, & x > 3. \end{cases}$*

(b) *Odredite broj iteracija potreban da bi se metodom zlatnog reza odredila točka globalnog minima ove funkcije s točnošću na dvije decimale. Odredite prve dvije iteracije.*
Rješenje: *(b) Potrebno je 15 iteracija; $x_1^* = 1.18034$, $x_2^* = 2.36068$;*

Zadatak 6. [20 bodova]
Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in [a,b]$. *Odredite* $\overline{x} = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, *gdje je* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *sa sljedećim svojstvima:*

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = f(x_0) =: f_0, \\ g'(x_0) &= 2\alpha x_0 + \beta = f'(x_0) =: f_0', \\ g'(x_1) &= 2\alpha x_1 + \beta = f'(x_1) =: f_1'. \end{aligned}$$

Rješenje: $\overline{x} = -\frac{\beta}{2\alpha} = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f_1' - f_0'} f_0'$.

Sveučilište u OsijekuOdjel za matematiku
30. siječnja 2018.

Matematički praktikum (2017./2018.)

Popravni kolokvij 2.

Zadatak 1. [20 bodova]
(a)*Kada za funkciju* $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, *kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*

(b) *Je li funkcija* $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\limits_{x\in[-3,3]}\{\frac{1}{2}(x+1)^2+1, \frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}\}$ *Lipschitz-neprekidna? Ako jest, odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu* $L > 0$.

(c) *Je li ova funkcija neprekidna na* $[-3,3]$*? Jeli derivabilna* $(-3,3)$*? Konstruirajte jednu donju ogradu ove funkcije.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 2$*; (c) Ova funkcija je neprekidna na* $[-3,3]$*, ali nije derivabilna na* $(-3,3)$*. Jedna donja ograda je funkcija* $K(u;u_0) = f(u_0) - 2|u - u_0|$, $u_0 \in [-3,3]$.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Ako je* $f \in Lip_L[a,b]$, (u_n) *niz čvorova i* (P_n) *niz funkcija definiranih kao u algoritmu slomljenih pravaca (Pijavski), koja svojstva ima niz funkcija* (P_n)*?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 uz* $u_0 = 3$ *provedite prva tri koraka Pijavski-algoritma.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $(u_0, f(u_0)) = (3,1)$, $(u_1, f(u_1)) = (-3,3)$, $(u_2, f(u_2)) = (.5, 1.625)$, $(u_3, f(u_3)) = (-.90625, 1.00439)$.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se određuje donja ograda funkcije* $f \in Lip_L[a,b]$ *kod Shubertove metode?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 provedite prva tri koraka Shubertovog algoritma.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $(u_0, f(u_0)) = (0, 1.5)$, $(u_1, f(u_1)) = (.5, 1.625)$, $(u_2, f(u_2)) = (-.90625, 1.00439)$, $(u_3, f(u_3)) = (1.90625, 0.504395)$.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kako se određuje donja ograda funkcije* $f \in Lip_L[a,b]$ *kod* `DIRECT` *optimizacijskog algoritma?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 provedite prva tri koraka* `DIRECT` *optimizacijskog algoritma.*

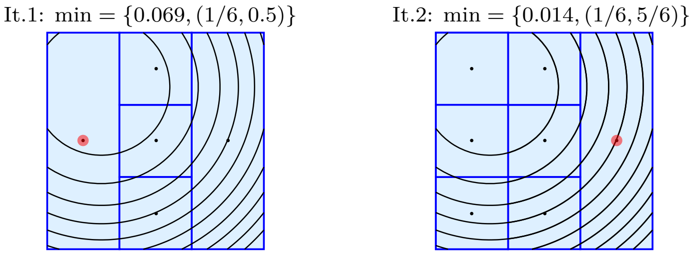
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) It-1:* $\min = (0, 1.5)$*; dijeli se* $[-3,3]$*; It-2:* $\min = (2, .5)$*; dijeli se* $[1,3]$*; It-3:* $\min = (2, .5)$*; dijeli se* $[-1,1]$

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Kada za funkciju* $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, *kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*

(b) *Je li funkcija* $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = (x_1 - .25)^2 + (x_2 - .75)^2$ *Lipschitz-neprekidna? Ako je, odredite Lipschitzovu konstantu* $L > 0$.

(c) `DIRECT` *algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata* $[0,1]^2$ *na kome je definirana funkcija* g*. U svakoj iteraciji odredite subpravokutnik s najmanjom* $\mathcal{B}$*-vrijedosti i trenutnu vrijednost minimuma.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = \frac{3}{2}$*; (c) Vidi Sliku 1; U It.1 može se dijeliti ili kao na Slici 5.3a ili kao na Slici 5.3b jer je* $w_1 = w_2$*. Odabrano je dijeljenje kao na Slici 5.3a. U It.2 dijeli se subpravokutnik s centrom u* $(.5, .5) - \delta e_1$*, gdje je* $\delta = \frac{1}{3}$.



Slika 1: Dijeljenje kvadrata $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ u slučaju funkcije $g(x_1, x_2) = (x_1 - .25)^2 + (x_2 - .75)^2$. Crvenim točkicama označeni su centri subpravokutnika na kojima se postiže najmanja $\mathcal{B}$-vrijednost

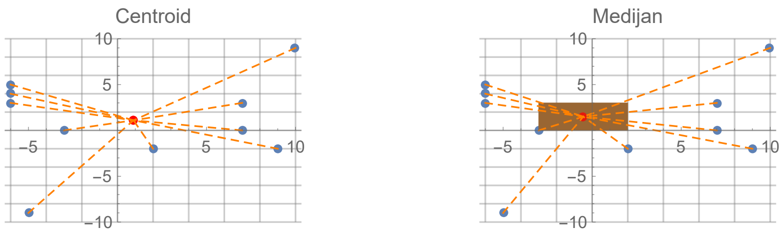
Zadatak 6. [20 bodova]

(a) Neka je $\mathcal{A} = \{a^i : i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ skup podataka i $d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ kvazimetrička funkcija. Kako se definira najbolji reprezentant $c^\star$ skupa $\mathcal{A}$? Što je $c^\star$ u slučaju LS-kvazimetričke funkcije, a što u slučaju ℓ_1-metričke funkcije?

(b) Neka je $\mathcal{A} = \{(7,0), (-6,3), (7,3), (9,-2), (-6,5), (-5,-9), (-3,0), (-6,4), (10,9), (2,-2)\}$. Odredite najbolji reprezentant $c^\star$ skupa $\mathcal{A}$ u slučaju LS-kvazimetričke funkcije.

(c) Odredite najbolji reprezentant $c^\star$ skupa $\mathcal{A}$ u slučaju ℓ_1-metričke funkcije.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $c^\star_{LS} = (0.9, 1.1)$; (c) $c^\star_1 = [-3, 2] \times [0, 3]$*



Slika 2: Centroid i medijan skupa podataka $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$