Matematički praktikum
Predavanje 4 – [*]

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski
prof. dr. sc. Kristian Sabo
doc. dr. sc. Danijel Grahovac
dr. sc. Matea Ugrica[†]

2. studenoga 2020.

Sadržaj

1 **Optimizacijski problem** **1**

2 **Konveksne funkcije** **2**
2.1 Metoda tangenti za konveksnu derivabilnu funkciju 5

3 **Kvazikonveksne funkcije** **9**
3.1 Unimodalne funkcije 13

4 **Diferencijabilne funkcije** **14**

1 Optimizacijski problem

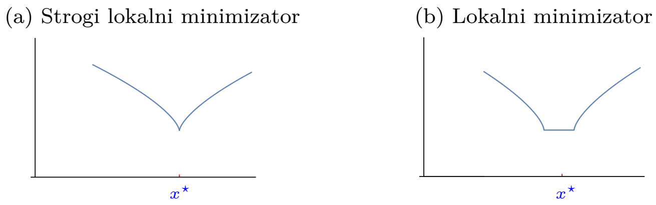
Definicija 1. [6] Kažemo da funkcija $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ u točki $x^\star \in \mathcal{D}$ postiže lokalni minimum ako postoji okolina $\mathcal{O}(x^\star)$ takva da je $f(x) \geq f(x^\star)$ za sve $x \in \mathcal{O}(x^\star) \cap \mathcal{D}$. Točku $x^\star$ zovemo točka lokalnog minimuma ili lokalni minimizator funkcije f.

Kažemo da je $x^\star$ točka strogog lokalnog minimuma ili strogi lokalni minimizator funkcije f ako postoji okolina $\mathcal{O}(x^\star)$ takva da je $f(x) > f(x^\star)$ za sve $x \in \mathcal{O}(x^\star) \cap \mathcal{D} \setminus \{x^\star\}$.

---

[*] Matematički praktikum obavezni je predmet u zimskom semestru druge godine sveučilišnog Diplomskog studija matematike na smjerovima Financijska matematika i statistika i Računarstvo, te na petoj godini sveučilišnog Nastavničkog studija matematike i informatike (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[†] scitowsk@mathos.hr, ksabo@mathos.hr, dgrahova@mathos.hr, mugrica@mathos.hr



Slika 1: Lokalni minimizator i strogi lokalni minimizator

Definicija 2. Kažemo da funkcija $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ u točki $x^\star \in D$ postiže globalni minimum na $\mathcal{D}$ ako je

$$f(x^\star) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Točku $x^\star \in \mathcal{D}$ zovemo točka globalnog minimuma ili globalni minimizator funkcije f na $\mathcal{D}$. Skup svih točaka globalnog minimuma funkcije f označavamo s

$$\operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{D}} f(x),$$

vrijednost

$$f(\hat{x}), \quad \text{za} \quad \hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{D}} f(x),$$

zovemo globalni minimum funkcije f na $\mathcal{D}$, a funkciju f nazivamo *minimizirajuća funkcija.*

Primjedba 1. Analogno definiciji globalnog minimuma može se definirati pojam *globalnog maksimuma* i *točka globalnog maksimuma* funkcije f, ali kako je

$$\begin{aligned} (i) \quad & \max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = -\min_{x \in \mathcal{D}} \big(-f(x) \big), \\ (ii) \quad & \operatorname*{argmax}_{x \in \mathcal{D}} f(x) = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathcal{D}} \big(-f(x) \big), \end{aligned}$$

dovoljno je proučavati samo problem globalnog minimuma.

2 Konveksne funkcije

Za funkciju $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, promatrajmo optimizacijski problem definiran u t.**??**, str.**??**. U nastavku navodimo definicije konveksnog skupa i konveksne funkcije te dajemo odgovarajuće karakterizacije (vidi primjerice [2, 3, 5]).

Definicija 3. Kažemo da je skup $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan ako je za sve $x, y \in \mathcal{D}$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathcal{D}$ za svaki $\alpha \in [0,1]$. Za funkciju $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, definiranu na konveksnom skupu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksna ako za sve $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \quad \forall \alpha \in [0,1]. \tag{1}$$

Ako u prethodnoj nejednakosti vrijedi znak „$<$" za svaki $\alpha \in (0,1)$ i $x \neq y$, onda kažemo da je funkcija f strogo konveksna.

U sljedećim lemama navedena su neka važna svojstva konveksnih funkcija [1–4].

Lema 1. *Neka je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Onda vrijedi:*

(i) nivo-skup (level-set) $\mathcal{D}_\lambda(f) = \{x \in \mathcal{D}\colon f(x) \leq \lambda\}$ je konveksan skup za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) ako je $\mathcal{D}$ otvoren skup, onda je funkcija f neprekidna na $\mathcal{D}$.

Lema 2. *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna derivabilna funkcija. Tada:*

(i) $f(u) \geq f(v) + f'(v)(u-v), \quad \forall u,v \in [a,b]$ (gradijentna nejednakost)

(ii) Derivacija f' ne opada na $[a,b]$.

Dokaz. U svrhu dokaza tvrdnje (i) nejednakost (1) za $\alpha \in (0,1)$ zapišimo u obliku

$$\alpha f(u) \geq f(v + \alpha(u-v)) - (1-\alpha) f(v),$$

što nakon dijeljenja s α možemo zapisati kao:

$$f(u) \geq f(v) + \frac{f(v+\alpha(u-v)) - f(v)}{\alpha(u-v)}(u-v).$$

Za $\alpha \to 0+$ dobivamo nejednakost (i).

Dokažimo tvrdnju (ii). U gradijentnoj nejednakosti (i) varijable u i v su ravnopravne. Zamijenimo li ih, iz (i) dobivamo $f(v) \geq f(u) + f'(u)(v-u)$. Zbrajanjem ove nejednakosti s gradijentnom nejednakosti (i) dobivamo

$$\left(f'(u) - f'(v)\right)(u-v) \geq 0,$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja (vidi također Zadatak 1). □

Zadatak 1. *Pokažite da je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rastuća onda i samo onda ako vrijedi*

$$(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2,$$

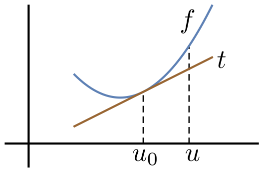
a da je padajuća onda i samo onda ako vrijedi

$$(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \leq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2.$$

Geometrijski smisao gradijentne nejednakosti je da njena tangenta $t(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u-u_0)$ u proizvoljnoj točki $u_0 \in [a,b]$ leži ispod grafa te funkcije (vidi Sliku 2).

Tvrdnje sljedećih zadataka u sebi sadrže nekoliko kriterija konveksnosti, ovisno o pretpostavkama koje funkcija zadovoljava.

Zadatak 2. *Neka je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ konveksna derivabilna funkcija definirana na otvorenom konveksnom skupu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Dokažite da ako je $x^\star \in \mathcal{D}$ takav da je $f'(x^\star) = 0$, tada je $x^\star$ globalni minimizator funkcije f.*



Slika 2: Ilustracija gradijentne nejednakosti

Zadatak 3. *Neka je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija definirana na otvorenom konveksnom skupu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Dokažite:*

(a) Funkcija f je konveksna ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

(b) Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in \mathcal{D}$, onda je f strogo konveksna.

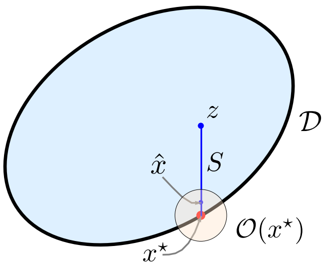
(c) Na primjeru funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ pokažite da obrat tvrdnje pod (b) ne vrijedi.

Konveksnost minimizirajuće funkcije značajno pojednostavljuje optimizacijski problem zbog činjenice da lokalna optimalnost rješenja garantira globalnu optimalnost o čemu govori sljedeća lema.

Lema 3. *Neka je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ako je $x^\star$ lokalni minimizator funkcije f, tada je $x^\star$ i globalni minimizator funkcije f.*

Dokaz. Kako je $x^\star$ lokalni minimizator funkcije f, po Definiciji 1 postoji okolina $\mathcal{O}(x^\star)$ takva da je $f(x) \geq f(x^\star)$ za sve $x \in \mathcal{O}(x^\star) \cap \mathcal{D}$. Pretpostavimo da $x^\star$ nije globalni minimizator funkcije f. Po Definiciji 2 postoji $z \in \mathcal{D}$, takav da je $f(z) < f(x^\star)$. Koristeći ovu nejednakost i svojstvo konveksnosti funkcije f definirane na konveksnom skupu $\mathcal{D}$, za proizvoljni $\alpha \in (0, 1]$ dobivamo

$$f(\alpha z + (1-\alpha)x^\star) \leq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(x^\star) < \alpha f(x^\star) + (1-\alpha) f(x^\star) = f(x^\star).$$



Slika 3: Globalni minimum konveksne funkcije na konveksnom skupu $\mathcal{D}$

To znači da za svaki x iz spojnice $S = \{\alpha z + (1-\alpha)x^\star \in \mathcal{D} \colon \alpha \in (0, 1]\}$ vrijedi $f(x) < f(x^\star)$. Zato postoji $\hat{x} \in S \cap \mathcal{O}(x^\star)$ za koji je također $f(\hat{x}) < f(x^\star)$, što se protivi pretpostavci da je $x^\star$ lokalni minimizator funkcije f. $\square$

Zadatak 4. *Pokažite da je funkcija $F_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana u Primjeru* **??** *konveksna.*

Zadatak 5. *Dokažite da je konveksna funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna u svim unutrašnjim točkama intervala* $[a,b]$ *i da ima konačne derivacije slijeva i sdesna, pri čemu vrijedi* $f'(x-) \leq f'(x+)$, $x \in (a,b)$.

Uputa: *Dokazati da vrijedi*

$$\frac{f(u)-f(u-\tau)}{\tau} \leq \frac{f(u)-f(u-h)}{h} \leq \frac{f(u+h)-f(u)}{h} \leq \frac{f(u+\tau)-f(u)}{\tau}, \tag{2}$$

gdje je $0 < h < \tau;\quad u, u \pm \tau, u \pm h \in [a,b]$.

Zadatak 6. *Pokažite da za konveksnu funkciju* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u}, \quad a \leq v < u < w \leq b. \tag{3}$$

Koji je geometrijski smisao ovih nejednakosti?

Uputa. *Iskoristiti konveksnost funkcije* f *i zapis* $u = \alpha v + (1-\alpha)w$, *gdje je* $v < u < w$, $\alpha = \frac{w-u}{w-v}$, $\alpha \in (0,1)$.

Zadatak 7. *Dokažite da ako je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija, onda vrijedi*

$$f(u) \geq f(v) + \gamma_n(u-v), \qquad \forall u \in [a,b], \forall v \in (a,b), \tag{4}$$

gdje je $\gamma_n \in \mathbb{R}$ *proizvoljni broj takav da je* $f'(v-) \leq \gamma_n \leq f'(v+)$.
Uputa. *Iskoristiti nejednakost (2) razmotrivši slučajeve* $u > v$ *i* $u < v$ *i nejednakost* $f'(v-) \leq f'(v+)$.

Zadatak 8. *Dokažite da je* $x^* \in [a,b]$ *točka minimuma konveksne funkcije* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *onda i samo onda ako je* $f'(x^*+) \geq 0$ *i* $f'(x^*-) \leq 0$. *Specijalno, ako* $f'(x^*)$ *postoji i ako je* $x^* \in (a,b)$, *onda je* $f'(x^*) = 0$.
Uputa. *U (4) stavite* $\gamma_n = 0$.

Zadatak 9. *Dokažite da je derivabilna funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konveksna onda i samo onda ako njezina derivacija* f' *ne opada na* $[a,b]$ *(vidi Lemu 2).*

Zadatak 10. *Dokažite da ako je funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monotono rastuća, a* $z : [c,d] \to [a,b]$ *konveksna, onda je* $f \circ z : [c,d] \to \mathbb{R}$ *konveksna.*

2.1 Metoda tangenti za konveksnu derivabilnu funkciju

Za konveksnu derivabilnu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ može se konstruirati jednostavan algoritam za traženje njenog globalnog minimuma.

Za fiksni $u_0 \in [a,b]$ definiramo funkciju

$$\Lambda(u; u_0) = f(u_0) + f'(u_0)(u-u_0), \quad u \in [a,b], \tag{6}$$

koju u algoritmu označavamo s $P_0(u)$. Zbog svojstva (i) iz Leme 2 vrijedi $f(u) \geq \Lambda(u; u_0)$, odnosno $f(u) \geq P_0(u)$, za svaki $u \in [a,b]$, tj. P_0 je donja ograda funkcije f.

Algorithm 1 **(Metoda tangenti)**

Require: f, $u_0 \in [a,b]$

1: Definirati $\Lambda(u;u_0) = f(u_0) + f'(u_0)(u-u_0)$; $P_0(u) := \Lambda(u;u_0)$;

2: Odrediti $u_1 = \underset{u\in[a,b]}{\operatorname{argmin}} P_0(u)$ (Očigledno je $u_1 = a$ ili $u_1 = b$);

3: Provjeriti je li $f'(u_1) \neq 0$ [ako je $f'(u_1) = 0$, onda funkcija f u točki u_1 postiže minimum]

4: Definirati $\Lambda(u;u_1)$ i $P_1(u) = \max\limits_{i=0,1} \Lambda(u;u_i) = \max\{\Lambda(u;u_1), P_0(u)\}$;

5: Odrediti $u_2 = \underset{u\in[a,b]}{\operatorname{argmin}} P_1(u)$;

6: Uz pretpostavku da je funkcija P_{n-1} i čvorovi $u_0, u_1, \dots, u_{-1}$ ($n \geq 2$) poznati, definirati $u_n = \underset{u\in[a,b]}{\operatorname{argmin}} P_{n-1}(u)$ i provjeriti je li $f'(u_n) \neq 0$ [ako je $f'(u_n) = 0$, onda funkcija f postiže minimum u točki u_n];

7: Definirati

$$P_n(u) = \max_{i=0,\dots,n} \Lambda(u;u_i) = \max\left\{\Lambda(u;u_n), P_{n-1}(u)\right\}; \tag{5}$$

8: Odrediti $u_{n+1} = \underset{u\in[a,b]}{\operatorname{argmin}} P_n(u)$

Nadalje, definiramo sljedeću aproksimaciju $u_1 = \underset{u\in[a,b]}{\operatorname{argmin}} P_0(u)$ koja se očigledno postiže na jednom od rubova intervala $[a,b]$. Nakon toga analogno definiramo $\Lambda(u;u_1) := f(u_1) + f'(u_1)(u-u_1)$ i funkciju

$$P_1(u) = \max\{\Lambda(u;u_1), \Lambda(u;u_0)\} = \max\{\Lambda(u;u_1), P_0(u)\}.$$

Sljedeća aproksimacija dobiva se kao

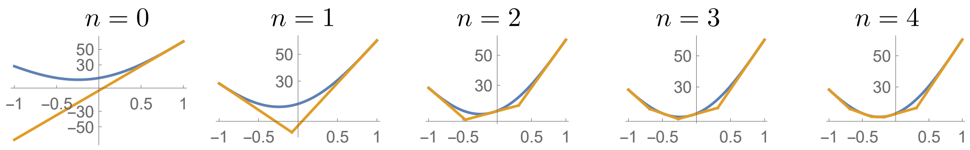
$$u_2 = \underset{u\in[a,b]}{\operatorname{argmin}} P_1(u).$$

Iterativni postupak nastavlja se do unaprijed zadanog broja iteracija ili primjenom nekog drugog kriterija zaustavljanja (vidi primjerice Zadatak **??**).

Navodimo odgovarajući algoritam, čiju implementaciju možemo vidjeti u t.**??**, str.**??**. Funkcija P_n neprekidna je po dijelovima linearna funkcija, čiji je graf sastavljen od dijelova tangenti na graf funkcije f. Zato ovu metodu zovemo Metoda tangenti.

Primjer 1. *Metodu tangenti ilustrirat ćemo na primjeru minimizacije funkcije $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 13 + 18x + 37x^2 - 2x^3 - 6x^4 + \frac{1}{4}x^6$ koja predstavlja lokalnu LS-udaljenost točke do kubne parabole (vidi Primjer* **??***, str.***??** *i Primjer* **??***, str.***??***). Primijetite da je ovako definirana funkcija konveksna i derivabilna.*

Na Slici 1 dana je ilustracija Algoritma 1 primjenom *Mathematica*-modula `MeTang` (vidi t.**??**, str.**??**), a u Tablici 1 može se detaljnije pratiti iterativni postupak. Globalni minimum postiže se u točki $u^\star = -0.243094$.



Slika 4: Ilustracija *Metode tangenti* za funkciju iz Primjera 1

n	1	2	3	4	5
u_n	-1	-0.078	-0.464	-0.266	-0.172
$f(u_n)$	28.25	11.825	12.545	10.838	11.006
$\lvert u^\star - u_n\rvert$	0.757	0.165	0.221	0.023	0.071

Tablica 1: Prvih 5 iteracija *Metode tangenti* na Primjeru 1

Lema 4. *Neka je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *konveksna derivabilna funkcija,* u_n *niz čvorova i* (P_n) *niz funkcija definiranih kao u Algoritmu 1. Tada vrijedi (usporedite sa svojstvima koja su navedena u Lemi* **??**, *str.***??** *u* Metodi Pijavskog*):*

(i) P_n *je po dijelovima linearna funkcija;*

(ii) $P_n(u) \le P_{n+1}(u)$, $\forall u \in [a,b]$ *i* $\forall n = 0,1,\dots$ *(monotoni rast)*

(iii) $P_n(u) \le f(u)$, $\forall u \in [a,b]$ *i* $\forall n = 0,1,\dots$ *(ograničenost odozgo)*

(iv) $P_n(u_i) = f(u_i)$, $\forall i = 0,1,\dots,n$ *(podudaranje u čvorovima)*

Dokaz. Tvrdnja (i) je očigledna, a (ii) slijedi iz nejednakosti $P_{n+1}(u) = \max\{\Lambda(u;u_{n+1}, P_n(u))\} \ge P_n(u)$.

Tvrdnja (iii) dokazuje se induktivno. Najprije zbog gradijentne nejednakosti zaključujemo da je $P_0(u) = \Lambda(u;u_0) \le f(u)$ i pretpostavimo da je $P_{n-1}(u) \le f(u)$.

Kako također prema gradijentnoj nejednakosti vrijedi $\Lambda(u;u_n) \le f(u)$, imamo

$$P_n(u) = \max\{\Lambda(u;u_n), P_{n-1}(u))\} \le \max\{f(u), f(u)\} = f(u).$$

Za dokaz tvrdnje (iv) najprije primijetimo da iz gradijentne nejednakosti slijedi

$$f(u_i) = \Lambda(u_i;u_i), \quad i = 0,1,\dots,n. \tag{7}$$

Nadalje, kako je $P_n(u) = \max\limits_{i=0,1,\dots,n} \Lambda(u;u_i) \ge \Lambda(u;u_i)$, slijedi

$$P_n(u_i) \ge \Lambda(u_i;u_i), \quad i = 0,1,\dots,n. \tag{8}$$

Zato iz (7) slijedi

$$f(u_i) \overset{(7)}{=} \Lambda(u_i;u_i) \overset{(8)}{\le} P_n(u_i) \overset{(iii)}{\le} f(u_i), \quad i = 0,1,\dots,n,$$

a to znači da u prethodnoj nejednakosti svuda mora biti jednakost. $\square$

Primjedba 2. Niz (u_n) dobiven Algoritmom 1 konvergira prema točki globalnog minimuma funkcije f. Dokaz ove činjenice analogan je dokazu Teorema **??**, str.**??**.

Primjedba 3. Opisana *Metoda tangenti* može se modificirati za traženje minimuma konveksne funkcije (ne nužno derivabilne), koja na intervalu $[a, b]$ postiže svoj minimum. Naime, konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna je na (a, b) i u svakoj točki $x \in (a, b)$ postoje konačni limesi

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x+), \qquad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} =: f'(x-),$$

pri čemu je $f'(x-) \leq f'(x+)$ (vidi Zadatak 5). Zato u prethodno opisanoj *Metodi tangenti* možemo staviti

$$\Lambda(u; u_n) = f(u_n) + \gamma_n(u - u_n), \quad u \in [a, b], \tag{9}$$

gdje je γ_n proizvoljna konstanta koja zadovoljava nejednakost

$$f'(u_n-) \leq \gamma_n \leq f'(u_n+).$$

Primijetite da nejednakost $f(u) \geq \Lambda(u; u_n)$, $u \in [a, b]$ pri tome ostaje sačuvana (vidi Zadatak 7). U primjeni je najjednostavnije γ_n odrediti iz uvjeta

$$|\gamma_n| = \min\{|f'(u_n-)|, |f'(u_n+)|\}.$$

Ako se za neki n pokaže da vrijedi

$$f'(u_n-) \leq 0 \leq f'(u_n+),$$

onda je u_n točka minimuma (vidi Zadatak 8) i proces je završen.

U cilju izbjegavanja mogućih degeneracija $f'(a-) = -\infty$ ili $f'(b+) = +\infty$, dovoljno je iterativni proces započeti točkama $u_0 = a + h_0, u_1 = b - h_1$, gdje h_0 i h_1 treba izabrati tako da računalo prepoznaje $f'(a + h_0+)$ i $f'(b - h_1-)$.

Primjedba 4. Ideja *Metode tangenti* za traženje globalnog minimuma konveksne derivabilne funkcije iskoristit će se u t.**??**, str.**??** za konstrukciju važne metode za traženje globalnog minimuma Lipschitz neprekidne funkcije.

Zadatak 11. *Za funkciju* $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$*, odredite prve tri aproksimacije globalnog minimuma* Metodom tangenti *uz* $u_0 = 1$*.*

Zadatak 12. *Provjerite može li se za minimizaciju funkcije* $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = x^3 + 3x^2$ *primijeniti* Metoda tangenti *te ako može, provedite prve tri iteracije uz početnu aproksimaciju* $u_0 = -1$*.*

3 Kvazikonveksne funkcije

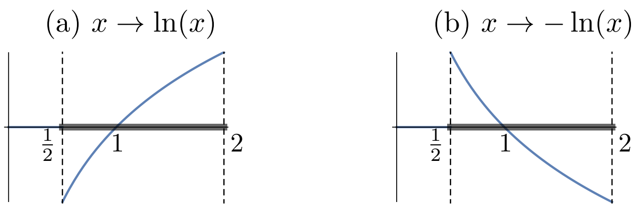
Kao što smo vidjeli iz Leme 3, konveksne funkcije imaju svojstvo izrazito korisno u optimizaciji, a koje glasi da je svaki lokalni minimizator funkcije (ako postoji) ujedno i globalni minimizator te funkcije. U mnogim optimizacijskim problemima pojavljuju se funkcije koje imaju slično svojstvo, a pri tome nisu konveksne. Prirodno je postaviti pitanje može li se oslabjeti zahtjev na konveksnost funkcije, a da se zadrži neki oblik ovog svojstva. S tim ciljem uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 4. Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ je kvazikonveksna na konveksnom skupu $\mathcal{D}$ ako za sve $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall \alpha \in [0,1]. \tag{10}$$

Ako u (10) vrijedi stroga nejednakost za $\alpha \in (0,1)$ i $x \neq y$, onda kažemo da je f strogo kvazikonveksna na $\mathcal{D}$ (vidi [6]).

Primjedba 5. Primijetite da je svaka monotona funkcija ujedno i kvazikonveksna. Kao primjer razmotrite monotono rastuću funkciju $x \to \ln(x)$ i monotono padajuću funkciju $x \to -\ln(x)$, obje definirane na segmentu $[0.5, 2]$ (vidi Sliku 5).



Slika 5: Kvazikonveksne funkcije

Sljedeća lema daje jedan praktičan kriterij za ispitivanje kvazikonveksnosti neke funkcije.

Lema 5. *Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je kvazikonveksna na $\mathcal{D}$ onda i samo onda ako je za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ nivo-skup $\mathcal{D}_\lambda(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq \lambda\}$ konveksan.*

Dokaz. (Nužnost) Pretpostavimo da je funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ kvazikonveksna i dokažimo da je za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ skup $\mathcal{D}_\lambda(f)$ konveksan.

Neka su $x, y \in \mathcal{D}_\lambda(f)$. To znači da je $f(x) \leq \lambda$ i $f(y) \leq \lambda$. Kako je f kvazikonveksna, za proizvoljni $\alpha \in [0,1]$ vrijedi

$$f(\alpha\, x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \lambda,$$

iz čega zaključujemo da je $\alpha\, x + (1-\alpha)y \in \mathcal{D}_\lambda(f)$.

(Dovoljnost) Pretpostavimo da je za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ skup $\mathcal{D}_\lambda(f)$ konveksan i dokažimo da je tada funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ kvazikonveksna.

Za proizvoljne $x, y \in \mathcal{D}$ definirajmo $\mu = \max\{f(x), f(y)\}$. Tada su $x, y \in \mathcal{D}_\mu(f)$, a kako je $\mathcal{D}_\mu(f)$ konveksan, onda je $\alpha\, x + (1-\alpha)y \in \mathcal{D}_\mu(f)$, $\forall \alpha \in [0,1]$, iz čega slijedi

$$f(\alpha\, x + (1-\alpha)y) \le \mu = \max\{f(x), f(y)\}. \qquad \square$$

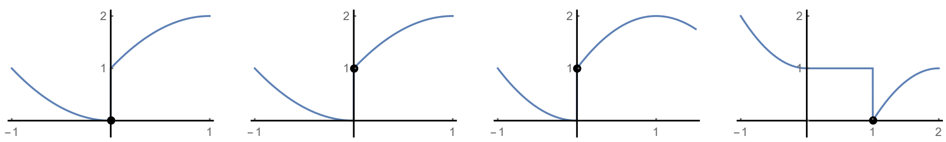
Primjedba 6. Primijetite da vrijedi [1, 6]:

(i) Svaka konveksna funkcija f je kvazikonveksna, ali obrat ne vrijedi, tj. kvazikonveksna funkcija ne mora biti konveksna. Primjerice, na osnovu Leme 1, nije teško vidjeti da su funkcije $f : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \ln x$ te $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ kvazikonveksne, ali nisu konveksne.

(ii) Ako su funkcije f_i, $i = 1, \ldots, m$, kvazikonveksne na $\mathcal{D}$, onda je i funkcija $f(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ također kvazikonveksna na $\mathcal{D}$.

(iii) Kvazikonveksna funkcija ne mora biti neprekidna. Primjerice, funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sign} x$ je kvazikonveksna na $\mathbb{R}$, ali nije neprekidna. Primijetite također da ova funkcija nije strogo kvazikonveksna.

(a) $x \to f_1(x)$ (b) $x \to f_2(x)$ (c) $x \to f_3(x)$ (d) $x \to f_4(x)$



Slika 6: Koje od ovih funkcija su kvazikonveksne funkcije?

Primjer 2. *Promatramo sljedeće funkcije (vidi Sliku 6)*

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0] \\ 2-(x-1)^2, & x \in (0,1] \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \\ 2-(x-1)^2, & x \in [0,1] \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0] \\ 2-(x-1)^2, & x \in (0,1.5] \end{cases}, \qquad f_4(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [-1,0] \\ 1, & x \in (0,1) \\ 1-(x-2)^2, & x \in [1,2] \end{cases}.$$

Funkcija f_1 je strogo kvazikonveksna funkcija za koju je $\operatorname*{argmin}\limits_{x\in[-1,1]} f_1(x) = \{0\}$. Funkcija f_2 je strogo kvazikonveksna funkcija za koju vrijedi $\operatorname*{argmin}\limits_{x\in[-1,1]} f_2(x) = \emptyset$. Funkcija f_3 nije kvazikonveksna funkcija, dok je f_4 kvazikonveksna, ali ne i strogo kvazikonveksna funkcija. Nadalje, lokalni minimizator funkcije f_4 svaka je točka iz intervala $[0,1)$, ali niti jedna od tih točaka nije globalni minimizator. Njezin globalni minimizator je $\underset{x\in[-1,2]}{\operatorname{argmin}} f_4(x) = x^\star = 1$, a globalni minimum iznosi $f_4(x^\star) = 0$.

Primjer funkcije f_4 pokazuje kako se može dogoditi da lokalni minimizator kvazikonveksne funkcije nije ujedno globalni minimizator, odnosno da tvrdnja iz Leme 3 ne vrijedi općenito za kvazikonveksne funkcije. Međutim, analogna tvrdnja može se dokazati uz nešto jaču pretpostavku na skup lokalnih minimizatora funkcije f.

Lema 6. *Neka je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ kvazikonveksna funkcija definirana na konveksnom skupu $\mathcal{D}$. Ako je $x^\star$ strogi lokalni minimizator funkcije f, tada je $x^\star$ strogi globalni minimizator funkcije f.*

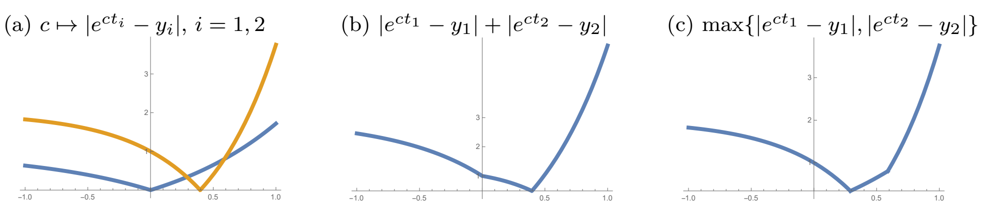
Dokaz. Ako je $x^\star$ strogi lokalni minimizator funkcije f na skupu $\mathcal{D}$, onda postoji otvoreni skup $\mathcal{O}(x^\star)$ oko točke $x^\star$ takav da je $f(x^\star) < f(x)$, za svaki $x \in \mathcal{O}(x^\star) \cap \mathcal{D}$ i $x \neq x^\star$. Pretpostavimo da $x^\star$ nije strogi globalni minimizator od f na $\mathcal{D}$, odnosno da postoji $z \in \mathcal{D}$, $z \neq x^\star$ i $f(z) < f(x^\star)$. Zbog kvazikonveksnosti funkcije f vrijedi

$$f(\alpha z + (1-\alpha)x^\star) \leq \max\{f(z), f(x^\star)\} = f(x^\star), \quad \forall \alpha \in (0,1].$$

To znači (vidi Sliku 3, str. 4) da za svaki x iz spojnice $S = \{\alpha z + (1-\alpha)x^\star \in \mathcal{D} \colon \alpha \in (0,1]\}$ vrijedi $f(x) \leq f(x^\star)$ što se protivi pretpostavci da je $x^\star$ strogi lokalni minimizator. $\square$

Zadatak 13. *Dokažite sljedeću varijantu Leme 6. Neka je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ strogo kvazikonveksna funkcija definirana na konveksnom skupu $\mathcal{D}$. Ako je $x^\star$ lokalni minimizator funkcije f, tada je $x^\star$ globalni minimizator funkcije f.*

Zadatak 14. *Je li zbroj dviju kvazikonveksnih funkcija također kvazikonveksna funkcija ? Za podatke (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, funkcija $c \mapsto |e^{ct_i} - y_i|$ je kvazikonveksna. Je li i funkcija $c \mapsto \sum_{i=1}^{m} |e^{ct_i} - y_i|$ kvazikonveksna (vidi Sliku 7b)?*



Slika 7: Zbroj i maksimum dviju kvazikonveksnih funkcija

Zadatak 15. *Je li maksimum dviju kvazikonveksnih funkcija također kvazikonveksna funkcija ? Za podatke (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, funkcija $c \mapsto |e^{ct_i} - y_i|$ je kvazikonveksna. Je li i funkcija $c \mapsto \max_{i=1}^{m} |e^{ct_i} - y_i|$ kvazikonveksna (vidi Sliku 7c)?*

Zadatak 16. *Provjerite koje su od ovih funkcija konveksne, a koje kvazikonveksne:*

$$
\begin{array}{ll}
(a) & f_1 : [a,b] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2, \\
(b) & f_2 : [a,b] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = |x| + x + \operatorname{sign} x, \\
(c) & f_3 : [1,2] \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \ln x, \\
(d) & g_1 : [a,b] \to \mathbb{R},\ g_1(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}, \\
(e) & g_2 : [a,b] \to \mathbb{R},\ g_2(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \\
(f) & g_3 : [0,2] \to \mathbb{R},\ g_3(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ \sqrt{x}, & x \in [1,2] \end{cases}.
\end{array}
$$

Zadatak 17. *Provjerite svojstvo konveksnosti i kvazikonveksnosti sljedećih funkcija:*

$$
\begin{array}{ll}
(a) & f_1 : [a,b] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^4 + 3x, \\
(b) & f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_2(x) = -e^{-x}, \\
(c) & f_3 : [0,3] \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}.
\end{array}
$$

Zadatak 18. *Kako treba proširiti funkciju $f(x) = \frac{1}{e^{1/x^2}+1}$ u točki $x_0 = 0$ tako da ona bude*
(a) strogo kvazikonveksna na $[0,1]$,
(b) strogo kvazikonveksna na $[-1,1]$,
(c) strogo kvazikonveksna na $[-1,0]$?

Zadatak 19. *Kako treba proširiti funkciju*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x + A, & x < 0 \end{cases}$$

u točki $x_0 = 0$ tako da ona bude
(a) strogo kvazikonveksna na $[0,1]$,
(b) strogo kvazikonveksna na $[-1,0]$,
(c) strogo kvazikonveksna na $[-1,1]$,
(d) strogo kvazikonveksna na $[a,b]$ za proizvoljne $a,b \in \mathbb{R}$?
Razmotrite slučajeve: $A = 0, +1, -1$.

Zadatak 20. *Ako su funkcije f_1, f_2 strogo kvazikonveksne na $[a,b]$, jesu li takve i funkcije f_1+f_2, $f_1 - f_2$, $f_1 \cdot f_2$ te f_1/f_2 pod pretpostavkom da su dobro definirane ?*

Zadatak 21. *Neka je $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna funkcija na otvorenom konveksnom skupu $\mathcal{D}$. Pokažite da je tada f kvazikonveksna na $\mathcal{D}$ ako i samo ako za svaki $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow f'(x)(y - x) \leq 0.$$

Zadatak 22. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija. Dokažite da je f kvazikonveksna ako i samo ako za svaki $x \in \mathbb{R}$*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0.$$

Zadatak 23. *Provjerite je li funkcija* $f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = -x_1x_2$ *kvazikonveksna.*

Zadatak 24. *Neka je funkcija* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definirana s* $F(x) = \max\{i\colon x_i \neq 0\}$ *i* $f(\mathbf{0}) = 0$. *Pokažite da je* f *kvazikonveksna.*

Zadatak 25. *Provjerite jesu li sljedeće funkcije kvazikonveksne.*

a) $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon c^Tx + d > 0\}$ *zadana s*

$$f(x) = \frac{a^Tx + b}{c^Tx + d},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$.

b) $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - a\|_2 \le \|x - b\|_2\}$ *zadana s*

$$f(x) = \frac{\|x - a\|_2}{\|x - b\|_2},$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}^n$.

3.1 Unimodalne funkcije

U slučaju funkcija jedne varijable pojam „stroge kvazikonveksnosti” u literaturi se može pronaći i pod nazivom „unimodalne funkcije” (vidi primjerice [4, 6]).

Definicija 5. [4] Kažemo da je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unimodalna ako postoji $x^\star \in [a,b]$ takav da je $f(x^\star) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, a za proizvoljne $a \le x_1 < x_2 \le b$ vrijedi

$$\begin{aligned} x_2 \le x^\star &\Longrightarrow f(x_1) > f(x_2), \\ x^\star \le x_1 &\Longrightarrow f(x_2) > f(x_1). \end{aligned}$$

Primjedba 7. [4]

(i) Uočimo da svojstvo unimodalnosti povlači da je funkcija f strogo padajuća na $[a, x^\star]$ i strogo rastuća na $[x^\star, b]$ dok u točki $x^\star$ postiže globalni minimum.

(ii) Svaka je strogo monotono rastuća (padajuća) funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unimodalna.

(iii) Strogo konveksna funkcija je unimodalna.

(iv) Unimodalna funkcija ne mora biti neprekidna.

(v) Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unimodalna funkcija i $[a_1, b_1] \subset [a,b]$, onda je $f\big/_{[a_1,b_1]}$ unimodalna funkcija na $[a_1, b_1]$.

(vi) Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unimodalna funkcija, $x^\star = \operatorname*{argmin}_{x \in [a,b]} f(x)$ i ako je $a < x_1 < x_2 < b$, onda vrijedi

$$f(x_1) \le f(x_2) \Longrightarrow x^\star \in [a, x_2],$$
$$f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow x^\star \in [x_1, b].$$

Zadatak 26. *Neka za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ postoji $x^\star = \operatorname*{argmin}_{x \in [a,b]} f(x)$. Pokažite da je tada funkcija f strogo kvazikonveksna na $[a, b]$ onda i samo onda ako je unimodalna.*

4 Diferencijabilne funkcije

Ako se može pretpostaviti da je promatrana funkcija diferencijabilna, pristup rješavanju optimizacijskog problema može se preciznije postaviti. Svojstvo diferencijabilnosti funkcije ima posebno veliki značaj u karakterizaciji lokalnog minimizatora funkcije te kod konstrukcije iterativne numeričke metode za rješavanje optimizacijskog problema. U nastavku navodimo definiciju i neka važna svojstva diferencijabilnih funkcija.

Definicija 6. [6] Kažemo da funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ u točki $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}$ diferencijabilna ako postoji $a \in \mathbb{R}^n$ takav da za svaki $h \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x) - ta^T h}{t} = 0. \tag{11}$$

Ako za h redom uzmemo j-ti koordinatni vektor e^j, dobivamo

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te^j) - f(x) - ta_j}{t} = 0.$$

Dakle, komponente vektora a parcijalne su derivacije $a_j = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \partial_j f(x)$.

Ako je funkcija f diferencijabilna u točki $x \in \operatorname{int}\mathcal{D}$, onda ćemo derivaciju funkcije f u točki $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \operatorname{int}\mathcal{D}$ označavati s

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)),$$

a gradijent funkcije f u točki x s

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = f'(x)^T.$$

Nadalje, drugu derivaciju (Hessian) funkcije f u točki x (ako postoji) označavat ćemo s

$$f''(x) = H_f(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Prisjetimo se kako skup svih p-puta neprekidno diferencijalbilnih funkcija $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ označavamo s $C^p(\mathcal{D})$.

Ako je $f \in C^p(\mathcal{D})$ te $x + \alpha h \in \mathcal{D}$ za $\alpha \in [0,1]$, onda za nju vrijedi Taylorova formula (vidi primjerice [6, 7]). Specijalno, za $p = 1, 2$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (\nabla f(x))^T h + o(\|h\|), && p = 1, \\ f(x+h) - f(x) &= (\nabla f(x))^T h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h + o(\|h\|^2), && p = 2. \end{aligned}$$

Literatura

[1] M. Avriel, *Nonlinear Programming: Analysis and Methods.*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2006.

[2] D. L. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] E. M. T. Hendrix, B. G. Tóth, *Introduction to Nonlinear and Global Optimization*, Springer, 2010.

[4] F. Jarre, J. Stoer, *Optimierung*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[5] D. Jukić, *Konveksni skupovi*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015.

[6] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[7] E. Süli, D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis, 2nd Ed.*, Cambridge University Press, Second printing, 2006.