

Matematički praktikum

Predavanje 7 – *

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski
prof. dr. sc. Kristian Sabo
doc. dr. sc. Danijel Grahovac
dr. sc. Matea Ugrica[†]

3. prosinca 2020.

Sadržaj

1	Jednodimenzionalna minimizacija strogo kvazikonveksnih funkcija	2
2	Metoda polovljenja za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju	2
3	Metoda polovljenja za nederivabilnu strogo kvazikonveksnu funkciju	5
4	Metoda zlatnog reza	8
5	Jednodimenzionalna globalna optimizacija	12
5.1	Lipschitz-neprekidne funkcije	12
6	Pijavskijeva metoda slomljenih pravaca	17
7	Shubertova metoda	25
8	Optimizacijski algoritam DIRECT	28
8.1	Optimizacija algoritma DIRECT	30
8.2	Traženje potencijalno optimalnih intervala	32
8.2.1	Dodatno sužavanje skupa potencijalno optimalnih intervala	35

*Matematički praktikum obavezni je predmet u zimskom semestru druge godine sveučilišnog Diplomskog studija matematike na smjerovima Financijska matematika i statistika i Računarstvo, te na petoj godini sveučilišnog Nastavničkog studija matematike i informatike (30 sati predavanja i 30 sati vježbi, 6 ECTS bodova)

[†]scitowsk@mathos.hr, ksabo@mathos.hr, dgrahova@mathos.hr, mugrica@mathos.hr

1 Jednodimenzionalna minimizacija strogo kvazikonveksnih funkcija

U Poglavlju ?? uveli smo pojam kvazikonveksne funkcije, a u Lemi ??, str.?? naveli smo operativni kriterij za ispitivanje kvazikonveksnosti neke funkcije. Dalje ćemo se baviti strogo kvazikonveksnim funkcijama. Kažemo da je funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strogo kvazikonveksna ako za sve $x, y \in [a, b]$, ($x \neq y$) vrijedi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall \alpha \in (0, 1),$$

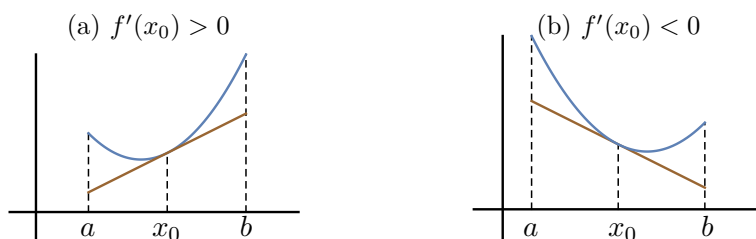
a za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ nivo-skup \mathcal{D}_λ je konveksan. Točka $x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} f(x)$ strogo kvazikonveksne funkcije točka je globalnog minimuma te funkcije.

2 Metoda polovljenja za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju

Za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uz točnost $\epsilon > 0$ treba riješiti optimizacijski problem, tj. odrediti

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} f(x), \quad \text{takav da je} \quad f(x^*) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Najjednostavnija metoda je tzv. metoda polovljenja (bisekcije), koju opisujemo u nastavku. Najprije odredimo polovište x_0 intervala $[a, b]$. Ako je $f'(x_0) = 0$, točka x_0 rješenje je problema. Ako je $f'(x_0) > 0$, dalje razmatramo podinterval $[a, x_0]$ (vidi Sliku 1a). U protivnom, dalje razmatramo podinterval $[x_0, b]$ (vidi Sliku 1b). Proces se nastavlja tako dugo dok duljina podintervala ne postane manja od ϵ , ili dok derivacija funkcije f u nekoj točki ne postane jednaka nuli.



Slika 1: Metoda polovljenja za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju

Primjedba 1. Primijetite da se ova metoda može interpretirati kao metoda polovljenja za traženje nultočke derivacije funkcije f (vidi [9]).

Neka je $[a_0, b_0] := [a, b]$ početni interval. Početnu aproksimaciju odredimo kao polovište tog intervala $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, a apsolutna pogreška je $\Delta x_0 = |x_0 - x^*| \leq \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$. Zatim izaberemo novi podinterval

$$[a_1, b_1] := \begin{cases} [a_0, x_0], & f'(x_0) > 0 \\ [x_0, b_0], & f'(x_0) < 0 \end{cases}$$

i odredimo sljedeću aproksimaciju $x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Primijetite da za apsolutnu pogrešku prve aproksimacije x_1 vrijedi $\Delta x_1 := |x_1 - x^*| \leq \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$.

Neka je općenito

$$x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k).$$

Vrijedi

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^2(b_{k-1} - a_{k-1}) = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(b_0 - a_0). \quad (1)$$

Na taj način dokazali smo sljedeći teorem o konvergenciji niza (x_k) , brzini konvergencije iterativnog postupka te odgovarajuće ocjene pogreške.

Teorem 1. *Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kvazikonveksna derivabilna funkcija. Niz (x_k) definiran na prethodno opisan način konvergira prema globalnom minimumu funkcije f linearnom brzinom i vrijedi ocjena pogreške*

$$|x^* - x_k| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |b - a|.$$

Korištenjem ocjene (1) može se odrediti potreban broj iteracija za traženu točnost $\epsilon > 0$. Iz

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)} |b_0 - a_0| < \epsilon,$$

dobivamo

$$k > \frac{\ln \epsilon - \ln |b_0 - a_0|}{\ln 0.5} - 1.$$

Algorithm 1 (Metoda polovljenja za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju)

Require: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;

Require: $a_0, b_0 \in [a, b]$; $\epsilon > 0$; $k=0$;

{Učitati funkciju f , početni interval $[a_0, b_0]$, točnost $\epsilon > 0$ i staviti $k = 0$;}

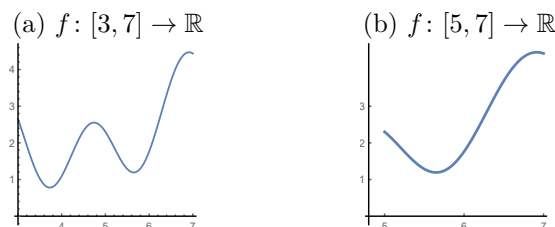
```

1: while  $b_k - a_k \geq \epsilon$ , do
2:    $x_p := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ 
3:   if  $f'(x_p) > 0$ , then
4:      $a_{k+1} = a_k$ ;  $b_{k+1} = x_p$ ;
5:   else
6:      $a_{k+1} = x_p$ ;  $b_{k+1} = b_k$ ;
7:   end if
8:    $k = k + 1$ ;
9: end while

```

Ensure: x_p

Primjer 1. Metodom polovljenja potražimo lokalni minimum funkcije $f: [3, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sin 3x + \ln x + 1$ na intervalu $[5, 7]$ (vidi Sliku 2) s jednom točnom decimalom.

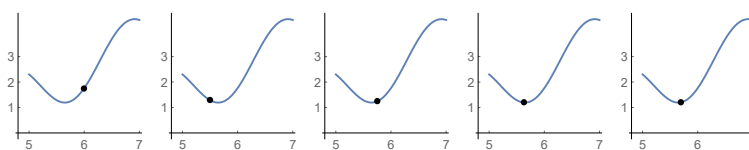


Slika 2: $f(x) = \sin x + \sin 3x + \ln x + 1$

Za $\epsilon = 0.05$ dobivamo $k > \frac{\ln(.05) - \ln|7-3|}{\ln 0.5} - 1 \approx 5.32$, što znači da ćemo nakon $k = 6$ iteracija dobiti aproksimaciju točnu na barem jednu decimalu (vidi Tablicu 1 i Sliku 3). Primijetite da je tražena točnost postignuta već u petoj iteraciji. Dobiva li se isti rezultat primjenom *Mathematica*-modula `NMinimize[]`?

k	a_k	b_k	x_k	$\frac{1}{2}(b_k - a_k)$	$f'(x_k)$
0	5	7	6	1	3.108
1	5	6	5.5	.5	-1.217
2	5.5	6	5.75	.25	.949
3	5.5	5.75	5.625	.125	-.210
4	5.625	5.75	5.6875	.0625	.360
5	5.625	5.6875	5.65625	.03125	0.071
6	5.625	5.65625	5.65625	.015625	0.071

Tablica 1: Metoda polovljenja: $f: [5, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sin 3x + \ln x + 1$



Slika 3: Metoda polovljenja za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju

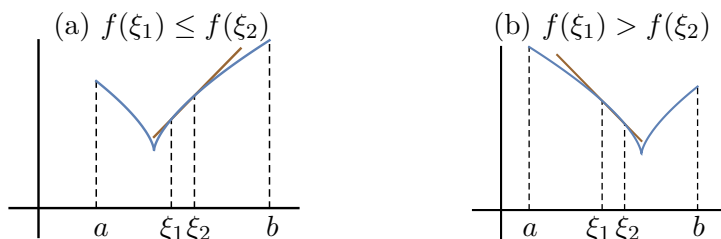
Zadatak 1. Za funkciju $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ treba odrediti aproksimaciju globalnog minimizatora.

(a) Primjenom Metode polovljenja odredite prve tri aproksimacije i ocijenite pogrešku dobivene aproksimacije.

(b) Koliko iteracija Metodom polovljenja treba provesti da bi se dobila točnost globalnog minimuma na 4 decimalna mjesta?

3 Metoda polovljenja za nederivabilnu strogo kvazikonveksnu funkciju

Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strogo kvazikonveksna funkcija. Analogno prethodnoj metodi, konstruirat ćemo *Metodu polovljenja* za ovakvu funkciju. Uz to što funkcija f općenito nije derivabilna, ona na intervalu $[a, b]$ može imati i prekide prve vrste. Neka je $\delta > 0$ realan broj takav da je $b - a > \delta$.



Slika 4: *Metoda polovljenja* za strogo kvazikonveksnu nederivabilnu funkciju

Neka je $[a_0, b_0] := [a, b]$. Budući da u ovom slučaju općenito ne možemo koristiti derivaciju funkcije f u polovištu intervala $[a_0, b_0]$, u okolini polovišta simetrično ćemo izabrati dvije točke

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0) - \frac{\delta}{2}, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0) + \frac{\delta}{2},\end{aligned}$$

i promatrati koeficijent smjera odgovarajuće sekante

$$\kappa := \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\delta}.$$

Zato će nam kriterij za odabir podintervala u kojemu ostaje ležati točka minimuma x^* biti sljedeći (vidi Sliku 4):

$$[a_1, b_1] := \begin{cases} [a_0, \xi_2], & \kappa \geq 0 \\ [\xi_1, b_0], & \kappa < 0 \end{cases} = \begin{cases} [a_0, \xi_2], & f(\xi_2) \geq f(\xi_1) \\ [\xi_1, b_0], & f(\xi_2) < f(\xi_1) \end{cases}.$$

Širina novog podintervala je

$$b_1 - a_1 (= \xi_2 - a_0 = b_0 - \xi_1) = \frac{1}{2}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2}\delta.$$

Prvu aproksimaciju x_1 možemo definirati u polovištu intervala $[a_1, b_1]$

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1).$$

Ocjena apsolutne pogreške prve aproksimacije je

$$\Delta x_1 := |x_1^* - x^*| \leq \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2^2}\delta,$$

što ćemo zapisati u obliku

$$\Delta x_1 := |x_1^* - x^*| \leq \frac{1}{2^2}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\delta,$$

Ponavljajući postupak nadalje definiramo dvije simetrične točke u okolini polovišta intervala $[a_1, b_1]$

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) - \frac{1}{2}\delta, \\ \xi_4 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) + \frac{1}{2}\delta,\end{aligned}$$

novi koeficijent smjera $\kappa = \frac{1}{\delta}(f(\xi_4) - f(\xi_3))$ i novi podinterval

$$[a_2, b_2] := \begin{cases} [a_1, \xi_4], & \kappa \geq 0 \\ [\xi_3, b_1], & \kappa < 0 \end{cases},$$

u kojemu ostaje točka minimuma x^* funkcije f . Širina novog podintervala je

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) + \frac{1}{2}\delta \left[= \frac{1}{2^2}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2^2}\delta + \frac{1}{2}\delta \right] = \frac{1}{2^2}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2}\delta\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Novu aproksimaciju x_2 odredit ćemo u polovištu intervala $[a_2, b_2]$

$$x_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2),$$

čiju apsolutnu pogrešku možemo ocijeniti s

$$\Delta x_2 := |x_2 - x^*| \leq \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^3}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2}\delta \cdot \frac{3}{4},$$

što ćemo zapisati kao

$$\Delta x_2 := |x_2 - x^*| \leq \frac{1}{2^3}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\delta.$$

Općenito, neka je poznat interval $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ širine

$$b_{k-1} - a_{k-1} = \frac{1}{2}(b_{k-2} - a_{k-2}) + \frac{1}{2}\delta, \quad k \geq 2,$$

u kojemu leži točka minimuma x^* . Kao i ranije, definiramo dvije simetrične točke u okolini polovišta

$$\begin{aligned}\xi_{2k-1} &= \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}) - \frac{1}{2}\delta, \\ \xi_{2k} &= \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}) + \frac{1}{2}\delta,\end{aligned}$$

koeficijent smjera $\kappa = \frac{1}{\delta}(f(\xi_{2k}) - f(\xi_{2k-1}))$ i sljedeći podinterval

$$[a_k, b_k] := \begin{cases} [a_{k-1}, \xi_{2k}], & \kappa \geq 0 \\ [\xi_{2k-1}, b_{k-1}], & \kappa < 0 \end{cases}$$

širine

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2} \left(1 + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \delta.$$

Sljedeću aproksimaciju x_k definirat ćemo s

$$x_k := \frac{1}{2}(a_k + b_k).$$

Apsolutnu pogrešku možemo ocijeniti s

$$\begin{aligned} \Delta x_k := |x_k - x^*| &\leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2^2} \left(1 + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \delta \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \delta. \end{aligned}$$

Za $k \rightarrow +\infty$ ocjena apsolutne pogreške konvergira prema $\frac{\delta}{2}$. Dakle, nakon dovoljnog broja iteracija dobivena aproksimacija može odstupati od točke minimuma za najviše $\frac{\delta}{2}$.

Metodu nazivamo *Metoda polovljenja* jer u svakom koraku interval dijelimo gotovo na dvije polovine – čim je δ manji, time je dijeljenje intervala bliže raspolavljanju. Naravno, ova metoda može se primijeniti i na proizvoljnu strogo konveksnu funkciju (vidi Primjedbu ??, str.??).

Algorithm 2 (Metoda polovljenja za kvazikonveksnu funkciju)

Require: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;

Require: a, b ; $0 < \delta < (b - a)/2$; $\epsilon > \delta$; $k = 0$;

{Učitati funkciju f , početni interval $[a, b]$, točnost $\epsilon > 0$ i staviti $k = 0$;}

```

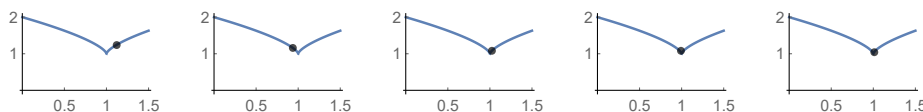
1:  $x_p = (a + b)/2$ ;
2: while  $b - a \geq \epsilon$ , do
3:    $k = k + 1$ ;
4:    $x_1 = x_p - \frac{\delta}{2}$ ;  $x_2 = x_p + \frac{\delta}{2}$ ;
5:   if  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , then
6:      $b = x_2$ ;
7:   else
8:      $a = x_1$ ;
9:   end if
10:   $x_p = (a + b)/2$ ;
11: end while

```

Ensure: x_p

Primjedba 2. Primijetite da se ova metoda može interpretirati kao metoda polovljenja gdje je derivacija zamijenjena s podijeljenom razlikom (vidi [9]).

Primjer 2. Metodu polovljenja ilustrirat ćemo na primjeru minimizacije funkcije $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. Na Slici 5 prikazano je nekoliko iteracija.



Slika 5: Ilustracije Metode polovljenja na funkciji iz Primjera 2

Zadatak 2. Je li $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - e^{-|x-1|}$ kvazikonveksna funkcija? Ako je, Metodom polovljenja odredite aproksimaciju njezine točke globalnog minimuma.

Zadatak 3. Lokalni minimumi funkcije iz Primjera ??, str.?? postižu se u točkama

$$\begin{aligned} x_1^* &\approx -3.217, & x_2^* &\approx 0.243, & x_3^* &\approx 3.617, \\ f(x_1^*) &\approx 6.251, & f(x_2^*) &\approx 3.289, & f(x_3^*) &\approx 0.618. \end{aligned}$$

Definirajte intervale u kojima ćete Metodom polovljenja odrediti pojedine točke lokalnih minimuma.

Zadatak 4. Metodom polovljenja odredite prve četiri aproksimacije minimuma funkcije $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + 2$ uz $\delta = 0.2$. Ocijenite pogrešku dobivene aproksimacije. Kolika je stvarna apsolutna pogreška?

Zadatak 5. Za dani $\epsilon > 0$ i parametar $\delta > 0$ odredite broj iteracija k koji je potreban da Metoda polovljenja daje točku globalnog minimuma x^* kvazikonveksne funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s točnošću $\frac{\delta}{2} + \epsilon$. Kako treba odabrati $\delta > 0$ i k da bismo postigli točnost na dvije decimale? U tom smislu analizirajte Primjer 2.

Zadatak 6. Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strogo kvazikonveksna funkcija. Definirajte modifikaciju Metode polovljenja za minimizaciju funkcije f u kojoj je vrijednost parametra δ moguće mijenjati u svakoj iteraciji $\delta = \delta_k$. Izvedite ocjenu apsolutne pogreške i dokažite konvergenciju metode uz dodatne pretpostavke na niz (δ_k) . Što možete reći o brzini konvergencije metode?

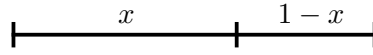
4 Metoda zlatnog reza

Kao što smo već primijetili, Metoda polovljenja za kvazikonveksnu derivabilnu funkciju ne može točno odrediti točku minimuma, već točnost aproksimacije opisati u veličini parametra $\delta > 0$. Zato ćemo točke x_{2k-1}, x_{2k} , pomoću kojih smo u svakom koraku određivali sekantu, pokušati definirati neovisno o ovakvom parametru δ . Takvu mogućnost pružanam Metoda zlatnog reza.

Neka je ℓ dužina duljine 1. Točka (odnosno realni broj) $.5 < x < 1$ dijeli dužinu ℓ u omjeru zlatnog reza ako se omjer duljine cijele dužine ℓ u odnosu na veći dio x odnosi kao omjer većeg dijela x u odnosu na manji dio $1 - x$, tj.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Pozitivno rješenje ove jednadžbe je $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, pri čemu broj $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.61812$ nazivamo omjer zlatnog reza.

Slika 6: Dijeljenje dužine ℓ u omjeru zlatnog reza

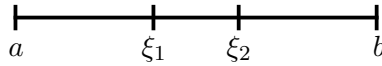
Zadatak 7. Pokažite da i broj $1 - x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$ također dijeli dužinu ℓ u omjeru zlatnog reza.

Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strogo kvazikonveksna funkcija. Niz aproksimacija točke globalnog minimuma $x^* \in [a, b]$ funkcije f definirat ćemo na sljedeći način. Formalno označimo $[a_0, b_0] := [a, b]$.

U cilju definiranja prve aproksimacije najprije definirajmo točke $\xi_1, \xi_2 \in [a_0, b_0]$, $\xi_1 < \xi_2$, na sljedeći način

$$\xi_1 = a_0 + (1 - x)(b_0 - a_0) = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0), \quad (2)$$

$$\xi_2 = a_0 + x(b_0 - a_0) = a_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0). \quad (3)$$

Slika 7: Izbor točaka ξ_1, ξ_2

Točka ξ_1 čini zlatni rez intervala $[a_0, b_0]$. Naime,

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - \xi_1} = \frac{b_0 - \xi_1}{\xi_1 - a_0}.$$

Slično se može pokazati da i točka ξ_2 čini zlatni rez intervala $[a_0, b_0]$ jer vrijedi

$$\frac{b_0 - a_0}{\xi_2 - a_0} = \frac{\xi_2 - a_0}{b_0 - \xi_2}.$$

Točke ξ_1 i ξ_2 poslužit će nam slično kao u t.3, str.5 za definiranje intervala $[a_1, b_1]$ i prve aproksimacije x_1 . Uz oznaku $\kappa := \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$ definiramo

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, \xi_2], & \kappa \geq 0, \\ [\xi_1, b_0], & \kappa < 0, \end{cases} \quad x_1 = \begin{cases} \xi_1, & \kappa \geq 0, \\ \xi_2, & \kappa < 0. \end{cases}$$

Širina intervala $[a_1, b_1]$ je

$$b_1 - a_1 = \begin{cases} \xi_2 - a_0 \stackrel{(3)}{=} \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0), \\ b_0 - \xi_1 \stackrel{(2)}{=} b_0 - a_0 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0) \end{cases},$$

a pogrešku prve aproksimacije procijenit ćemo slično kao u t.3 koristeći $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{1}{2}$:

$$\Delta x_1 := |x_1 - x^*| \leq \frac{1}{2}(b_1 - a_1) \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(b_1 - a_1) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2(b_0 - a_0).$$

Također primijetimo da je

$$\xi_2 - \xi_1 \stackrel{(3)-(2)}{=} (\sqrt{5} - 2)(b_0 - a_0).$$

Ponavljajući analogno kao u (3), (2), definiramo točke x_3, x_4 u intervalu $[a_1, b_1]$

$$\xi_3 = a_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1),$$

$$\xi_4 = a_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1).$$

Primjedba 3. Označimo li $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, možemo uočiti da ako je $f(\xi_1) \leq f(\xi_2)$, onda zbog $\phi^2 = 1 - \phi = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \xi_4 &= a_0 + \phi(\xi_2 - a_0) = a_0 + \phi(a_0 + \phi(b_0 - a_0) - a_0) \\ &= a_0 + \phi^2(b_0 - a_0) = \xi_2. \end{aligned}$$

S druge strane, ako je $f(\xi_1) > f(\xi_2)$, onda

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \xi_1 + (1 - \phi)(b_0 - \xi_1) \\ &= a_0 + (1 - \phi)(b_0 - a_0) + (1 - \phi)(b_0 - a_0 - (1 - \phi)(b_0 - a_0)) \\ &= a_0 + (1 - \phi^2)(b_0 - a_0) = \xi_1. \end{aligned}$$

Stoga, u svakoj je iteraciji potrebno izračunati samo jednu novu točku.

Pokažite da i točka ξ_3 i točka ξ_4 dijele segment $[a_1, b_1]$ u omjeru zlatnog reza.

Pomoću točaka ξ_3, ξ_4 koristeći oznaku $\kappa := \frac{f(\xi_4) - f(\xi_3)}{\xi_4 - \xi_3}$ definirat ćemo novi podinterval $[a_2, b_2]$ i drugu aproksimaciju x_2

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, \xi_4], & \kappa \geq 0, \\ [\xi_3, b_1], & \kappa < 0, \end{cases} \quad x_2 = \begin{cases} \xi_3, & \kappa \geq 0, \\ \xi_4, & \kappa < 0. \end{cases}$$

Širina intervala $[a_2, b_2]$ je

$$b_2 - a_2 (= \xi_4 - a_1 = b_1 - \xi_3) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (b_0 - a_0),$$

a pogreška druge aproksimacije x_2 procijenjena je s

$$\Delta x_2 := |x_2 - x^*| \leq \frac{1}{2}(b_2 - a_2) \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(b_2 - a_2) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 (b_0 - a_0).$$

Također,

$$\xi_4 - \xi_3 = (\sqrt{5} - 2)(b_1 - a_1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\sqrt{5} - 2)(b_0 - a_0).$$

Općenito, pretpostavimo da je poznat interval $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ u kojemu leži točka minimuma x . Kao i ranije, definiramo dvije točke koje dijele interval $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ u omjeru zlatnog reza

$$\xi_{2k-1} = a_{k-1} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}),$$

$$\xi_{2k} = a_{k-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

Pomoću točaka ξ_{2k-1}, ξ_{2k} koristeći oznaku $\kappa := \frac{f(\xi_{2k}) - f(\xi_{2k-1})}{\xi_{2k} - \xi_{2k-1}}$ definirat ćemo novi podinterval $[a_k, b_k]$ i novu aproksimaciju x_k

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, \xi_{2k}], & \kappa \geq 0, \\ [\xi_{2k}, b_k], & \kappa < 0, \end{cases} \quad x_k = \begin{cases} \xi_{2k-1}, & \kappa \geq 0, \\ \xi_{2k}, & \kappa < 0. \end{cases}$$

Širina podintervala $[a_k, b_k]$ je

$$b_k - a_k (= \xi_{2k} - a_k = b_k - \xi_{2k-1}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b_0 - a_0),$$

a apsolutna pogreška k -te aproksimacije zadana je s

$$\Delta x_k := |x_k - x^*| \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(b_k - a_k) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{k+1} (b_0 - a_0),$$

te je

$$\xi_{2k} - \xi_{2k-1} = (\sqrt{5} - 2)(b_{k-1} - a_{k-1}) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{k-1} (\sqrt{5} - 2)(b_0 - a_0).$$

Primijetite da za $k \rightarrow +\infty$ niz apsolutnih pogrešaka (Δx_k) konvergira prema nuli te da isto tako niz $(\xi_{2k} - \xi_{2k-1})$ konvergira prema nuli. To znači da primjenom *Metode zlatnog reza* za traženje globalnog minimizatora strogo kvazikonveksne funkcije f (za razliku od *Metode polovljenja*) možemo postići proizvoljnu točnost aproksimacije. Može se također pokazati¹ da je pri tome izbor točaka $\{\xi_{2k-1}, \xi_{2k}\}$ gotovo optimalan.

Više o metodi vidi u [3, 6, 11].

Algorithm 3 (Metoda zlatnog reza)

Require: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;

Require: $a, b; \epsilon > 0; \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; k = 0$;

{Učitati funkciju f , početni interval $[a, b]$, točnost $\epsilon > 0$ i staviti $k = 0$;}

```

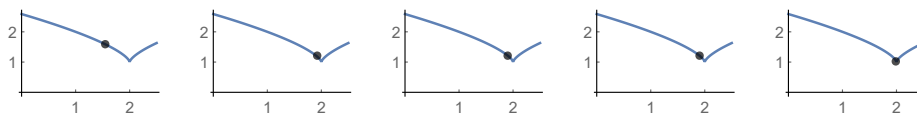
1: while  $b - a \geq \epsilon$ , do
2:    $k = k + 1$ ;
3:    $x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a); \quad x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$ ;
4:   if  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , then
5:      $b = x_2; x^* = x_1$ 
6:   else
7:      $a = x_1; x^* = x_2$ 
8:   end if
9: end while
```

Ensure: x^*

Primjer 3. *Metodu zlatnog reza ilustrirat ćemo na primjeru minimizacije funkcije $f: [0, 2.5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$. Na Slici 8 prikazano je nekoliko iteracija.*

¹Iz povijesnih razloga navodimo originalnu referencu:

[Ф. П. Василев, Лекции по методам решения экстремальных задач, Издательство Московского университета, Москва, 1974.](#)



Slika 8: Traženje globalnog minimuma funkcije iz Primjera 3 Metodom zlatnog reza

Zadatak 8. Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strogo kvazikonveksna funkcija. Odredite broj iteracija k koji je potreban da bi se Metodom zlatnog reza odredila aproksimacija točke globalnog minimuma s točnošću $\epsilon > 0$. Koliko treba iteracija da bi se Metodom zlatnog reza pronašla točka globalnog minimuma funkcije iz Primjera 3 s točnošću na dvije decimale?

Zadatak 9. Metodom zlatnog reza odredite prve četiri aproksimacije minimuma funkcije $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + 2$. Ocijenite pogrešku dobivene aproksimacije. Kolika je stvarna apsolutna pogreška? Koliko je iteracija potrebno za točnost $\epsilon = 0.0005$?

Zadatak 10. Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna derivabilna funkcija. Usporedite broj iteracija k koji je potreban za određivanje točke globalnog minimuma funkcije f s točnošću $\epsilon > 0$ pomoću Metode polovljenja i pomoću Metode zlatnog reza. Usporedbu provedite općenito i također na primjeru funkcije iz Primjera 3.

Zadatak 11. Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strogo kvazikonveksna funkcija. Izbor intervala koji sadrži točku minimuma funkcije f u Metodi zlatnog reza temelji se na izboru točaka

$$\begin{aligned}\xi_{2k-1} &= a_{k-1} + (1 - \tau)(b_{k-1} - a_{k-1}), \\ \xi_{2k} &= a_{k-1} + \tau(b_{k-1} - a_{k-1}),\end{aligned}$$

gdje je $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Za proizvoljni $\tau \in (1/2, 1)$, koliko iznosi stopa smanjenja duljine intervala

$$\frac{b_k - a_k}{b_{k-1} - a_{k-1}}?$$

Izradite Mathematica-modul za Metodu zlatnog reza s proizvoljnim parametrom $\tau \in (\frac{1}{2}, 1)$. Na primjeru funkcije $f: [0, 2.5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$ testirajte brzinu konvergencije metode za različite izbore parametra τ .

5 Jednodimenzionalna globalna optimizacija

5.1 Lipschitz-neprekidne funkcije

U ovom odjeljku razmatrat ćemo jednu metodu traženja globalnog minimuma realne neprekidne funkcije jedne varijable definirane na nekom intervalu $[a, b]$. Od funkcije se neće zahtijevati derivabilnost, već samo ograničeni rast na tom intervalu. Metodu su

gotovo istovremeno, ali nezavisno, razradili S. A. Pijavskij² i B. O. Shubert³.

Definicija 1. Kažemo da je funkcija $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna (zadovoljava Lipschitzov uvjet) s konstantom $L > 0$ na \mathcal{D} i pišemo $f \in Lip_L \mathcal{D}$ ako za sve $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|. \quad (4)$$

Konstantu $L > 0$ nazivamo Lipschitzova konstanta.

Primjer 4. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ je Lipschitz-neprekidna s konstantom $L = 1$ na \mathbb{R} jer je $||x| - |y|| \leq 1 \cdot |x - y|$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 12. Pokažite da je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3|x - 1|$ Lipschitz-neprekidna s konstantom $L = 3$.

Primjer 5. Odredimo Lipschitzovu konstantu funkcije $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x + 2$.

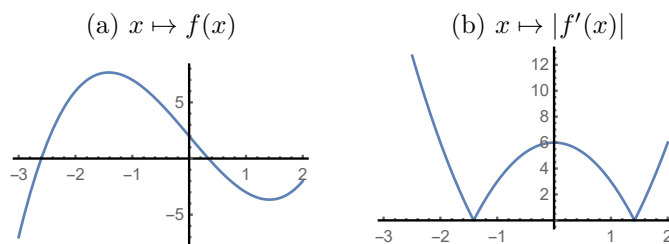
Primijetite da je ova funkcija derivabilna u svakoj točki segmenta $[-3, 2]$ i da za nju vrijedi Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti, tj. za proizvoljni $x, y \in [-3, 2]$, $x < y$, postoji $c \in (x, y)$ takav da je

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Zbog neprekidnosti funkcije f' na segmentu $[-3, 2]$ sukladno Weierstrasseovom teoremu (vidi [13]) postoji $L = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ iz čega slijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [-3, 2].$$

U ovom slučaju iz Slike 9 vidi se da je najmanja moguća vrijednost za Lipschitzovu konstantu $L = f'(-3) = 21$, iako i svaki drugi broj veći od 21 zadovoljava (4).



Slika 9: $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x + 2$ je Lipschitz-neprekidna funkcija

²Iz povijesnih razloga navodimo originalne reference:

С. А. Пиявский, Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **12**(1972), 888-896. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=6654&option_lang=eng

Vidi također:

Ф. П. Василев, Лекции по методам решения экстремальных задач, Издательство Московского университета, Москва, 1974.

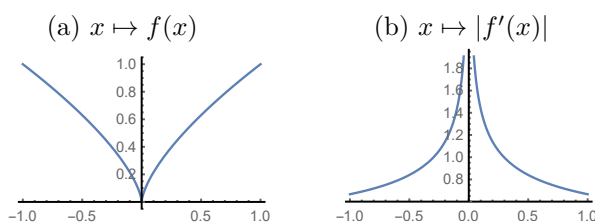
³Bruno O. Shubert, A sequential method seeking the global maximum of a function, SIAM Journal on Numerical Analysis, **9**(1972), 379-388

U nastavku pretpostavljamo da je područje definicije promatrane funkcije f interval realnih brojeva $[a, b]$. Za $x \neq y$ Lipschitzov uvjet (4) možemo zapisati u obliku

$$-L \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq L \quad \forall x, y \in [a, b],$$

odakle se vidi da je relativna promjena (kvocijent diferencija) funkcije f ograničena između $-L$ i L . Ako x fiksiramo, a y pustimo prema x , onda možemo zaključiti da ako postoji derivacija funkcije f , ona je ograničena između $-L$ i L .

Primjer 6. Promatrajmo funkciju $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Kao što se može vidjeti na Slici 10, derivacija (brzina pada) ove funkcije u okolini 0 raste u beskonačnost. Zato ne postoji $L > 0$ takav da vrijedi (4), pa ova funkcija nije Lipschitz-neprekidna na $[-1, 1]$.

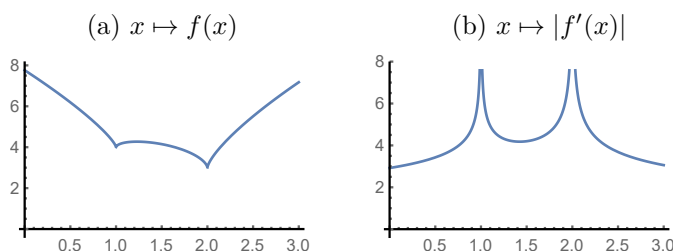


Slika 10: $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ nije Lipschitz-neprekidna funkcija

Primjer 7. Odredimo Lipschitzovu konstantu funkcije $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$ (vidi Sliku 11). Njena derivacija

$$f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x-1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

nije definirana u točkama iz $\{1, 2\}$, a Lipschitzova konstanta $L > 0$ ne postoji.

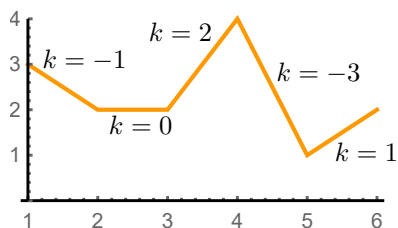


Slika 11: Funkcija $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$ nije Lipschitz-neprekidna funkcija na $[0, 3]$

Primjer 8. Odredimo Lipschitzovu konstantu funkcije $f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$,

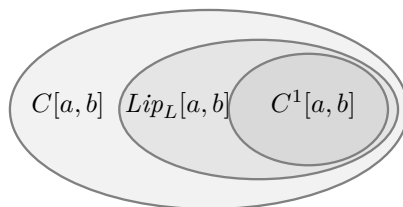
$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 3, \\ 2x - 4, & 3 \leq x \leq 4, \\ -3x + 16, & 4 \leq x \leq 5, \\ x - 4, & 5 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

čiji je graf prikazan na Slici 12. Očigledno je $L = 3$.



Slika 12: Lipschitz-neprekidna funkcija s konstantom $L = 3$

Iako je određivanje Lipschitzove konstante općenito vrlo složen problem (vidi primjere [14?]), u slučaju da promatrana funkcija f ima konačnu derivaciju u svakoj točki intervala $[a, b]$, problem se može riješiti relativno jednostavno (kao u Primjerima 4, 5 ili 8).



Slika 13: Skup neprekidnih, Lipschitz-neprekidnih i neprekidno derivabilnih funkcija na $[a, b]$

Primjedba 4. Svaka Lipschitz-neprekidna funkcija neprekidna je funkcija, ali neprekidna funkcija ne mora biti Lipschitz-neprekidna (vidi Primjere 6 i Primjere 7). Nadalje, ako je $f \in C^1[a, b]$, onda je $f \in Lip_L[a, b]$ (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti), ali obrat ne vrijedi (vidi Primjer 4 i Primjer 8). Dakle, mogli bismo reći da je Lipschitz-neprekidna funkcija neprekidna funkcija, a ako ima derivaciju, ona mora biti ograničena.

Ako je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, koja ima po dijelovima neprekidnu ograničenu derivaciju, onda Lipschitzovu konstantu $L > 0$ možemo odrediti primjenom Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti (vidi Primjer 8). Preciznije, neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna po dijelovima glatka funkcija, u smislu da je f derivabilna, osim eventualno u konačno mnogo točaka $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, te da je f' neprekidna na intervalima

(x_j, x_{j+1}) , $j = 1, \dots, n - 1$. Ako je $|f'(x)| \leq L$ za sve $x \in [a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, tada je $f \in Lip_L[a, b]$.

Primjedba 5. Definicija Lipschitz-neprekidne funkcije lako se može proširiti na funkciju više varijabli $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Takva je funkcija *Lipschitz-neprekidna* (zadovoljava *Lipschitzov uvjet*) ako postoji konstanta $L > 0$ tako da za sve $x, y \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ neka norma. Uočite da je definicija neovisna o izboru norme $\|\cdot\|$ s obzirom na to da su sve norme na \mathbb{R}^n ekvivalentne.

Zadatak 13. *Provjerite jesu li sljedeće funkcije Lipschitz-neprekidne te ako jesu, odredite Lipschitzovu konstantu.*

(a) $f_1: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x$,

(b) $f_2: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = \begin{cases} 5 - x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 4 - \frac{1}{2}(x - 5)^2, & 3 < x \leq 7, \\ \frac{1}{2}(x - 9)^2, & 7 < x \leq 9, \end{cases}$$

(c) $f_3: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$.

Zadatak 14. *Neka je $f_1 \in Lip_{L_1}[a, b]$ i $f_2 \in Lip_{L_2}[a, b]$. Pokažite da su tada i sljedeće funkcije Lipschitz-neprekidne i odredite Lipschitzovu konstantu:*

(a) $f_1 + f_2$,

(b) cf_1 , $c \in \mathbb{R}$,

(c) $c_1f_1 + c_2f_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

(d) $f_1 \cdot f_2$,

(e) $f_1 \circ f_2$, pod pretpostavkom da je dobro definirana.

Zadatak 15. *Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima Lipschitz-neprekidna funkcija u smislu da postoje $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ takvi da je f Lipschitz-neprekidna na intervalima $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 0, \dots, n - 1$. Pokažite da je tada f Lipschitz-neprekidna te odredite Lipschitzovu konstantu.*

Zadatak 16. *Dokažite da konveksna funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava Lipschitzov uvjet na svakom segmentu $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Korištenjem funkcije $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$, pokažite da u općem slučaju nije dobro birati $\alpha = a$, $\beta = b$.*

Uputa. Korištenjem nejednakosti (??) i (??) pokažite da je

$$f'(\alpha+) \leq \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq f'(\beta-), \quad \forall u, v \in [\alpha, \beta].$$

Zadatak 17. *Neka je f_λ , $\lambda \in \Lambda$ proizvoljna familija funkcija iz $Lip_L[a, b]$. Provjerite jesu li tada i funkcije $\inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ i $\sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ Lipschitz-neprekidne na $[a, b]$ te odredite Lipschitzove konstante.*

Zadatak 18. *Provjerite je li funkcija $f : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ Lipschitz-neprekidna te ako jest, odredite Lipschitzovu konstantu.*

Zadatak 19. *Neka je $\mathcal{D} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ i $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Dokažite:*

- a) *f je Lipschitz-neprekidna ako i samo ako postoji konstanta $L > 0$ takva da je f Lipschitz-neprekidna s konstantom L u svakoj varijabli. Preciznije, za svaki $i = 1, \dots, n$ i za proizvoljne $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ funkcija*

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

je Lipschitz-neprekidna na $[a_i, b_i]$ s konstantom L .

- b) *Ako su sve parcijalne derivacije funkcije f definirane i ograničene na \mathcal{D} , tada je f Lipschitz-neprekidna.*

6 Pijavskijeva metoda slomljenih pravaca

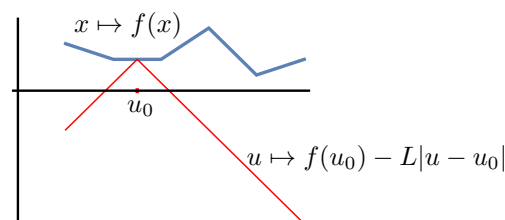
Pretpostavimo da je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna funkcija. Tada prema (4) za sve $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$-L|x - y| \leq f(x) - f(y) \leq L|x - y|,$$

iz čega slijedi

$$f(x) \geq f(y) - L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad (5)$$

(vidi Sliku 14). Iz toga zaključujemo da funkciju f u bilo kojoj točki $y \in [a, b]$ možemo odozdo ograničiti funkcijom $x \mapsto f(y) - L|x - y|$.



Slika 14: Lipschitz-donja ograda funkcije

Izaberimo proizvoljni $u_0 \in [a, b]$ i definirajmo donju ogradu funkcije f kao Lipschitz-neprekidnu po dijelovima linearnu funkciju $K : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (vidi Sliku 14):

$$K(u; u_0) = f(u_0) - L|u - u_0|, \quad u \in [a, b]. \quad (6)$$

Za slomljeni pravac K lako se vidi da vrijedi:

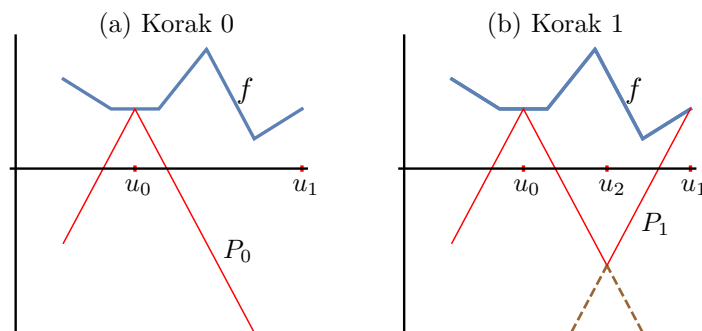
$$K(u_0; u_0) = f(u_0), \quad (7)$$

$$K(u; u_0) \leq f(u), \quad \forall u \in [a, b]. \quad (8)$$

Svojstvo (8) direktno slijedi iz (5).

Uz pretpostavku da postoji $u^* \in [a, b]$ na kojemu se postiže globalni minimum Lipschitz-neprekidne funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s konstantom $L > 0$, tj. postoji $u^* \in \underset{u \in [a, b]}{\operatorname{argmin}} f(u)$,

Pijavskij je konstruirao sljedeći Algoritam slomljenih pravaca.



Slika 15: Algoritam Pijavskog

Najprije, uz poznavanje u_0 i $K(u; u_0)$ odredimo $u_1 \in \underset{u \in [a, b]}{\operatorname{argmin}} K(u; u_0)$ i stavimo $P_0(u) := K(u; u_0)$ (vidi Sliku 15a). Očigledno će biti $u_1 = a$ ili $u_1 = b$.

U prvom koraku definiramo

$$K(u; u_1) := f(u_1) - L|u - u_1|,$$

$$P_1(u) := \max_{i=0,1} K(u; u_i) = \max\{K(u; u_1), P_0(u)\},$$

i odredimo $u_2 \in \underset{u \in [a, b]}{\operatorname{argmin}} P_1(u)$ (vidi Sliku 15b).

U sljedećem (drugom) koraku definiramo

$$K(u; u_2) := f(u_2) - L|u - u_2|,$$

$$P_2(u) := \max_{i=0,1,2} K(u; u_i) = \max\{K(u; u_2), P_1(u)\},$$

i odredimo $u_3 \in \underset{u \in [a, b]}{\operatorname{argmin}} P_2(u)$;

Općenito, u k -tom koraku, poznavanjem čvorova u_0, u_1, \dots, u_k i funkcija $K(u; u_0), K(u; u_1), \dots, K(u; u_{k-1})$ definiramo

$$K(u; u_k) := f(u_k) - L|u - u_k|, \quad (9)$$

$$P_k(u) = \max_{i=0, \dots, k} K(u; u_i) = \max\{K(u; u_k), P_{k-1}(u)\} \quad (10)$$

i odredimo $u_{k+1} \in \underset{u \in [a, b]}{\operatorname{argmin}} P_n(k)$. Ako se $\min_{u \in [a, b]} P_n(k)$ postiže u više točaka, onda za u_{k+1} biramo bilo koju od njih. Pseudokod Algoritma 4 naveden je niže, a animaciju algoritma i odgovarajući modul možemo vidjeti u t.??, str.??).

Algorithm 4 (Algoritam slomljenih pravaca)**Require:** $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $L > 0$ **Require:** $u_0 \in [a, b]$; $n \geq 1$; $k = 0$;

{Učitati funkciju i dozvoljeni broj iteracija;}

1: Definirati $K(u; u_0) := f(u_0) - L|u - u_0|$ i $P_0(u) := K(u; u_0)$;2: Odrediti $u_1 \in \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} P_0(u) \subseteq \{a, b\}$;3: **while** $k = k + 1$; $k < n$, **do**4: Definirati $K(u; u_k) := f(u_k) - L|u - u_k|$;5: $P_k(u) := \max_{i=0,1,\dots,k} K(u; u_i) = \max\{K(u; u_k), P_{k-1}(u)\}$;6: Odrediti $u_{k+1} \in \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} P_k(u)$;7: **end while****Ensure:** $\{u_{k+1}, f(u_{k+1})\}$

Sljedeća lema pokazuje da Algoritam 4 za funkciju $f \in Lip_L[a, b]$ daje rastući niz donjih ograda (P_k) , $P_k \in Lip_L[a, b]$, (po dijelovima linearne funkcije čiji dijelovi leže na pravcima s koeficijentima smjera L ili $(-L)$), koje se s funkcijom f podudaraju u točkama u_k .

Lema 1. *Neka je $f \in Lip_L[a, b]$, (u_n) niz čvorova i (P_n) niz funkcija definiranih kao u Algoritmu 4. Tada vrijedi:*

- (i) P_n je Lipschitz-neprekidna po dijelovima linearne funkcija, čiji dijelovi leže na pravcima s koeficijentima smjera L ili $(-L)$, tj. $P_n \in Lip_L[a, b]$,
- (ii) $P_n(u) \leq P_{n+1}(u)$, $\forall u \in [a, b]$ i $\forall n = 0, 1, \dots$ (*monotoni rast*),
- (iii) $P_n(u) \leq f(u)$, $\forall u \in [a, b]$ i $\forall n = 0, 1, \dots$ (*ograničenost odozgo*),
- (iv) $P_n(u_i) = f(u_i)$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$ (*podudaranje u čvorovima*).

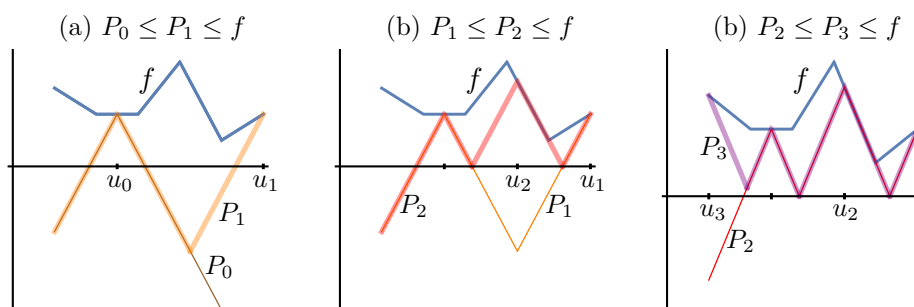
Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) su očigledne (vidi Sliku 16).

Tvrdnja (iii) dokazuje se induktivno. Najprije primijetimo da prema (8) vrijedi

$$P_0(u) = K(u; u_0) \leq f(u),$$

i pretpostavimo da je

$$P_{n-1}(u) \leq f(u).$$

Slika 16: Monotonost i ograničenost niza funkcija (P_n)

Kako je sukladno (8), $K(u; u_n) \leq f(u)$, vrijedi

$$P_n(u) = \max\{K(u; u_n), P_{n-1}(u)\} \leq \max\{f(u), f(u)\} = f(u),$$

tvrdnja (iii) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

U svrhu dokaza tvrdnje (iv) primijetimo najprije da vrijedi

$$f(u_i) = K(u_i; u_i), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (11)$$

Nadalje, na osnovi (10) vrijedi $[P_n(u) := \max_{i=0,1,\dots,n} K(u; u_i) \geq K(u; u_i)]$

$$K(u_i; u_i) \leq P_n(u_i), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

iz čega zaključujemo

$$f(u_i) = K(u_i; u_i) \leq P_n(u_i), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Zato korištenjem (iii) dobivamo

$$f(u_i) \leq P_n(u_i) \stackrel{(iii)}{\leq} f(u_i),$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja (iv). □

Sljedeći teorem pokazuje da Algoritam 4 pronalazi sve točke globalnog minimuma funkcije $f \in Lip_L[a, b]$.

Teorem 2. *Pretpostavimo:*

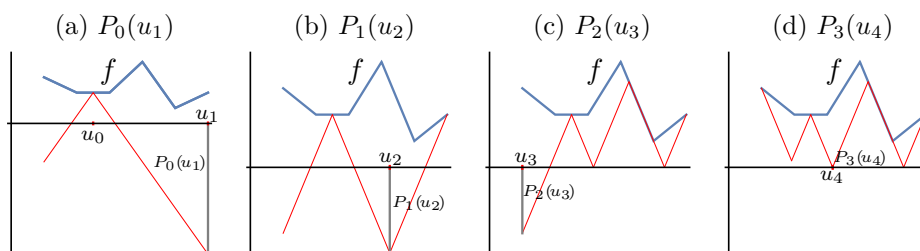
(a) $f \in Lip_L[a, b]$;

(b) Postoji $u^* \in \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} f(u)$;

(c) Niz realnih brojeva (u_n) i niz funkcija (P_n) definiran je kao u Algoritmu 4.

Tada vrijedi:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_{n+1}) = \min_{u \in [a,b]} f(u) = f(u^*) =: f^*$;
- (ii) Ako je \hat{u} proizvoljno gomilište niza (u_n) , onda je $\hat{u} \in \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} f(u)$;
- (iii) Ako je $u^* = \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} f(u)$ (jednočlan), onda cijeli niz (u_n) konvergira prema u^* .

Slika 17: Monotonost i ograničenost niza $(P_n(u_{n+1}))$

Dokaz. Dokažimo najprije da je niz $(P_n(u_{n+1}))$ konvergentan. On je monotono rastući jer je (vidi Sliku 17)

$$\begin{aligned}
 P_{n-1}(u_n) &= \min_{u \in [a,b]} P_{n-1}(u) && \text{[po definiciji]} \\
 &\leq P_{n-1}(u_{n+1}) && \text{[po definiciji minimuma funkcije na segmentu]} \\
 &\leq P_n(u_{n+1}). && \text{[prema Lemi 1 (ii)]}
 \end{aligned}$$

Niz $(P_n(u_{n+1}))$ ograničen je odozgo jer vrijedi (vidi Sliku 17)

$$\begin{aligned}
 P_n(u_{n+1}) &= \min_{u \in [a,b]} P_n(u) && \text{[po definiciji]} \\
 &\leq \min_{u \in [a,b]} f(u) && \text{[prema Lemi 1 (iii)]} \\
 &= f(u^*) = f^*. && \text{[prema pretpostavci (b)]}
 \end{aligned}$$

Dakle, niz $(P_n(u_{n+1}))$ je konvergentan i postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_{n+1}) =: P^*$, a prema prethodnoj nejednakosti slijedi

$$P^* \leq f^*. \quad (12)$$

Pokažimo da je $P^* = f^*$. U tu svrhu najprije pokažimo da vrijedi nejednakost

$$0 \leq f(u_i) - P_n(u_{n+1}) \leq L|u_i - u_{n+1}|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ i } \forall i = 0, \dots, n. \quad (13)$$

Naime, kako je $P_n(u_{n+1}) = \min_{u \in [a,b]} P_n(u) \leq P_n(u_i)$, za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljni $(0 \leq i \leq n)$ vrijedi

$$P_n(u_{n+1}) \leq P_n(u_i) = f(u_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad \text{[Lema 1(iv)]},$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(u_i) - P_n(u_{n+1}) \\ &= P_n(u_i) - P_n(u_{n+1}) && \text{[prema Lemi 1 (iv)]} \\ &\leq L|u_i - u_{n+1}| && \text{[prema Lemi 1 (i)]} \end{aligned}$$

Kako je niz $(u_n) \subset [a, b]$ ograničen, postoji barem jedno gomilište \hat{u} i podniz (u_{n_k}) koji konvergira prema tom gomilištu.

Primijetite da zbog $n_{k-1} < n_k$ vrijedi $n_{k-1} \leq n_k - 1$. Zato iz nejednakosti (13) za $n := n_k - 1$ i $i := n_{k-1}$ dobivamo

$$0 \leq f(u_{n_{k-1}}) - P_{n_{k-1}}(u_{n_k}) \leq L|u_{n_{k-1}} - u_{n_k}|,$$

odakle zbog neprekidnosti funkcije f i konvergentnosti nizova $(P_{n_{k-1}}(u_{n_k}))$ i (u_{n_k}) za $k \rightarrow \infty$ dobivamo

$$0 \leq f(\hat{u}) - P^* \leq 0 \implies f(\hat{u}) = P^*.$$

Kako je $f^* \leq f(\hat{u})$, iz prethodne jednakosti i nejednakosti (12) dobivamo

$$f^* \leq f(\hat{u}) = P^* \leq f^*,$$

tj. $P^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_{n+1}) = f^* = f(\hat{u})$. Time su tvrdnje (i) i (ii) dokazane.

Tvrdnja (iii) slijedi iz prve dvije. □

Primjedba 6. U svakom koraku *Metode slomljenih pravaca* treba riješiti minimizacijski problem za po dijelovima linearnu funkciju P_n (korak 6. u Algoritmu 4). To je moguće vrlo efikasno napraviti pretraživanjem vrhova funkcije P_n . U tu svrhu Algoritam 4 treba implementirati tako da u svakoj iteraciji ažurira listu koordinata vrhova

$$V_n = \{(v_1, z_1), \dots, (v_m, z_m)\},$$

koji predstavljaju lokalne minimume funkcije P_n . Primjerice, za točku $u_0 \in (a, b)$ u početnoj iteraciji skup V_0 sastoji se od dva vrha: $(a, K(a; u_0))$ i $(b, K(b; u_0))$, gdje je $K(u; u_0)$ slomljeni pravac definiran u (6). Listu V_n treba organizirati tako da vrijedi $z_1 \geq \dots \geq z_m$, iz čega slijedi da je točka globalnog minimuma u_n funkcije P_n jednostavno v_m .

U sljedećoj iteraciji promatramo funkciju $P_{n+1}(u) = \max\{K(u; u_n), P_n(u)\}$ koja se od P_n razlikuje u dva nova vrha, osim u slučaju kada je $u_n = a$ ili $u_n = b$. Lista vrhova ažurira se tako da se iz nje izbaci posljednji vrh $(v_m, z_m) = (u_n, P_n(u_n))$ i dodaju dva nova vrha. Označimo nove vrhove kao lijevi (v_l, z_l) i desni (v_r, z_r) tako da je $v_l < u_n < v_r$. Uočimo da je točka (v_l, z_l) sjecište funkcije $K(u; u_n)$ sa susjednim lijevim slomljenim pravcem $K(u; u_l)$ koji je određen nekim čvorom koji ćemo označiti s u_l . Sada ćemo pokazati da je (v_l, z_l) moguće izračunati bez poznavanja vrijednosti u_l .

S obzirom da je u_l lijevo od u_n , točka (v_l, z_l) mora biti sjecište pravaca $u \mapsto f(u_n) + L(u - u_n)$ i $u \mapsto f(u_l) - L(u - u_l)$. Lako je izračunati da je tada

$$\begin{aligned} v_l &= \frac{1}{2}(u_l + u_n) + \frac{1}{2L}(f(u_l) - f(u_n)), \\ z_l &= K(v_l; u_n) = \frac{1}{2}(f(u_l) + f(u_n)) - \frac{L}{2}(u_n - u_l). \end{aligned} \quad (14)$$

Uočimo nadalje da za posljednji vrh u listi vrhova V_n vrijedi $(v_m, z_m) = (u_n, P_n(u_n)) = (u_n, K(u_n; u_l))$. Stoga (14) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} v_l &= u_n + \frac{1}{2L}(f(u_l) - L(u_n - u_l) - f(u_n)) \\ &= u_n + \frac{1}{2L}(K(u_n; u_l) - f(u_n)) \\ &= v_m + \frac{1}{2L}(z_m - f(v_m)), \\ z_l &= \frac{1}{2}(f(u_l) - L(u_n - u_l) + f(u_n)) \\ &= \frac{1}{2}(K(u_n; u_l) + f(u_n)) \\ &= \frac{1}{2}(z_m + f(v_m)). \end{aligned}$$

Analogno se može pokazati da se desni vrh (v_r, z_r) može izračunati kao

$$\begin{aligned} v_r &= v_m - \frac{1}{2L}(z_m - f(v_m)), \\ z_r &= \frac{1}{2}(z_m + f(v_m)). \end{aligned}$$

Dakle, u svakoj iteraciji treba ažurirati listu vrhova izbacivanjem posljednjeg vrha (v_m, z_m) i dodavanjem dva nova vrha čije se koordinate jednostavno izračunavaju iz v_m, z_m i $f(v_m)$. Nakon toga dobivenu listu treba sortirati po drugoj komponenti što daje listu V_{n+1} na kojoj se cijeli postupak ponavlja u sljedećoj iteraciji. Ukoliko je u nekoj iteraciji $v_m = a$, tada se dodaje samo desni vrh (v_r, z_r) , a ako je $v_m = b$, onda se dodaje samo (v_l, z_l) .

Ovakva implementacija Algoritma 4 napravljena je u modulu `Pijavskij` (vidi t.??, str.??).

Primjedba 7. Najpoznatije varijante *Metode slomljenih pravaca* su: *Algoritam Pijavskog*, *Shubertov algoritam* i *Algoritam DIRECT* (t.8, str.28). *Algoritam DIRECT* može se generalizirati za funkcije više varijabli [1, 2, 4], dok za *Algoritam Pijavskog* i *Shubertov algoritam* to nije moguće. *Metoda slomljenih pravaca* ima niz prednosti:

1. Minimizirajuća funkcija može imati više točaka globalnog minimuma, a *Metoda slomljenih pravaca* sve će ih detektirati. Primjerice, funkcija $x \rightarrow |\sin 30x|$ na intervalu $[0, 1]$ postiže globalni minimum u 10 točaka.

2. Minimizirajuća funkcija ne mora biti derivabilna u svim točkama intervala $[a, b]$, već samo ispunjavati Lipschitzov uvjet (4).
3. Za proizvoljni $u_0 \in [a, b]$ metoda konvergira prema globalnom minimumu, a za njenu implementaciju potrebno je „samo” poznavanje Lipschitzove konstante L .
4. U svakom koraku metode treba riješiti minimizacijski problem za po dijelovima linearnu funkciju P_n , što se svodi na ispitivanje njenih poznatih vrhova. Pri tome se P_n od P_{n-1} može razlikovati u najviše dva nova vrha (vidi Primjedbu 6, str.22).
5. Može se pokazati da je *Metoda slomljenih pravaca* bliska optimalnoj strategiji traženja globalnog minimuma Lipschitz-neprekidne funkcije.
6. Metoda se može poopćiti za slučaj funkcija koje imaju konačno mnogo prekida prve vrste i koje su definirane na nepovezanom području [12].

Nedostaci *Metode slomljenih pravaca* su:

1. Određivanje Lipschitzove konstante L može biti složeno i numerički zahtjevno (vidi [14?]).
2. Općenito, metoda brzo dolazi do točke globalnog minimuma, ali nakon toga često se dešava da sporo popravljiva točnost (vidi primjerice [7]). Razlozi za to su sljedeći.
 - Velike vrijednosti Lipschitzove konstante $L > 0$. U graničnom slučaju kada $L \rightarrow \infty$, algoritam degenerira u izračunavanje vrijednosti funkcije na diskretnom skupu.
 - Svojstva algoritma da pronalazi sve točke globalnog minimuma, što može značajno opteretiti računski postupak.
3. Određivanje kriterija zaustavljanja nije jasno definirano u literaturi. Mogućnosti su sljedeće:
 - Unaprijed odrediti maksimalni broj iteracija;
 - Postupak završiti u k -tom koraku ako je $|u_{k+1} - u_k| < \epsilon$, gdje je $\epsilon > 0$ unaprijed zadan;
 - Postupak završiti u k -tom koraku ako je $|f(u_{k+1}) - f(u_k)| < \epsilon$, gdje je $\epsilon > 0$ unaprijed zadan.

Primjedba 8. Metodu možemo modificirati tako da na početku izaberemo $n + 1$ ekvidistantnih čvorova $a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b$ u kojima definiramo:

$$K(u; u_i) := f(u_i) - L|u - u_i|, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

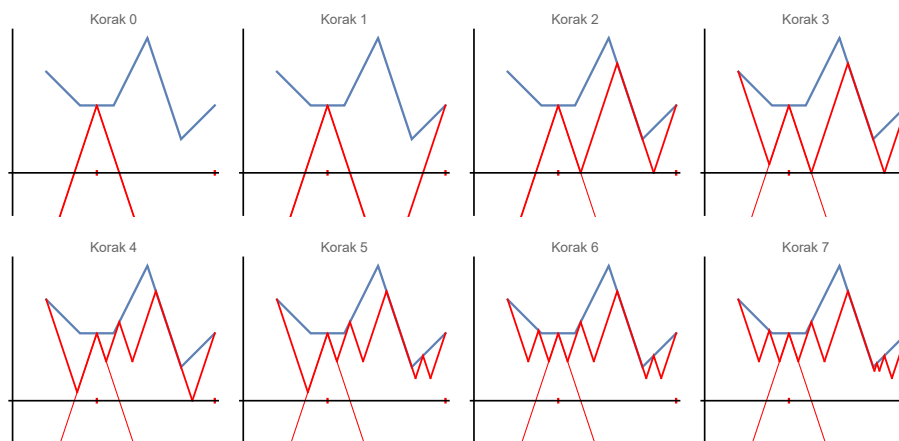
$$P_n(u) := \max_{i=0,1,\dots,n} K(u; u_i)$$

$$u_{n+1} = \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} P_n(u)$$

[pretraživanje $n + 1$ čvorova]

Dalje postupak može teći kao u Algoritmu 4.

Primjer 9. Metodu slomljenih pravaca ilustrirat ćemo na traženju globalnog minimuma funkcije iz Primjera 8, str.15.



Slika 18: Metoda slomljenih pravaca

Iterativni proces može se pratiti u niže navedenoj tablici i na Slici 18 (pogledati također t.??, str.??). Može se vidjeti da je nakon 12 iteracija udaljenost susjednih čvorova, kao i apsolutna razlika funkcijskih vrijednosti pala na .05.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_k	2.5	6	4.25	1	3.17	5.33	1.92	5.11	5.56	5.037	5.19	5.01	5.06
$ u_{k+1} - u_k $	-	3.5	1.75	3.25	2.17	2.17	3.42	3.19	0.44	0.52	0.15	0.17	0.05
$f(u_k)$	2	2	3.25	3	2.33	1.33	2.08	1.11	1.56	1.04	1.19	1.01	1.06
$ f(u_{k+1}) - f(u_k) $	-	0	1.25	0.25	0.67	1.	0.75	0.97	0.44	0.52	0.15	0.17	0.05

Zadatak 20. Za funkciju $f: [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 4 - \frac{1}{2}(x - 5)^2, & 3 < x \leq 7, \\ \frac{1}{2}(x - 9)^2, & 7 < x \leq 9, \end{cases}$$

Metodom slomljenih pravaca odredite u_3 uz početnu točku $u_0 = 4$.

Zadatak 21. Za $u_0 = -6$ Metodom slomljenih pravaca odredite prve tri aproksimacije točke globalnog minimuma funkcije $f: [-6, 12] \rightarrow \mathbb{R}$ zadane s

$$f(x) = \min \{|x - 1| + 1, |x - 8| + 2\}.$$

7 Shubertova metoda

Pretpostavimo da je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna funkcija. Ako u nejednakost (4) umjesto y stavimo a , onda je $x - a \geq 0$ i vrijedi

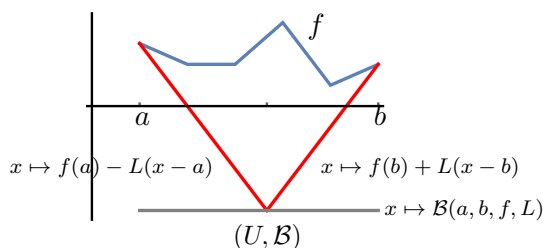
$$|f(x) - f(a)| \leq L(x - a), \quad \forall x \in [a, b],$$

odnosno

$$-L(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq L(x - a), \quad \forall x \in [a, b],$$

odakle dobivamo jednu donju ogradu funkcije f na intervalu $[a, b]$

$$f(x) \geq f(a) - L(x - a). \quad (15)$$



Slika 19: Donja ograda funkcije f na intervalu $[a, b]$

Slično, ako za y stavimo b , onda je $x - b \leq 0$ i vrijedi

$$|f(x) - f(b)| \leq -L(x - b), \quad \forall x \in [a, b],$$

odnosno

$$L(x - b) \leq f(x) - f(b) \leq -L(x - b), \quad \forall x \in [a, b],$$

odakle dobivamo drugu donju ogradu funkcije f

$$f(x) \geq f(b) + L(x - b). \quad (16)$$

Funkcija

$$x \mapsto \max\{f(a) - L(x - a), f(b) + L(x - b)\}, \quad (17)$$

također je donja ograda funkcije f (vidi Sliku 19), koja postiže svoj globalni minimum $\mathcal{B}(a, b, f, L)$ u točki $U(a, b, f, L)$, gdje je

$$U(a, b, f, L) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2L}(f(a) - f(b)), \quad (18)$$

$$\mathcal{B}(a, b, f, L) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{L}{2}(b - a), \quad (19)$$

a njezin je graf slomljeni pravac.

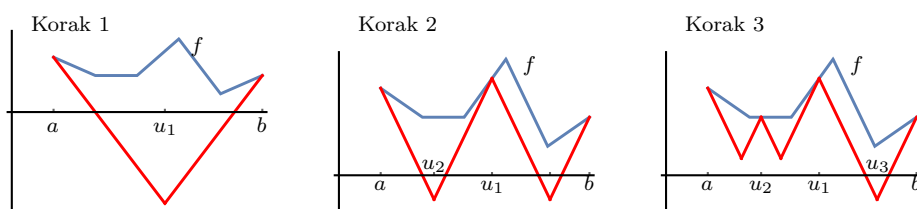
Primijetimo da je i $x \mapsto \mathcal{B}(a, b, f, L)$ također donja ograda funkcije f na intervalu $[a, b]$. Naime, zbrajanjem (15) i (16) dobivamo

$$f(x) \geq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{L}{2}(b - a) = \mathcal{B}(a, b, f, L).$$

Broj $\mathcal{B}(a, b, f, L)$ zovemo \mathcal{B} -vrijednost intervala $[a, b]$.

Algorithm 5 (Shubertov algoritam)**Require:** $f, L > 0$

- 1: Odrediti pravce $x \mapsto f(a) - L(x - a)$ i $x \mapsto f(b) + L(x - b)$ i točku njihovog sjecišta $(U(a, b, f, L), \mathcal{B}(a, b, f, L))$;
- 2: Staviti $u_1 = U(a, b, f, L)$. Izabrati jedan od dva intervala $[a, u_1]$ i $[u_1, b]$, a koji ima manju \mathcal{B} -vrijednost.
- 3: Ako je $[a, u_1]$ izabrani interval, staviti $u_2 = U(a, u_1, f, L)$.
Od tri intervala: $[a, u_2]$, $[u_2, u_1]$, $[u_1, b]$ izabrati onaj s najmanjom \mathcal{B} -vrijednosti i na njemu ponoviti postupak.



Slika 20: Shubertov algoritam

Animacija prvih koraka algoritma prikazana je na Slici 20. Dodatne primjere i ilustracije možemo dobiti korištenjem *Mathematica*-modula opisanog u t.??, str.??.

Primjedba 9. Primijetite da je *Shubertova metoda* zapravo specijalni slučaj *Algoritma Pijavskog* ako za početnu aproksimaciju izaberemo jedan od rubova intervala $[a, b]$. Neka je primjerice, $u_0 = a$. Tada prema algoritmu Pijavskog imamo (vidi Sliku 21)

$$u_1 = \operatorname{argmin}\{f(a) - L|u - a|\} = b \quad [\text{Korak 1}]$$

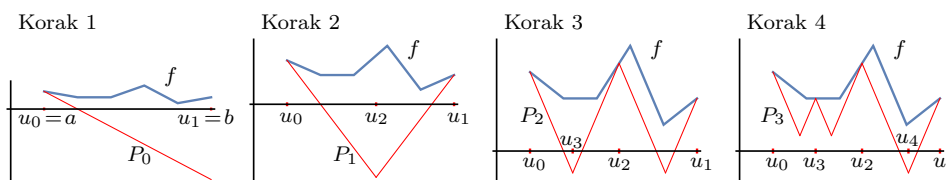
$$P_1(u) = \max\{f(a) - L|u - a|, f(b) - L|u - b|\},$$

$$u_2 = \operatorname{argmin} P_1(u) \quad [\text{Korak 2}].$$

Nakon toga definiramo

$$P_2(u) = \max\{P_1(u), f(u_2) - L|u - u_2|\},$$

$$u_3 = \operatorname{argmin} P_2(u) \quad [\text{Korak 3}]$$



Slika 21: Shubertov algoritam kao specijalan slučaj Algoritma Pijavskog

Očigledno se odluka može donijeti poznavanjem \mathcal{B} -vrijednosti funkcije f na intervalima $[a, u_2]$ i $[u_2, b]$. Ovaj kriterij podudara se s kriterijem navedenim u Koraku 2 *Shubertovog algoritma*.

Primjedba 10. Nažalost, ni *Metoda slomljenih pravaca*, a onda ni *Shubertova metoda*, ne može se generalizirati za slučaj više dimenzija.

Zadatak 22. Za funkciju iz *Zadatka 20* Shubertovom metodom odredite prve četiri aproksimacije točke globalnog minimuma.

8 Optimizacijski algoritam *DIRECT*

Pretpostavimo da je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna funkcija. Prema [4], *Metodu Pijavskog*, odnosno *Shubertovu metodu*, modificirat ćemo tako da je generalizacija na višedimenzionalni slučaj moguća. Naziv te metode je *DIRECT*, što dolazi od *DI*(viding)*RECT*(angles), a aludira na odgovarajući algoritam u više dimenzija (vidi t.??, str.??).

Ako u (4) za y stavimo $c = \frac{a+b}{2}$, onda za $x \leq c$, odnosno $x - c \leq 0$, dobivamo

$$L(x - c) \leq f(x) - f(c) \leq -L(x - c),$$

odnosno

$$f(x) \geq f(c) + L(x - c), \quad x \leq c, \quad (20)$$

iz čega zaključujemo da je funkcija $x \mapsto f(c) + L(x - c)$ jedna donja ograda funkcije f na intervalu $[a, c]$ (vidi Sliku 22).

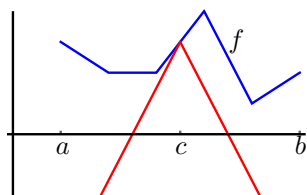
Slično, za $x \geq c$, odnosno $x - c \geq 0$, dobivamo

$$-L(x - c) \leq f(x) - f(c) \leq L(x - c),$$

odnosno

$$f(x) \geq f(c) - L(x - c), \quad x \geq c, \quad (21)$$

iz čega zaključujemo da je i funkcija $x \mapsto f(c) - L(x - c)$ jedna donja ograda funkcije f na intervalu $[c, b]$ (vidi Sliku 22).



Slika 22: Donja ograda funkcije f na intervalu $[a, b]$

Prema tome, funkcija

$$x \mapsto \begin{cases} f(c) + L(x - c), & x \leq c \\ f(c) - L(x - c), & x \geq c \end{cases} = f(c) - L|x - c| \quad (22)$$

je donja ograda funkcije f na intervalu $[a, b]$ (vidi Sliku 22), koja postiže svoj globalni minimum $f(c) - L\frac{b-a}{2}$ u lijevom i desnom rubu intervala $[a, b]$. Kod izbora donje ograde

funkcije f na intervalu $[a, b]$ uvijek nastojimo da ta donja ograda bude što bliža funkciji f . U ovom slučaju to znači da bi konstanta $L > 0$ trebala biti što manja. U konkretnim praktičnim problemima obično ne poznajemo tu najmanju moguću vrijednost Lipschitzove konstante $L > 0$, pa se moramo zadovoljiti nekom aproksimacijom. Efikasnost algoritma kojeg ćemo konstruirati ovisit će upravo o tome.

Primijetite da uz poznavanje Lipschitzove konstante L donja ograda funkcije f ovisi samo o vrijednosti funkcije f u centru intervala $[a, b]$ i širini intervala. Ovo svojstvo imat će ključnu ulogu prilikom konstrukcije optimizacijskog algoritma, ali posebno i kod generalizacije na višedimenzionalni slučaj. Minimum donje ograde funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definirane s (22) zvat ćemo \mathcal{B} -vrijednost i označavati s

$$\mathcal{B}(c, d) = f(c) - Ld, \quad d = \frac{b-a}{2}. \quad (23)$$

Primjedba 11. Primijetite da se \mathcal{B} -vrijednost podudara s minimumom funkcije $u \mapsto K(u; c)$ definirane s (6) kod *Metode slomljenih pravaca* (vidi t.6, str.17).

Algorithm 6 (Algoritam *DIRECT*, [4])

Require: $f \in Lip_L[a, b]$, $L > 0$

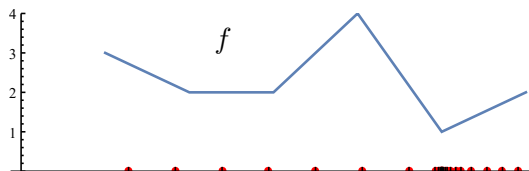
- 1: Interval $[a, b]$ poluširine $d = \frac{b-a}{2}$ s centrom $c = \frac{a+b}{2}$ podijeliti na 3 podintervala jednake poluširine $\frac{d}{3}$ s centrima $c_1 = c - 2\frac{d}{3}$, $c_2 = c$, $c_3 = c + 2\frac{d}{3}$;
 - 2: Staviti $n = 3$;
 - 3: Za niz podintervala $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ s centrima $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$ i poluširinama $d_i = \frac{b_i-a_i}{2}$ izračunati \mathcal{B} -vrijednosti $\mathcal{B}(c_i, d_i) = f(c_i) - Ld_i$, $i = 1, \dots, n$;
 - 4: Odrediti $i_0 = \operatorname{argmin}_{i=1, \dots, n} f(c_i)$ i staviti $\min = \{c_{i_0}, f(c_{i_0})\}$;
 - 5: Odrediti $j = \operatorname{argmin}_{i=1, \dots, n} \mathcal{B}(c_i, d_i)$;
 - 6: Interval s centrom u c_j podijeliti na 3 podintervala poluširine $\frac{d_j}{3}$;
 - 7: Korigirati \min s vrijednosti funkcije u dva nova centra: $c_j - 2\frac{d_j}{3}$, $c_j + 2\frac{d_j}{3}$;
 - 8: Izračunati \mathcal{B} -vrijednosti za tri nova podintervala;
 - 9: Staviti $n := n + 2$ i prijeći na *Korak 5*;
-

Modul koji implementira *Algoritam DIRECT* uz poznatu vrijednost Lipschitzove konstante $L > 0$ opisan je u t.??, str.??.

Primjedba 12. Primijetite da vrijedi:

- Prema Teoremu 2, proizvoljno gomilište niza (c_n) točka je u kojoj funkcija f postiže svoj globalni minimum;
- \mathcal{B} -vrijednost izabranog intervala nije veća od vrijednosti funkcije f u centru tog intervala $[\mathcal{B}(c_j, d_j) = f(c_j) - Ld_j \leq f(c_j)]$;
- Iterativni postupak može se ubrzati korištenjem činjenicu da se u svakom koraku od postojećeg niza podintervala ispušta jedan i dodaju tri nova podintervala.

Primjer 10. Primjenom Algoritma *DIRECT* odredit ćemo globalni minimum funkcije $f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ zadane u Primjeru 8, str.15. Na Slici 23 prikazan je niz aproksimacija (c_n) globalnog minimuma koji se postiže u točki $x^* = 5$.



Slika 23: Niz aproksimacija (c_n) globalnog minimuma funkcije iz Primjera 8, str.15

Zadatak 23. Za funkciju iz Zadatka 20 provedite prve dvije iteracije Algoritma *DIRECT*.

Zadatak 24. Za funkciju $f: [0, 18] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{|x - 5| + 1, |x - 10| + 2\}$ provedite prve tri iteracije Algoritma *DIRECT* i u svakom koraku zapišite podintervale s kojima se nastavlja algoritam.

8.1 Optimizacija algoritma *DIRECT*

U *Algoritmu DIRECT* najvažniji korak je Korak 5 u kojemu tražimo interval s najmanjom \mathcal{B} -vrijednosti. Pokazat ćemo kako se to može provesti, a da se pri tome ne koristi informacija o Lipschitzovoj konstanti L . To je izuzetno važna činjenica jer smo već ranije spomenuli da je traženje povoljne (što manje) vrijednosti Lipschitzove konstante L općenito vrlo zahtjevan proces [14], a korištenje grube aproksimacije (velika vrijednost za L) jako usporava algoritam.

Sukladno ideji iznesenoj u radu [4], naglasimo još jednom važnost činjenice da smo \mathcal{B} -vrijednosti (23) intervala $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ u *Algoritmu DIRECT* predstavili samo njihovim centrima c_i , $i = 1, \dots, n$ i njihovim poluširinama $d_i = \frac{b_i - a_i}{2}$. Zato ćemo svakom intervalu $[a_i, b_i]$ s centrom c_i pridružiti točku

$$T_i = (d_i, f(c_i)),$$

a \mathcal{B} -vrijednost intervala $[a_i, b_i]$

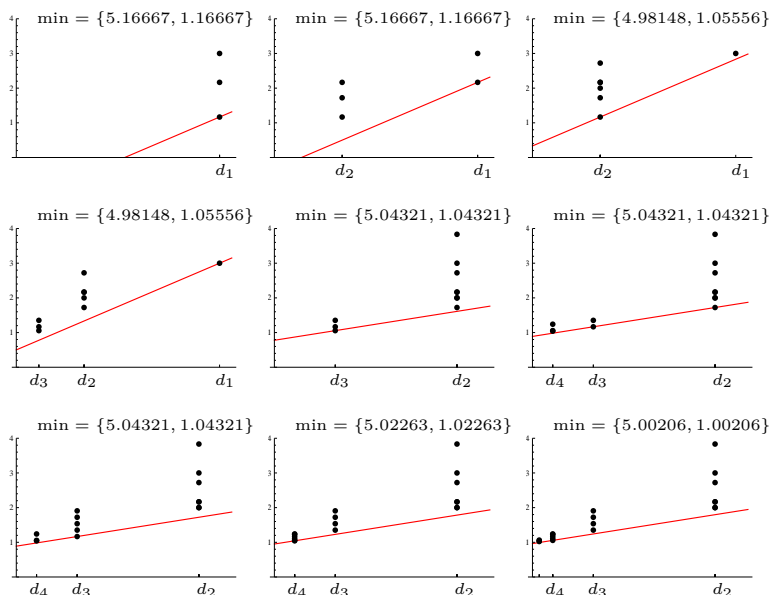
$$\mathcal{B}_i := \mathcal{B}(c_i, d_i) = f(c_i) - Ld_i, \quad \text{gdje je} \quad d_i = \frac{b_i - a_i}{2},$$

može se interpretirati kao odsječak na ordinati linearne funkcije ℓ_i čiji graf prolazi točkom T_i i ima koeficijent smjera L :

$$\ell_i(x) = f(c_i) + L(x - d_i) \quad [\ell_i(0) = \mathcal{B}_i]. \quad (24)$$

Razmotrimo nekoliko prvih iteracija *Algoritma DIRECT* kod traženja globalnog minimuma funkcije f iz Primjera 8, str.15. Svaki grafikon na Slici 24 prikazuje točke

$T_i, i = 1, \dots, n$ dobivene u nekoj iteraciji *Algoritma DIRECT* i pravac l_j kroz točku T_j s koeficijentom smjera L , pri čemu je j izabran tako da bude $\mathcal{B}_j = \min_{i=1, \dots, n} \mathcal{B}_i$. Dakle, j je redni broj intervala s najmanjom \mathcal{B} -vrijednosti, odnosno najmanjim odsječkom na ordinati odgovarajućeg pravca l_j . U prvoj iteraciji pojavljuje se $n = 3$ točke, u drugoj $n = 5$ točaka, u trećoj $n = 7$ točaka, itd. Pritom se neke točke podudaraju.



Slika 24: Niz aproksimacija (c_n) globalnog minimuma funkcije iz Primjera 8, str.15

Ako se na intervalu $[a_j, b_j]$, $j \in I$ postigne najmanja \mathcal{B} -vrijednost, onda je odsječak na ordinati pravca l_j s koeficijentom smjera L a koji prolazi točkom T_j najmanji u odnosu na sve druge takve pravce koji prolaze točkama T_1, \dots, T_n , a sve točke T_i leže iznad ili na pravcu l_j .

Postavlja se pitanje: „Postoji li možda neki pravac iznad kojeg leže sve točke T_i s manjim koeficijentom smjera $0 < \hat{L} < L$?” Već na drugom grafikonu Slike 24 vidi se da je bilo moguće izabrati „bolji pravac” – donju ogradu točaka $T_i, i = 1, \dots, n$ izborom nove točke T_j i manjeg koeficijenta smjera $0 < \hat{L} \leq L$. Problem bismo mogli proširiti na sljedeći način: „Trebamo pronaći sve točke $T_j, j \in I$, za koje je moguće pronaći neku konstantu $\hat{L} > 0$, tako da nijedna od točaka $T_i, i \in I$ ne bude ispod pravca $x \mapsto \hat{L}x + (f(c_j) - \hat{L}d_j)$, odnosno tako da odgovarajuća \mathcal{B} -vrijednost koja pripada točki T_j bude najmanja: $f(c_j) - \hat{L}d_j \leq f(c_i) - \hat{L}d_i$ za svaki $i \in I$.” S tom motivacijom uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2. Interval $[a_j, b_j]$ s centrom c_j i poluširinom $d_j = \frac{b_j - a_j}{2}$ je potencijalno optimalan ako postoji $\hat{L} > 0$, tako da bude

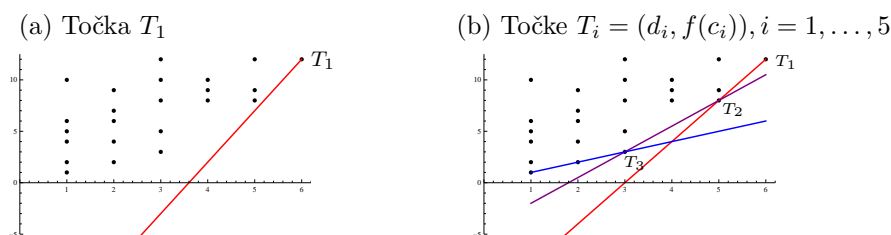
$$f(c_j) - \hat{L}d_j \leq f(c_i) - \hat{L}d_i, \quad \forall i \in I = \{1, \dots, n\}. \quad (25)$$

Formula (25) znači da je za dani $\hat{L} > 0$ odsječak na ordinati $\mathcal{B}_j = f(c_j) - \hat{L}d_j$ pravca (24), koji prolazi točkom T_j manji od ili jednak odsječcima na ordinati $\mathcal{B}_i = f(c_i) - \hat{L}d_i$

pravaca koji prolaze drugim točkama T_i , $i \in I$. Izborom različitih vrijednosti konstante $\hat{L} > 0$ u svakoj iteraciji može postojati više potencijalno optimalnih intervala.

Geometrijski gledano, interval $[a_j, b_j]$ bit će potencijalno optimalan ako birajući $\hat{L} > 0$ možemo pronaći pravac kroz točku T_j koji je ujedno donja ograda za sve druge točke T_i , $i = 1, \dots, n$. Ako pri tome sve točke jednake apscise (jednake poluširine intervala) uredimo prema veličini ordinate, onda potencijalno optimalne intervale treba tražiti između točaka najmanje ordinate (vidi Sliku 24). Od svih tih „donjih” točaka treba izabrati one kroz koje prolazi pravac iznad kojega se nalaze sve ostale točke. Primijetite da su to točke koje leže na konveksnoj ljusci skupa točaka T_i , $i \in I$.

Primjer 11. Na Slici 25 ilustriran je postupak traženja potencijalno optimalnih podintervala za problem iz Primjera 10. Za skup točaka prikazan na Slici 25a i za $\hat{L} = 5$ sve točke leže iznad pravca $l_1(x) = \hat{L}x + (f(c_1) - \hat{L}d_1) = 5x + (12 - 5 \cdot 6)$. Kao što se može vidjeti na Slici 25, točka $T_1 = (d_1, f(c_1))$ predstavlja potencijalno optimalan interval prema Definiciji 2.



Slika 25: Traženje potencijalno optimalnih intervala

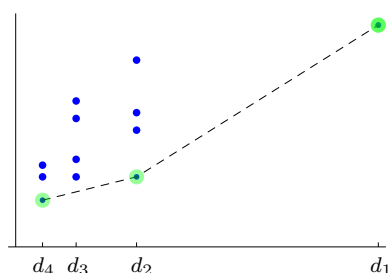
Međutim, kao što se može vidjeti, ima i boljih pravaca s manjim koeficijentom smjera, a koji imaju spomenuto svojstvo (Slika 25b):

$$\begin{aligned} f(c_1) - L_1 d_1 &\leq f(c_i) - L_1 d_i && \text{za sve } i, \\ f(c_2) - L_2 d_2 &\leq f(c_i) - L_2 d_i && \text{za sve } i, \\ f(c_3) - L_2 d_3 &\leq f(c_i) - L_2 d_i && \text{za sve } i. \end{aligned}$$

Svaki od ovih pravaca dobar je izbor: određuje barem jedan potencijalno optimalan interval (točku)! Primijetite da sve dobre točke leže na konveksnoj ljusci. Primijetite također da Lipschitzova konstanta na užem podintervalu u pravilu postaje manja, a time i algoritam efikasniji.

8.2 Traženje potencijalno optimalnih intervala

Geometrijski gledano, točka T_i na Slici 26 predstavljat će potencijalno optimalan interval u smislu Definicije 2 ako se kroz nju može provući pravac s nekim koeficijentom smjera $\hat{L} > 0$ iznad kojega (ili na kojemu) se nalaze sve druge točke.



Slika 26: Zelene točke odgovaraju potencijalno optimalnim intervalima

U nastavku ćemo operacionalizirati opisano načelo i sukladno Definiciji 2 identificirati potencijalno optimalne intervale bez korištenja konstante $\hat{L} > 0$.

Označimo $I := \{1, \dots, n\}$, $d_i := \frac{b_i - a_i}{2}$ i primijetimo najprije da se za izabrani $j \in I$ (a time i izabrani d_j) na Slici 26 može pojaviti jedna ili više točaka. Sve točke s apscisama d_j predstavljaju intervale poluširine d_j . Vrijedi sljedeća lema.

Lema 2. [2] *Neka je $f \in Lip_L[a, b]$ Lipschitz neprekidna funkcija s konstantom $L > 0$, $d_i, c_i, i \in I$ poluširine i centri intervala nastali dijeljenjem intervala $[a, b]$ u Algoritmu *DIRECT*.*

Interval $[a_j, b_j]$, $j \in I$ je potencijalno optimalan u smislu Definicije 2 onda i samo onda ako postoji $\hat{L} > 0$ takav da vrijedi

$$f(c_j) \leq f(c_i), \quad \forall i \in I_0, \quad (26)$$

$$\max_{k \in I_L} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k} \leq \hat{L} \leq \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}, \quad (27)$$

gdje je

- $I_0 = \{i \in I : d_i = d_j\}$ – indeksi točaka s apscisom d_j ;
- $I_L = \{i \in I : d_i < d_j\}$ – indeksi točaka koje se na grafikonu (26) nalaze lijevo od točaka s apscisom d_j ;
- $I_R = \{i \in I : d_i > d_j\}$ – indeksi točaka koje se na grafikonu (26) nalaze desno od točaka s apscisom d_j .

Primjedba 13. Za praktične primjene neće biti potrebno pronalaženje konstante $\hat{L} > 0$ iz (27).

Primjedba 14. Primjerice, ako je j indeks točke T_j sa Slike 26 koja ima apscisu $d_1 = \frac{b-a}{2}$, imamo: $|I_0| = 1$, $|I_L| = 11$, $|I_R| = 0$. Ako je j indeks točke T_j koja ima apscisu $d_2 = \frac{d_1}{3} = \frac{b-a}{6}$, imamo: $|I_0| = 4$, $|I_L| = 7$, $|I_R| = 1$. Ako je j indeks točke T_j koja ima apscisu $d_4 = \frac{d_3}{3} = \frac{b-a}{27}$, imamo: $|I_0| = 3$, $|I_L| = 0$, $|I_R| = 9$.

Važno je primijetiti da je skup I_L za točke iz prvog stupca (najmanji d_j) prazan i da je skup I_R za točke iz posljednjeg stupca (najveći d_j) prazan.

Dokaz. Zapišimo (25) kao

$$f(c_j) - f(c_i) \leq \hat{L}(d_j - d_i), \quad \forall i \in I, \quad (28)$$

Nužnost.

Za sve $i \in I_0$, $d_i = d_j$, iz čega slijedi (26). Uvjeti (26) jednostavno znače da točka T_j mora biti najniža između svih točaka apscise d_j .

Za $i \in I_L$ ($d_j - d_i > 0$) uvjete (28) možemo zapisati kao

$$\frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \max_{k \in I_L} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k} \leq \hat{L}, \quad \forall i \in I_L. \quad (29)$$

Za $i \in I_R$ ($d_j - d_i < 0$) uvjete (28) možemo zapisati kao

$$\frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \geq \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k} \geq \hat{L}, \quad \forall i \in I_R. \quad (30)$$

Nejednakosti (29) i (30) zajedno možemo zapisati kao

$$\max_{k \in I_L} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k} \leq \hat{L} \leq \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}, \quad \text{odnosno} \quad (31)$$

$$\max_{k \in I_L} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k} \leq \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k} \quad (32)$$

Primijetite da smo na taj način eliminirali konstantu \hat{L} .

Specijalno, ako je $I_L = \emptyset$, uvjet (29), a onda i uvjet (32), trivijalno su ispunjeni. Analogno, ako je $I_R = \emptyset$, uvjet (30), a onda i uvjet (32), trivijalno su ispunjeni. Stoga, u ovim slučajevima uvjet (27) interpretiramo korištenjem konvencije da je $\max \emptyset = -\infty$ i $\min \emptyset = \infty$. Dakle, za $I_L = \emptyset$ ili $I_R = \emptyset$ uvjet (32), odnosno (27), ne treba provjeravati.

Zaključno, ako je interval $j \in I$ potencijalno optimalan u smislu Definicije 2, onda su ispunjeni uvjeti (26)-(27).

Dovoljnost.

Pretpostavimo da su za interval $[a_j, b_j]$, $j \in I$ ispunjeni uvjeti (26)-(27). Pokažimo da tada postoji $\hat{L} > 0$ takav da vrijedi (25).

Za $i \in I_0$ vrijedi ($d_i = d_j$), pa za $\hat{L} > 0$ možemo uzeti bilo koji pozitivan broj jer iz $f(c_j) \leq f(c_i)$ slijedi (28), odnosno (25).

Za $i \in I_L \cup I_R$, iz (32) zaključujemo da postoji $\hat{L} > 0$, takav da vrijedi (31).

Ako je $i \in I_L$, vrijedi (29), odnosno (28), a ako je $i \in I_R$, vrijedi (30), iz čega ponovo slijedi (28). \square

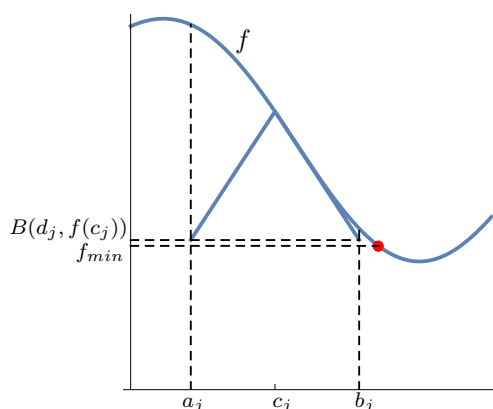
Zadatak 25. *Odredite potencijalno optimalne intervale za skup intervala dobiven u Zadatku 23 nakon dvije iteracije Algoritma *DIRECT*.*

Zadatak 26. *Za funkciju $f: [-6, 12] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min \{|x - 1| + 1, |x - 8| + 2\}$ odredite Lipschitzovu konstantu te koristeći taj rezultat provedite prve tri iteracije Algoritma *DIRECT*. Za dobivene intervale grafički prikazite točke $T_i = (d_i, f(c_i))$, gdje je d_i poluširina a c_i centar i -tog intervala. Odredite koji su intervali potencijalno optimalni te za njih odredite dozvoljeni raspon konstante \hat{L} u Definiciji 2.*

8.2.1 Dodatno sužavanje skupa potencijalno optimalnih intervala

Skup potencijalno optimalnih intervala dobiven sukladno Definiciji 2 može se još više suziti tako da ne razmatramo intervale čije se \mathcal{B} -vrijednosti relativno malo razlikuju od trenutno minimalne vrijednosti funkcije f_{min} .

Na Slici 27 prikazan je potencijalno optimalan podinterval $[a_j, b_j]$ s centrom u točki c_j , čija se \mathcal{B} -vrijednost od trenutnog minimuma funkcije f_{min} razlikuje za manje od ϵ . Takav interval ne bismo trebali dalje dijeliti jer ne daje nade da će se na njemu postići globalni minimum.



Slika 27: Interval koji nije potencijalno optimalan

Ako je $[a_j, b_j]$ potencijalno optimalan interval sukladno Definiciji 2, onda vrijedi

$$\mathcal{B}(c_j, d_j) = f(c_j) - \hat{L}d_j \leq f_{min}.$$

Uz pretpostavku da je $f_{min} \neq 0$, to bi značilo da je relativno odstupanje aktualnog minimuma f_{min} od \mathcal{B} -vrijednosti j -tog podintervala nenegativno

$$\frac{f_{min} - (f(c_j) - \hat{L}d_j)}{|f_{min}|} \geq 0.$$

Ako je to odstupanje značajno (veće od nekog $\epsilon > 0$)

$$\frac{f_{min} - (f(c_j) - \hat{L}d_j)}{|f_{min}|} \geq \epsilon > 0, \quad (33)$$

onda ćemo podinterval $[a_j, b_j]$ zadržati u skupu potencijalno optimalnih intervala. U protivnom nećemo ga smatrati potencijalno optimalnim. U literaturi [1, 2] preporuča se koristiti $\epsilon = 10^{-4}$.

Lema 3. [2] Neka je $S \subset I$ skup indeksa potencijalno optimalnih intervala sukladno Definiciji 2, odnosno Lemi 2, i neka je $\epsilon > 0$. Relativno odstupanje aktualnog minimuma

f_{min} od \mathcal{B} -vrijednosti j -tog podintervala $[a_j, b_j]$, $j \in S$ razlikuje se za više od ϵ onda i samo onda ako vrijedi

$$\epsilon \leq \frac{f_{min} - f(c_j)}{|f_{min}|} + \frac{d_j}{|f_{min}|} \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}, \quad \text{ako je } f_{min} \neq 0, \quad (34)$$

odnosno

$$f(c_j) \leq d_j \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}, \quad \text{ako je } f_{min} = 0, \quad (35)$$

gdje je $I_R = \{i \in I: d_i > d_j\}$.

Dokaz. Nužnost.

Pretpostavimo da se potencijalno optimalni interval $[a_j, b_j]$, $j \in S$, razlikuje od aktualnog minimuma f_{min} za više od ϵ , tj. da za njega vrijedi (33).

Ako je $f_{min} \neq 0$ i $I_R \neq \emptyset$, iz (33) koristeći (30) dobivamo

$$\epsilon \leq \frac{f_{min} - f(c_j)}{|f_{min}|} + \hat{L} \frac{d_j}{|f_{min}|} \leq \frac{f_{min} - f(c_j)}{|f_{min}|} + \frac{d_j}{|f_{min}|} \min_{i \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}.$$

Nadalje razmotrimo slučaj $f_{min} = 0$ i (33) zapišimo kao

$$f(c_j) - \hat{L}d_j \leq f_{min} - \epsilon|f_{min}|. \quad (36)$$

Ako je $f_{min} = 0$ i $I_R \neq \emptyset$, iz (36) koristeći (30) dobivamo

$$f(c_j) \leq \hat{L}d_j \leq d_j \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}.$$

Zato uvjet (33) možemo zapisati pomoću (34)-(35). Dakle, na taj način i uvjete (33) zapisali smo bez korištenja konstante \hat{L} .

Dovoljnost.

Pretpostavimo da su za interval $[a_j, b_j]$, $j \in S$ ispunjeni uvjeti (34)-(35). Pokažimo da se tada \mathcal{B} -vrijednost potencijalno optimalnog intervala $[a_j, b_j]$, $j \in S$ razlikuje od aktualnog minimuma f_{min} za više od ϵ , odnosno da postoji $\hat{L} > 0$ takav da vrijedi (33). U tu svrhu dovoljno je uzeti $\hat{L} = \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}$. \square

Zadatak 27. Uočite zašto se u formuli (36) koristi apsolutna vrijednost trenutno minimalne vrijednosti funkcije f_{min} .

Primjedba 15. U programskom sustavu *Mathematica* ne treba posebno voditi računa o stupcima točaka za koje je $j = \operatorname{argmax}_{i \in I} d_i$ (najdesniji) i $j = \operatorname{argmin}_{i \in I} d_i$ (najlijevi) jer u ovom programskom sustavu vrijedi:

$$\operatorname{Max}[\{\}] = -\infty \text{ i } \operatorname{Min}[\{\}] = \infty.$$

Sljedeći teorem objedinjuje Lemu 2 i Lemu 3 i daje karakterizaciju potencijalno optimalnih intervala čije se \mathcal{B} -vrijednosti značajnije razlikuju od aktualnog minimuma funkcije f . Takve intervale ima smisla dalje dijeliti u *Algoritmu DIRECT*.

Teorem 3. *Neka je $f \in Lip_L[a, b]$ Lipschitz neprekidna funkcija s konstantom $L > 0$, $\{d_i, c_i: i \in I\}$ poluširine i centri intervala nastali dijeljenjem intervala $[a, b]$ u Algoritmu *DIRECT*, $f_{min} = \min_{i \in I} f(c_i)$ aktualna vrijednost minimuma i $\epsilon > 0$.*

Interval $[a_j, b_j]$, $j \in I$ je potencijalno optimalan u smislu Definicije 2, a relativno odstupanje aktualnog minimuma f_{min} od \mathcal{B} -vrijednosti j -tog podintervala $[a_j, b_j]$, $j \in S$ razlikuje se za više od ϵ onda i samo onda ako vrijedi

$$f(c_j) \leq f(c_i), \quad \forall i \in I_0,$$

$$\max_{k \in I_L} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k} \leq \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k},$$

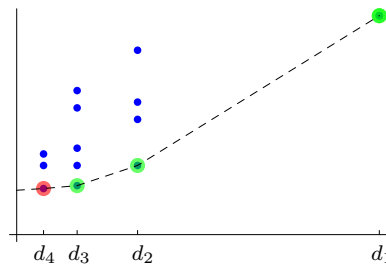
$$\begin{cases} \epsilon \leq \frac{f_{min} - f(c_j)}{|f_{min}|} + \frac{d_j}{|f_{min}|} \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}, & \text{ako je } f_{min} \neq 0, \\ f(c_j) \leq d_j \min_{k \in I_R} \frac{f(c_j) - f(c_k)}{d_j - d_k}, & \text{ako je } f_{min} = 0, \end{cases}$$

gdje je

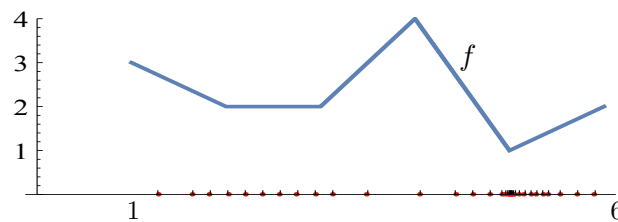
- $I_0 = \{i \in I: d_i = d_j\}$ – indeksi točaka s apscisom d_j ;
- $I_L = \{i \in I: d_i < d_j\}$ – indeksi točaka koje se na grafikonu (26) nalaze lijevo od točaka s apscisom d_j ;
- $I_R = \{i \in I: d_i > d_j\}$ – indeksi točaka koje se na grafikonu (26) nalaze desno od točaka s apscisom d_j .

Potencijalno optimalni intervali na Slici 28 prikazani su zelenim točkama. Nasuprot tome, interval koji je na Slici 28 predstavljen crvenom točkom zbog uvjeta (36) neće biti svrstan u potencijalno optimalne zato što se njegova \mathcal{B} -vrijednost gotovo ne razlikuje od trenutno minimalne vrijednosti funkcije f_{min} . Geometrijsko objašnjenje uvjeta (36) može se također vidjeti na Slici 2.2 kod [1].

Primjer 12. *Na Slici 29 prikazan je iterativni postupak Algoritma *DIRECT* s biranjem potencijalno optimalnih intervala u smislu Definicije 2 prilikom traženja globalnog minimuma funkcije iz Primjera 8, str.15.*



Slika 28: Zelene točke odgovaraju potencijalno optimalnim intervalima, a crvena točka odgovara potencijalno optimalnom intervalu čija se \mathcal{B} -vrijednost ne razlikuje značajno od trenutnog minimuma f_{min}

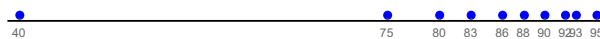


Slika 29: Primjena *Algoritma DIRECT* s izborom potencijalno optimalnih intervala za funkciju iz Primjera 8, str.15

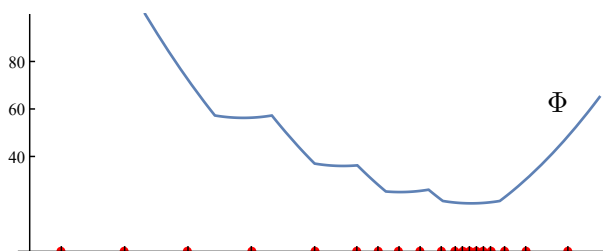
Primjer 13. Kao reprezentant podataka $y = \{y_1, \dots, y_m\}$ možemo promatrati tzv. „Least Median of Squares” (*LMS*) (vidi [5, 8])

$$LMS(y) = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \mathbb{R}} \Phi(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = \operatorname{med}_i (y_i - \lambda)^2. \quad (37)$$

Promatramo podatke koji predstavljaju 10 mjesečnih mjerenja dijastoličkog tlaka neke osobe: 90, 93, 86, 92, 95, 83, 75, 40, 88, 80 [8].



Graf funkcije Φ i prve 4 iteracije *Algoritma DIRECT* prikazane su na Slici 30. Pokušajte odrediti Lipschitzovu konstantu ove funkcije.



Slika 30: Primjena *Algoritma DIRECT* s izborom potencijalno optimalnih intervala na funkciju kojom se definira „Least Median of Squares”

Iz podataka možemo zaključiti da podatak 40 predstavlja outlier. Ako promotrimo aritmetičku sredinu uzorka, ona iznosi 82.2 i privučena je outlierom. S druge strane, medijan uzorka je 87, a LMS procjena iznosi 90.5. LMS procjena leži u području veće koncentracije podataka gdje većina točaka leži blizu jedna drugoj. Kad bismo outlier pomaknuli još dalje od ostatka podataka, ni medijan niti LMS ne bi promijenili svoju vrijednost. S druge strane, pomicanjem samo jednog podatka možemo proizvoljno mijenjati vrijednost aritmetičke sredine. U tom smislu medijan i LMS predstavljaju primjere robusnih procjenitelja reprezentanata skupa podataka. Nedostatak LMS procjenitelja veća je varijabilnost od nekih drugih robusnih procjenitelja položaja. Za više detalja vidjeti [8].

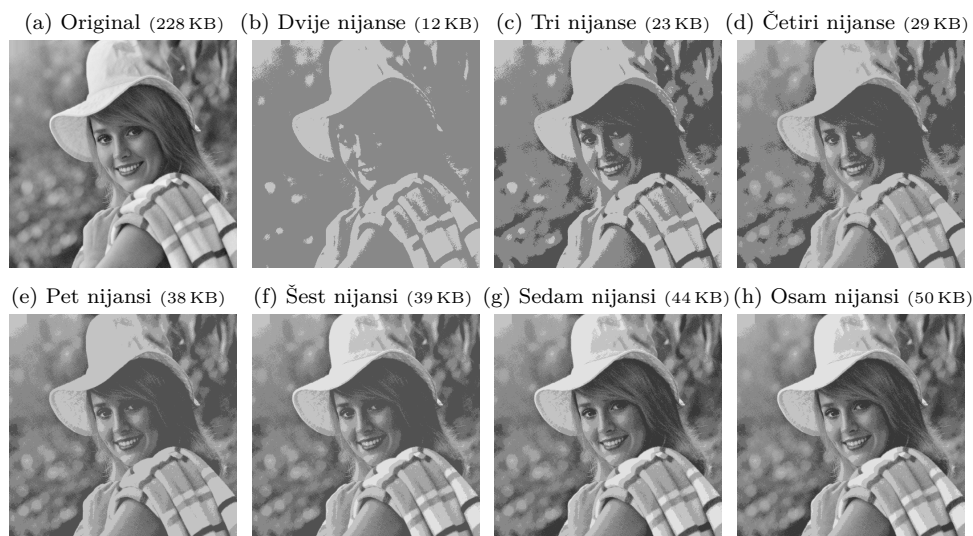
Primjedba 16. Ako se u *Algoritmu DIRECT* primijeni paralelno programiranje, onda se može postaviti pitanje je li traženje podintervala s najmanjom \mathcal{B} -vrijednosti efikasnije (brže) izdvajanjem potencijalno optimalnih intervala sukladno Definiciji 2 ili je efikasnije (brže) jednostavno ispitivati sve „donje” točke u klasterima točaka jednake apscise? Općenito nije! To pokazuju brojni primjeri iz primjena.

Primjer 14. *Promatramo problem segmentacije crno-bijele slike navedene u Primjeru ??, str.?? (također vidi Sliku 31a). Skup podataka $\mathcal{A} = \{a^i \in [0, 1] : i = 1, \dots, 262144\}$ grupirat ćemo u $k = 2, \dots, 8$ klastera primjenom inkrementalnog algoritma (vidi [10, str. 74]). Svakoj točki klastera π_j pridružiti ćemo nijansu koju ima njegov centroid. Tako dobivamo rekonstruiranu sliku s k nijansi.*

Konstrukciju započinjemo centroidom $c_1 = \text{mean}(\mathcal{A}) = 0.53$ skupa \mathcal{A} . Sljedeći centroid c_2 potražiti ćemo rješavanjem GOP:

$$\operatorname{argmin}_{c \in [0, 1]} F_1(c), \quad F_1(c) = \sum_{i=1}^m \min\{(c_1 - a^i)^2, (c - a^i)^2\}. \quad (38)$$

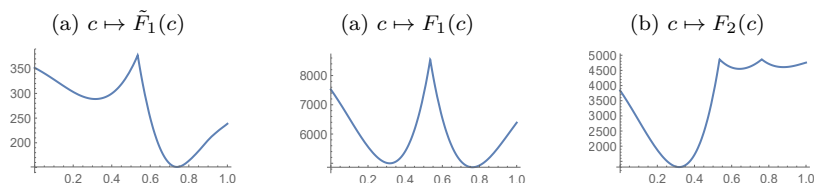
Funkcija F_1 je nediferencijabilna i nekonveksna, ali Lipschitz-neprekidna. Primjena obične naredbe `Plot` za crtanje njenog grafa bilo bivrlo dugotrajno zbog veličine broja podataka m . Ako bismo željeli nekakvu aproksimaciju tog grafa mogli bismo uzeti primjerice, samo prvih 10000 podataka (vidi Sliku 32a), ali i to bi trajalo više od minute. Bolje je primijeniti *Mathematica*-naredbu `Compile`, čime dobivamo Sliku 32b.



Slika 31: Originalna slika i njena segmentacija u $2, \dots, 8$ klastera. Centroidi klastera su redom elementi skupa $\{0.53, 0.76, 0.32, 0.64, 0.43, 0.88, 0.22, 0.59\}$

```
In[1]:= FFCCompile = Compile[{{c, _Real}}, Evaluate[
  Sum[Min[Append[Table[Norm[cen[[j]] - A[[i]]]^2, {j, Length[cen]}],
  Norm[c - A[[i]]]^2]], {i, m}]];
In[2]:= Plot[FFCCompile[c], {c, 0, 1}, ImageSize -> Small]
```

Primjenom *Mathematica*-modula `NMinimize[]` ili nekom od jednodimenzionalnih metoda minimizacije (primjerice algoritmom *DIRECT*) na funkcijuu (38) dobivamo $c_2 = 0.76$. Tako dobivamo optimalnu 2-particiju $\{\pi_1, \pi_2\}$ skupa \mathcal{A} s centroidima c_1, c_2 i odgovarajuću Sliku 31b.



Slika 32: Minimizirajuće funkcije

U cilju pronalaženja trećeg centroida potražiti ćemo rješenje problema globalne optimizacije za funkciju

$$F_2(c) = \sum_{i=1}^m \min\{(\hat{c}_1 - a^i)^2, (\hat{c}_2 - a^i)^2, (c - a^i)^2\}. \quad (39)$$

Primjenom *Mathematica*-modula `NMinimize[]` ili nekom od jednodimenzionalnih metoda minimizacije (primjerice algoritmom *DIRECT*) na funkcijuu (39) dobivamo sljedeći centroid $c_3 = 0.32$. Tako dobivamo optimalnu 3-particiju $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ skupa \mathcal{A} s centroidima c_1, c_2, c_3 . Kada svim elementima klastera π_j pridružimo nijansu c_j dobivamo Sliku 31c.

Ponavljajući postupak na sličan način dobivamo i ostale centroide:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.53, & c_2 &= 0.76, & c_3 &= 0.32, & c_4 &= 0.64, \\ c_5 &= 0.43, & c_6 &= 0.88, & c_7 &= 0.22, & c_8 &= 0.59 \end{aligned}$$

i slike na Slici 31.

Rezultat bi se mogao još malo popraviti tako da nakon svakog koraka primijenimo k -means algoritam (vidi [10, str.39]), ali obzirom na relativno veliki broj podataka skupa \mathcal{A} vrijeme izvođenja (CPU-time) mogao bi biti neočekivano velik.

Isti problem mogao bi se rješavati kao GOP za funkciju k varijabli $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$F(c_1, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^m \min_{1 \leq j \leq k} (c_j - a^i)^2, \quad (40)$$

ali tada bi se trebao upotrebiti algoritam *DIRECT* za višedimenzionalnu globalnu optimizaciju iz sljedećeg poglavlja.

Segmentacija slike nalazi svoju primjenu kod analize „toplinskih mostova” u građevinarstvu, u drvnoj ili keramičkoj industriji prilikom traženja pogreške u uzorku, itd.

Literatura

- [1] D. E. FINKEL, *DIRECT Optimization Algorithm User Guide*, Center for Research in Scientific Computation. North Carolina State University, 2003, <http://www4.ncsu.edu/definkel/research/index.html>.
- [2] J. M. GABLONSKY, *Direct version 2.0*, Technical report, Center for Research in Scientific Computation. North Carolina State University, 2001.
- [3] F. JARRE, J. STOER, *Optimierung*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [4] D. R. JONES, C. D. PERTTUNEN, B. E. STUCKMAN, *Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant*, Journal of Optimization Theory and Applications, **79**(1993) 157–181.
- [5] Y.-S. LIU, K. RAMANI, *Robust principal axes determination for point-based shapes using least median of squares*, Computer-Aided Design, **41**(2009) 293–305.
- [6] J. M. ORTEGA, W. C. RHEINBOLDT, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [7] R. PAULAVIČIUS, Y. SERGEYEV, D. KVASOV, J. ŽILINSKAS, *Globally-biased DISIMPL algorithm for expensive global optimization*, Journal of Global Optimization, **59**(2014) 545–567.
- [8] P. J. ROUSSEEUW, A. M. LEROY, *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley, New York, 2003.
- [9] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 3, izdanje, 2015, <http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=541>.
- [10] R. SCITOVSKI, K. SABO, *Klaster analiza i prepoznavanje geometrijskih objekata*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2020, (In Croatian) <https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/CLUSTERS.pdf>.

- [11] J. STOER, R. BULIRSCH, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [12] R. G. STRONGIN, Y. D. SERGEYEV, *Global Optimization with Non-Convex Constraints: Sequential and Parallel Algorithms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [13] ŠIME UNGAR, *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno–matematički fakultet, Matematički odjel, 2002.
- [14] G. R. WOOD, B. P. ZHANG, *Estimation of the Lipschitz constant of a function*, Journal of Global Optimization, **8**(1996) 91–103.