Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
10. rujna 2021.

**Pismeni ispit iz Grafova**
Ak. god. 2020./2021.

**Zadatak 1** [20b] *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ i $S = \{0, 1\}$. Definirajmo graf $G$ čiji su vrhovi uređene $n$-torke elemenata iz skupa $S$, a dva vrha su spojena bridom ako i samo ako se pripadne $n$-torke podudaraju u najviše tri elementa.*
*a) Grafu $G$ odredite broj vrhova, broj bridova i niz stupnjeva.*
*b) Koliki je struk od $G$?*
*c) Je li $G$ povezan?*
*Sve odgovore detaljno obrazložite!*

**Zadatak 2** [20b] *Odredite red grupe $Aut(G)$ automorfizama grafa $G$ s $(m+n)p$ vrhova koji je nastao od potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$, $m \neq n$ i od $m+n$ kopija potpunog grafa $K_p$ tako da je svaki vrh od $K_{m,n}$ spojen bridom s proizvoljnim vrhom jedne kopije $K_p$. Za koje vrhove je broj elemenata orbite u grupi $Aut(G)$ najveći i koliko iznosi?*

**Zadatak 3** [20b] *Neka je $G = (A, B)$ jednostavan bipartitan graf takav da za svaki $S \subseteq A$ vrijedi $|N(S)| \geq 2|S|$. Pokažite da postoji familija međusobno disjunktnih podgrafova u $G$ izomorfnih s $K_{1,2}$ tako da je svaki vrh iz $A$ centar jednog od njih.*

**Zadatak 4** [20b] *Kažemo da je neki jednostavan graf maksimalan planaran graf ako ima $n \geq 4$ vrhova i najveći mogući broj bridova.*
*Dokažite:*
*a) Najmanji stupanj vrha u maksimalnom planarnom grafu je veći ili jednak 3.*
*b) Ako s $n_i$ označimo broj vrhova stupnja $i$, gdje je $i = 3, 4, \ldots, k = \Delta(G)$, tada za maksimalan planaran graf $G$ vrijedi*

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = n_7 + 2n_8 + \cdots + (k-6)n_k + 12.$$

**Zadatak 5** [20b] *Odredite kromatski polinom grafa*

$$G := T_n \cup (P_2 \square C_3) \cup S_m,$$

*gdje $T_n$, $P_n$, $C_n$ i $S_n$ redom označavaju stablo, put, ciklus i zvijezdu s $n$ vrhova.*