Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
18. travnja 2018.

Prva kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike

Zadatak 1. (20 bodova)
Neka je S skup od 25 točaka u ravnini sa svojstvom da svaki tročlani podskup od S sadrži barem dvije točke na udaljenosti manjoj od 1. Dokažite da postoji 13-člani podskup skupa S koji možemo pokriti krugom polumjera 1.

Rješenje: Ako su svake dvije točke skupa S na udaljenosti manjoj od 1, onda se u krugu polumjera 1 sa središtem u bilo kojoj točki iz S nalaze sve preostale točke (pa tvrdnja svakako vrijedi). Pretpostavimo stoga da postoje neke dvije točke A i B iz S koje su na udaljenosti najmanje 1. S obzirom da svaki tročlani podskup od S sadrži barem dvije točke na udaljenosti manjoj od 1, zaključujemo da za svaku točku C iz S, $C \neq A, B$ vrijedi $|AC| < 1$ ili $|BC| < 1$. Skup S možemo particionirati u dva podskupa: u jednom se nalaze one točke koje su bliže A, a u drugom one koje su bliže B. Prema slaboj formi Dirichletova principa, postoji 13 točaka koje se mogu pokriti krugom polumjera 1.

Zadatak 2. (20 bodova)
Na koliko načina deseteročlana obitelj koju čine muž, žena, djed, baka i šestero djece može čekati u redu za kupnju kino ulaznica ako:
a) muž je prvi, a niti jedno dijete ne stoji na zadnjem mjestu;
b) djed i baka su na prva dva mjesta, a supružnici na posljednja dva mjesta u redu;
c) djeca nisu jedno do drugoga jer se stalno svađaju i čupaju za kosu, a najstarije dijete se maknulo iz reda?

Rješenje: Obzirom da ljude stavljamo u red, odmah je jasno da ćemo koristiti permutacije skupova.
a) Na zadnjem mjestu može stajati žena, djed ili baka pa imamo 3 načina za izbor osobe na zadnjem mjestu. Nakon što izaberemo osobu za zadnje mjesto, na preostalih 8 mjesta stavljamo sve ostale članove obitelji osim muža jer je on (fiksiran) na prvom mjestu, a to možemo napraviti na 8! načina. Rješenje: $3 \cdot 8!$
b) Djeda i baku na prva dva mjesta možemo staviti na 2 načina. Isto vrijedi za supružnike na zadnja dva mjesta. Na preostalih 6 mjesta možemo staviti djecu na 6! načina. Rješenje: $2 \cdot 2 \cdot 6!$
c) Jer je najstarije dijete napustilo red (to dijete ne biramo jer znamo da se radi o najstarijem), ostaje 9 članova obitelji koje treba posložiti u red tako da djeca nisu susjedna. To možemo napraviti tako da posložimo djecu u red tako da između svaka dva djeteta imamo jedno prazno mjesto. To možemo napraviti na 5! načina. Zatim još na 4! načina popunimo prazna mjesta u redu sa ostalim članovima obitelji. Rješenje: $5! \cdot 4!$.

Zadatak 3. (20 bodova)
Profesor je ponudio 10 različitih tema za seminarske radove skupini od 40 studenata. Tri teme su iz područja diskretne matematike, pet tema su iz integralnog računa, a dvije teme su iz geometrije. Na koliko načina profesor može podijeliti teme studentima ako:
a) svaka tema može biti dodijeljena točno jednom studentu;
b) na svakoj temi iz diskretne matematike treba raditi grupa od 8 studenata, a svaka od ostalih tema može biti dodijeljena po jednom studentu;
c) svaki student može izabrati bilo koju od ponuđenih tema;
d) petnaest (unaprijed odabranih) studenata ne želi pisati seminarski rad?

Rješenje:
a) Ako svaka tema može biti dodijeljena točno jednom studentu, onda samo 10 studenata može dobiti teme. Treba najprije izabrati 10 studenata, a onda ih permutirati obzirom na teme. Kako su sve teme različite, imamo $\binom{40}{10} \cdot 10!$. Primijetimo da se ovdje radi o brojanju svih 10-permutacija 40-članog skupa.
b) Biramo grupu od 8 studenata za svaku od tri teme, a zatim još permutiramo tri izabrane grupe.

Imamo $\binom{40}{8} \cdot \binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot 3!$. Kako svaka od ostalih tema može biti dodijeljena po jednom studentu, još treba birati 7 studenata od preostalih 16 i onda ih permutirati obzirom na teme.
Rješenje: $\binom{40}{8} \cdot \binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot 3! \cdot \binom{16}{7} \cdot 7!$.
c) 10^{40}.
d) Nemamo nikakvih posebnih uvjeta pa je rješenje: 10^{25}.

Zadatak 4. (20 bodova)
Tim od 14 matematičara ima obavezu riješiti 5 složenih kombinatornih problema. Problemi se razlikuju po težini. Najtežem problemu treba se posvetiti najmanje 5 matematičara, a za rješavanje najlakšeg problema ne treba više od dvojice. Na koliko se načina matematičari mogu rasporediti u 5 grupa tako da svaka grupa rješava jedan problem?

Rješenje: Primijetimo da se ne može dogoditi da neki problem ne rješava niti jedan matematičar.
Tražimo rješenja jednadžbe $x_1 + \cdots + x_5 = 14$ u skupu $\mathbb{N}$ pri čemu možemo uzeti da je x_1 broj matematičara u grupi za rješavanje najtežeg problema, a x_5 broj matematičara za rješavanje najlakšeg problema. Zato imamo uvjete $x_1 \geq 5$, $1 \leq x_5 \leq 2$, $x_i \geq 1$, $i = 2, 3, 4$.
Supstitucija: $y_1 = x_1 - 5 \geq 0$, $y_i = x_i - 1 \geq 0$, $i = 2, 3, 4, 5$, $y_5 \leq 1$. Riješimo novu jednadžbu bez uvjeta $y_5 \leq 1$. Broj rješenja jednadžbe $y_1 + \cdots + y_5 = 5$ u skupu nenegativnih cijelih brojeva je $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$.
Od broja ovakvih rješenja treba oduzeti broj rješenja uz uvjet $y_5 \geq 2$. Supstitucija: $z_i = y_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $z_5 = y_5 - 2$. Broj rješenja jednadžbe $z_1 + \cdots + z_5 = 3$ u skupu nenegativnih cijelih brojeva je $\binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4}$.
Rješenje: $\binom{9}{4} - \binom{7}{4}$.

Zadatak 5. (20 bodova)
Dokažite ili opovrgnite:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3 = n(n^2 - n - 4)2^{n-3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Treba uočiti da tvrdnja ne vrijedi jer je za $n = 1$ desna strana jednakosti negativan broj.
Drugi način provjere jest derivirati po x izraz $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, zatim dobiveni izraz množiti s x, opet derivirati, opet množiti s x, opet derivirati te zatim staviti $x = 1$. Dobit ćemo sumu kao na lijevoj strani jednakosti, a na desnoj strani ćemo dobiti izraz koji ne ovisi o n onako kako piše na desnoj strani dane jednakosti.

Zadatak 6. DODATNI ZADATAK (20 bodova)
Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko ima funkcija $f : S \to S$ takvih da za sve $i, j \in S$, $i < j$ vrijedi $f(i) \leq f(j)$?

Rješenje: I dalje nije poznato... :)