Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
18. travnja 2018.

Prva kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike

Zadatak 1. (20 bodova)
Dokažite da se među $n+2$ proizvoljnih cijelih brojeva mogu naći dva čija je razlika ili čiji je zbroj djeljiv s $2n$.

Rješenje: Skup svih $n+2$ brojeva možemo particionirati u podskupove A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ gdje A_i sadrži sve brojeve koji pri dijeljenju s $2n$ daju ostatak i ili $2n - i$. Prema slaboj formi Dirichletova principa, u nekom od podskupova, recimo u A_k imat ćemo barem dva broja. Ako oba broja pri dijeljenju s $2n$ daju ostatak k, onda je njihova razlika djeljiva s $2n$, a ako jedan broj daje ostatak k, a drugi $2n - k$, onda je njihova suma djeljiva s $2n$.

Zadatak 2. (20 bodova)
Na koliko načina deseteročlana obitelj koju čine muž, žena, djed, baka i šestero djece može sjesti i ručati za okruglim stolom ako:
a) supružnici žele sjediti jedno pored drugoga, te djed i baka žele sjediti jedno pored drugoga;
b) najstarije dijete će ručati u svojoj sobi, a preostala djeca ne smiju sjediti jedno pored drugoga jer se stalno svađaju i gađaju hranom;
c) muž i žena su najudaljeniji jedno od drugoga?

Rješenje: Obzirom da ljude smještamo za okrugli stol, odmah je jasno da ćemo koristiti cikličke permutacije skupova.
a) Muž i žena čine cjelinu, baka i djed čine cjelinu. Stoga imamo cikličku permutaciju skupa od 8 elemenata. U svakoj takvoj permutaciji muž i žena mogu zamijeniti mjesta ili baka i djed mogu zamijeniti mjesta. Rješenje: $(8-1)! \cdot 2 \cdot 2$.
b) Ako najstarije dijete neće ručati za stolom, onda imamo petero djece koju treba posjesti za okrugli stol tako da ne sjede jedno pored drugoga. No, takav raspored nije moguć jer između petero djece imamo pet mjesta, a preostalih članova obitelji ima 4. Rješenje: 0.
c) Ako su muž i žena najudaljeniji jedno od drugoga, onda su oni na dijametralno suprotnim mjestima za okruglim stolom, što znači da s muževe (ženine) desne i lijeve strane sjedi po 4 člana obitelji među kojima nije žena (muž). Muž i žena se ciklički mogu rasporediti na $(2-1)! = 1$ način tako da su najudaljeniji jedno od drugoga. Zatim možemo s muževe lijeve strane birati 4 člana od preostalih 8 i permutirati ih, te preostala 4 člana permutirati s muževe desne strane. Kraće: sve ostale članove (obično) permutiramo na 8! načina. Rješenje: 8!

Zadatak 3. (20 bodova)
U ravnini je zadan skup od n točaka od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu.
a) Koliko je dužina određenih tim točkama?
b) Na koliko načina možemo usmjeriti sve dužine određene tim točkama?
c) Ukoliko se na spojnici svake dvije točke danog skupa nalazi k različitih točaka, koliki će tada biti ukupan broj točaka u ravnini? Pretpostavljamo da niti jedna od tih k točaka nije zajednička točka dviju ili više spojnica.
d) Koliko je dužina određenih svim točkama iz c) ?
e) Na koliko načina možemo usmjeriti sve dužine iz d)?

Rješenje:
a) Dužina je određena s dvije točke. Rješenje: $\binom{n}{2}$.
b) Svaku dužinu možemo usmjeriti na dva načina. Rješenje: $2^{\binom{n}{2}}$.
c) $k\binom{n}{2} + n$
d) $\binom{k\binom{n}{2}+n}{2}$ s tim da će za $k > 0$ postojati trojke točaka koje leže na istom pravcu.

e) $2^{\binom{k\binom{n}{2}+n}{2}}$

Zadatak 4. (20 bodova)
Četrnaest prijatelja organizira kampiranje povodom 1. svibnja - Praznika rada. Na raspolaganju imaju četiri šatora, a u šumi planiraju ostati dvije noći zaredom. Šatori su različitih veličina te u najmanji od njih stane najviše 3 ljudi. Na koliko načina prijatelji mogu noćiti u šatorima ako nitko ne želi noćiti sam, a Tvrtko i Mirko planiraju provesti samo jednu (prvu noć) u šumi?

Rješenje: Treba naći broj načina za noćenje prvog dana i pomnožiti ga s brojem načina za noćenje drugog dana. Primijetimo da u svakom šatoru mora biti minimalno dvoje ljudi (obje noći).
Prva noć: Tražimo rješenja jednadžbe $x_1 + \cdots + x_4 = 14$ u skupu $\mathbb{N}$ pri čemu možemo uzeti da je x_1 broj ljudi u najmanjem šatoru. Imamo uvjete $3 \geq x_1 \geq 2$, $x_i \geq 2$, $i = 2, 3, 4$.
Supstitucija: $y_i = x_i - 2 \geq 0$, $i = 1, \ldots, 4$, $y_1 \leq 1$. Riješimo novu jednadžbu bez uvjeta $y_1 \leq 1$. Broj rješenja jednadžbe $y_1 + \cdots + y_4 = 6$ u skupu nenegativnih cijelih brojeva je $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$. Od broja ovakvih rješenja treba oduzeti broj rješenja uz uvjet $y_1 \geq 2$. Supstitucija: $z_i = y_i$, $2, 3, 4$, $z_1 = y_1 - 2$. Broj rješenja jednadžbe $z_1 + \cdots + z_4 = 4$ u skupu nenegativnih cijelih brojeva je $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3}$. Rješenje: $\binom{9}{3} - \binom{7}{3}$.
Druga noć: Sve isto kao i prve, samo s manjim brojem ljudi, tj. s 12 prijatelja. Rješenje: $\binom{7}{3} - \binom{5}{3}$.
Konačno rješenje: $\left(\binom{9}{3} - \binom{7}{3}\right) \cdot \left(\binom{7}{3} - \binom{5}{3}\right)$.

Zadatak 5. (20 bodova)
Dokažite ili opovrgnite:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)^2 = (n^2 + n + 2)2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Rješenje: Treba uočiti da tvrdnja ne vrijedi već za $n = 1$.
Drugi način provjere jest pomnožiti s x izraz $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, zatim dobiveni izraz derivirati po x, opet množiti s x, opet derivirati te zatim staviti $x = 1$. Dobit ćemo sumu kao na lijevoj strani jednakosti, a na desnoj strani ćemo dobiti izraz koji ne ovisi o n onako kako piše na desnoj strani dane jednakosti.

Zadatak 6. DODATNI ZADATAK (20 bodova)
Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko ima funkcija $f : S \to S$ takvih da za sve $i, j \in S$, $i < j$ vrijedi $f(i) \leq f(j)$?

Rješenje: I dalje nije poznato... :)