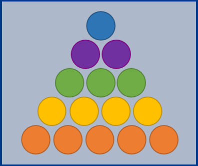


M102 Kombinatorna i diskretna matematika

Vježbe 10

22.05.2018

predavač: Snježana Majstorović

asistent: SM

Osnove teorije grafova

Definicija 1

Graf G je uređena trojka $G = (V, E, \varphi)$ gdje je $V = V(G) \neq \emptyset$ skup vrhova, $E = E(G)$ skup bridova disjunktan s V, a φ je funkcija incidencije, tj. funckija koja svakom bridu e pridružuje 2-člani podskup (ne nužno različitih) vrhova u i v koji se zovu krajevi od e: $\varphi(e) = \{u, v\}$

- kažemo još da su vrhovi u i v incidentni s e, tj. da su u i v susjedni i pišemo: $u \sim_e v$ ili $e = uv$
- graf G je konačan ako su V i E konačni skupovi, a inače je beskonačan

Osnove teorije grafova

Definicija 1

Graf G je uređena trojka $G = (V, E, \varphi)$ gdje je $V = V(G) \neq \emptyset$ skup vrhova, $E = E(G)$ skup bridova disjunktan s V, a φ je funkcija incidencije, tj. funckija koja svakom bridu e pridružuje 2-člani podskup (ne nužno različitih) vrhova u i v koji se zovu krajevi od e: $\varphi(e) = \{u, v\}$

- kažemo još da su vrhovi u i v incidentni s e, tj. da su u i v susjedni i pišemo: $u \sim_e v$ ili $e = uv$
- graf G je konačan ako su V i E konačni skupovi, a inače je beskonačan

Osnove teorije grafova

Definicija 1

Graf G *je uređena trojka* $G = (V, E, \varphi)$ *gdje je* $V = V(G) \neq \emptyset$ *skup vrhova,* $E = E(G)$ *skup bridova disjunktan s* V*, a* φ *je funkcija incidencije, tj. funckija koja svakom bridu* e *pridružuje* 2*-člani podskup (ne nužno različitih) vrhova* u *i* v *koji se zovu krajevi od* e*:* $\varphi(e) = \{u, v\}$

- kažemo još da su vrhovi u i v incidentni s e, tj. da su u i v susjedni i pišemo: $u \sim_e v$ ili $e = uv$
- graf G je konačan ako su V i E konačni skupovi, a inače je beskonačan

Osnove teorije grafova

Definicija 2

Grafovi G i H su izomorfni, $G \cong H$, ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\varphi : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s $\varphi(e)$ u H. Uređeni par (θ, φ) zovemo IZOMORFIZAM sa G u H.

- izomorfizam čuva incidenciju i susjednost
- brid čiji se krajevi podudaraju zove se **petlja**, a ako su krajevi različiti - **pravi brid** (ili **karika**)
- dva ili više bridova s istim parom krajeva zovu se višestruki bridovi

Osnove teorije grafova

Definicija 2

Grafovi G i H su izomorfni, $G \cong H$, ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\varphi : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s $\varphi(e)$ u H. Uređeni par (θ, φ) zovemo IZOMORFIZAM sa G u H.

- izomorfizam čuva incidenciju i susjednost
- brid čiji se krajevi podudaraju zove se **petlja**, a ako su krajevi različiti - **pravi brid** (ili **karika**)
- dva ili više bridova s istim parom krajeva zovu se višestruki bridovi

Osnove teorije grafova

Definicija 2

Grafovi G i H su izomorfni, $G \cong H$, ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\varphi : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s $\varphi(e)$ u H. Uređeni par (θ, φ) zovemo IZOMORFIZAM sa G u H.

- izomorfizam čuva incidenciju i susjednost
- brid čiji se krajevi podudaraju zove se **petlja**, a ako su krajevi različiti - **pravi brid** (ili **karika**)
- dva ili više bridova s istim parom krajeva zovu se višestruki bridovi

Osnove teorije grafova

Definicija 2

Grafovi G i H su izomorfni, $G \cong H$, ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\varphi : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s $\varphi(e)$ u H. Uređeni par (θ, φ) zovemo IZOMORFIZAM sa G u H.

- izomorfizam čuva incidenciju i susjednost
- brid čiji se krajevi podudaraju zove se **petlja**, a ako su krajevi različiti - **pravi brid** (ili **karika**)
- dva ili više bridova s istim parom krajeva zovu se višestruki bridovi

Osnove teorije grafova

- graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova
- graf s jednim vrhom - trivijalan, a inače netrivijalan
- G je prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$
- proučavati ćemo samo konačne grafove, a dva osnovna parametra vezana za konačne grafove su:
  - $n = |V(G)|$ - **red** od G (broj vrhova od G),
  - $m = |E(G)|$ - **veličina** od G (broj bridova od G).

Osnove teorije grafova

- graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova
- graf s jednim vrhom - trivijalan, a inače netrivijalan
- G je prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$
- proučavati ćemo samo konačne grafove, a dva osnovna parametra vezana za konačne grafove su:
  - $n = |V(G)|$ - **red** od G (broj vrhova od G),
  - $m = |E(G)|$ - **veličina** od G (broj bridova od G).

Osnove teorije grafova

- graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova
- graf s jednim vrhom - trivijalan, a inače netrivijalan
- G je prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$
- proučavati ćemo samo konačne grafove, a dva osnovna parametra vezana za konačne grafove su:
  - $n = |V(G)|$ - **red** od G (broj vrhova od G),
  - $m = |E(G)|$ - **veličina** od G (broj bridova od G).

Osnove teorije grafova

- graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova
- graf s jednim vrhom - trivijalan, a inače netrivijalan
- G je prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$
- proučavati ćemo samo konačne grafove, a dva osnovna parametra vezana za konačne grafove su:
  - $n = |V(G)|$ - **red** od G (broj vrhova od G),
  - $m = |E(G)|$ - **veličina** od G (broj bridova od G).

Osnove teorije grafova

- graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova
- graf s jednim vrhom - trivijalan, a inače netrivijalan
- G je prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$
- proučavati ćemo samo konačne grafove, a dva osnovna parametra vezana za konačne grafove su:
  - $n = |V(G)|$ - **red** od G (broj vrhova od G),
  - $m = |E(G)|$ - **veličina** od G (broj bridova od G).

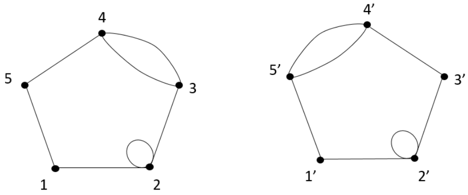
Osnove teorije grafova

- graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova
- graf s jednim vrhom - trivijalan, a inače netrivijalan
- G je prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$
- proučavati ćemo samo konačne grafove, a dva osnovna parametra vezana za konačne grafove su:
    - $n = |V(G)|$ - **red** od G (broj vrhova od G),
    - $m = |E(G)|$ - **veličina** od G (broj bridova od G).

Osnove teorije grafova

Zadatak 1

Dokažite da sljedeći grafovi nisu izomorfni:



Osnove teorije grafova

Zadatak 2

Nađite sve neizomorfne jednostavne grafove s 4 vrha. Koliko ih je? Koliko je jednostavnih grafova s n vrhova?

Zadatak 3

Koliko je grafova čiji je skup vrhova $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a imaju točno m bridova?

Osnove teorije grafova

Zadatak 2

Nađite sve neizomorfne jednostavne grafove s 4 vrha. Koliko ih je? Koliko je jednostavnih grafova s n vrhova?

Zadatak 3

Koliko je grafova čiji je skup vrhova $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a imaju točno m bridova?

Osnove teorije grafova

Definicija 3

***Potpun graf** je jednostavan graf u kojem su svaka dva vrha spojena bridom.*

- postoji do na izomorfizam jedinstven potpun graf s n vrhova (i $\binom{n}{2}$ bridova) i označavamo ga s K_n

Osnove teorije grafova

Definicija 3

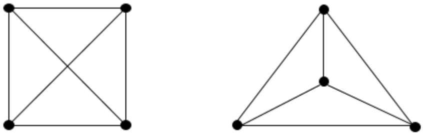
Potpun graf *je jednostavan graf u kojem su svaka dva vrha spojena bridom.*

- postoji do na izomorfizam jedinstven potpun graf s n vrhova (i $\binom{n}{2}$ bridova) i označavamo ga s K_n

Osnove teorije grafova

Zadatak 4

Dokažite izomorfnost grafova sa slike:



Osnove teorije grafova

Definicija 4

*Graf G je **bipartitan** (ili dvodijelni) ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particija (X, Y) zove se **biparticija grafa** G.*

Definicija 5

Potpun bipartitan graf je jednostavan bipartitan graf s biparticijom (X, Y) u kojem je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom iz Y. Ako je $|X| = m, |Y| = n$, takav je graf jedinstven do na izomorfizam i označavamo ga s $K_{m,n}$. Vrijedi $V(K_{m,n}) = m + n$ i $E(K_{m,n}) = m \cdot n$.

Osnove teorije grafova

Definicija 4

*Graf G je **bipartitan** (ili dvodijelni) ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particija (X, Y) zove se **biparticija grafa** G.*

Definicija 5

Potpun bipartitan graf je jednostavan bipartitan graf s biparticijom (X, Y) u kojem je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom iz Y. Ako je $|X| = m, |Y| = n$, takav je graf jedinstven do na izomorfizam i označavamo ga s $K_{m,n}$. Vrijedi $V(K_{m,n}) = m + n$ i $E(K_{m,n}) = m \cdot n$.

Osnove teorije grafova

Zadatak 5

Dokažite: ako je G jednostavan bipartitan graf, tada je $|E(G)| \leq \dfrac{|V(G)|^2}{4}$. *Za koje bipartitne grafove vrijedi jednakost?*

Osnove teorije grafova

- dva važna primjera jednostavnih grafova su **ciklusi** i **putovi**

Definicija 6

Ciklus C_n s n vrhova definiramo skupom vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ i skupom bridova $E = \{\{i, i+1\} : i < n\} \cup \{1, n\}$, a put P_n s n vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ima bridove $E = \{\{i, i+1\} : i < n\}$.

Osnove teorije grafova

- dva važna primjera jednostavnih grafova su **ciklusi** i **putovi**

Definicija 6

Ciklus C_n *s* n *vrhova definiramo skupom vrhova* $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ *i skupom bridova* $E = \{\{i, i+1\} : i < n\} \cup \{1, n\}$*, a put* P_n *s* n *vrhova* $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ *ima bridove* $E = \{\{i, i+1\} : i < n\}$*.*

Osnove teorije grafova

Definicija 7

Neka je G graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ u nekom poretku i bridovima $e_1, e_2, \ldots, e_m$ u nekom poretku. Matrica susjedstva grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju v_i i v_j.

- matrica ovisi o odabranom poretku vrhova
- A je simetrična matrica čiji su članovi nenegativni cijeli brojevi
- ako je graf jednostavan, onda je $a_{ij} = 0$ ili 1 $\forall i, j$, i obratno
- kako je A simetrična matrica, ona ima n realnih svojstvenih vrijednosti, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$
- ako je graf G jednostavan, onda je $tr\, A = 0$, tj. $\displaystyle\sum_{i=1}^{|V(G)|} \lambda_i = 0$

Osnove teorije grafova

Definicija 7

Neka je G graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ u nekom poretku i bridovima $e_1, e_2, \ldots, e_m$ u nekom poretku. Matrica susjedstva grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju v_i i v_j.

- matrica ovisi o odabranom poretku vrhova
- A je simetrična matrica čiji su članovi nenegativni cijeli brojevi
- ako je graf jednostavan, onda je $a_{ij} = 0$ ili 1 $\forall i, j$, i obratno
- kako je A simetrična matrica, ona ima n realnih svojstvenih vrijednosti, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$
- ako je graf G jednostavan, onda je $tr A = 0$, tj. $\sum_{i=1}^{|V(G)|} \lambda_i = 0$

Osnove teorije grafova

Definicija 7

Neka je G graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ u nekom poretku i bridovima $e_1, e_2, \ldots, e_m$ u nekom poretku. Matrica susjedstva grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju v_i i v_j.

- matrica ovisi o odabranom poretku vrhova
- A je simetrična matrica čiji su članovi nenegativni cijeli brojevi
- ako je graf jednostavan, onda je $a_{ij} = 0$ ili $1\ \forall i, j$, i obratno
- kako je A simetrična matrica, ona ima n realnih svojstvenih vrijednosti, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$
- ako je graf G jednostavan, onda je $tr A = 0$, tj. $\displaystyle\sum_{i=1}^{|V(G)|} \lambda_i = 0$

Osnove teorije grafova

Definicija 7

Neka je G graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ u nekom poretku i bridovima $e_1, e_2, \ldots, e_m$ u nekom poretku. Matrica susjedstva grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju v_i i v_j.

- matrica ovisi o odabranom poretku vrhova
- A je simetrična matrica čiji su članovi nenegativni cijeli brojevi
- ako je graf jednostavan, onda je $a_{ij} = 0$ ili $1 \; \forall i, j$, i obratno
- kako je A simetrična matrica, ona ima n realnih svojstvenih vrijednosti, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$
- ako je graf G jednostavan, onda je $trA = 0$, tj. $\sum_{i=1}^{|V(G)|} \lambda_i = 0$

Osnove teorije grafova

Definicija 7

Neka je G graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ u nekom poretku i bridovima $e_1, e_2, \ldots, e_m$ u nekom poretku. Matrica susjedstva grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju v_i i v_j.

- matrica ovisi o odabranom poretku vrhova
- A je simetrična matrica čiji su članovi nenegativni cijeli brojevi
- ako je graf jednostavan, onda je $a_{ij} = 0$ ili $1\ \forall i, j$, i obratno
- kako je A simetrična matrica, ona ima n realnih svojstvenih vrijednosti, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$
- ako je graf G jednostavan, onda je $tr A = 0$, tj. $\displaystyle\sum_{i=1}^{|V(G)|} \lambda_i = 0$

Osnove teorije grafova

Definicija 7

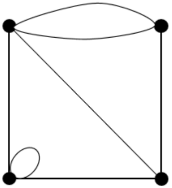
Neka je G graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ u nekom poretku i bridovima $e_1, e_2, \ldots, e_m$ u nekom poretku. Matrica susjedstva grafa G je kvadratna $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju v_i i v_j.

- matrica ovisi o odabranom poretku vrhova
- A je simetrična matrica čiji su članovi nenegativni cijeli brojevi
- ako je graf jednostavan, onda je $a_{ij} = 0$ ili $1\ \forall i, j$, i obratno
- kako je A simetrična matrica, ona ima n realnih svojstvenih vrijednosti, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$
- ako je graf G jednostavan, onda je $trA = 0$, tj. $\displaystyle\sum_{i=1}^{|V(G)|} \lambda_i = 0$

Osnove teorije grafova

Zadatak 6

Odredite matricu susjedstva sljedećeg grafa:



Osnove teorije grafova

Zadatak 7

Nacrtajte graf čija je matrica susjedstva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Osnove teorije grafova

Definicija 8

Za jednostavan graf G stupanj $d(v)$ vrha $v \in V(G)$ definiramo kao broj susjeda od v. Općenito, u proizvoljnom grafu G stupanj od v definiramo kao ukupan broj bridova od G incidentnih s v, pri čemu svaku petlju računamo kao dva brida.

- minimalan stupanj grafa: $\delta := \min\limits_{v \in V(G)} d(v)$
- maksimalan stupanj grafa: $\Delta := \max\limits_{v \in V(G)} d(v)$

Osnove teorije grafova

Definicija 8

Za jednostavan graf G stupanj $d(v)$ vrha $v \in V(G)$ definiramo kao broj susjeda od v. Općenito, u proizvoljnom grafu G stupanj od v definiramo kao ukupan broj bridova od G incidentnih s v, pri čemu svaku petlju računamo kao dva brida.

- minimalan stupanj grafa: $\delta := \min_{v \in V(G)} d(v)$
- maksimalan stupanj grafa: $\Delta := \max_{v \in V(G)} d(v)$

Osnove teorije grafova

Definicija 8

Za jednostavan graf G stupanj $d(v)$ vrha $v \in V(G)$ definiramo kao broj susjeda od v. Općenito, u proizvoljnom grafu G stupanj od v definiramo kao ukupan broj bridova od G incidentnih s v, pri čemu svaku petlju računamo kao dva brida.

- minimalan stupanj grafa: $\delta := \min\limits_{v \in V(G)} d(v)$
- maksimalan stupanj grafa: $\Delta := \max\limits_{v \in V(G)} d(v)$

Osnove teorije grafova

- graf G je k-regularan ako je $d(v) = k, \forall v \in V(G)$, a regularan ako je k-regularan za neki $k \geq 0$
- vrh v je izoliran ako je $d(v) = 0$, a list ako je $d(v) = 1$

Propozicija 9

U svakom je grafu $G = (V, E)$ zbroj stupnjeva svih vrhova jednak dvostrukom broju bridova, tj. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$.

Osnove teorije grafova

- graf G je k-regularan ako je $d(v) = k, \forall v \in V(G)$, a regularan ako je k-regularan za neki $k \geq 0$
- vrh v je izoliran ako je $d(v) = 0$, a list ako je $d(v) = 1$

Propozicija 9

U svakom je grafu $G = (V, E)$ zbroj stupnjeva svih vrhova jednak dvostrukom broju bridova, tj. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$.

Osnove teorije grafova

- graf G je k-regularan ako je $d(v) = k, \forall v \in V(G)$, a regularan ako je k-regularan za neki $k \geq 0$
- vrh v je izoliran ako je $d(v) = 0$, a list ako je $d(v) = 1$

Propozicija 9

U svakom je grafu $G = (V, E)$ zbroj stupnjeva svih vrhova jednak dvostrukom broju bridova, tj. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$.

Osnove teorije grafova

- graf G je k-regularan ako je $d(v) = k, \forall v \in V(G)$, a regularan ako je k-regularan za neki $k \geq 0$
- vrh v je izoliran ako je $d(v) = 0$, a list ako je $d(v) = 1$

Propozicija 9

U svakom je grafu $G = (V, E)$ zbroj stupnjeva svih vrhova jednak dvostrukom broju bridova, tj. $\displaystyle\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$.

Osnove teorije grafova

Zadatak 8

Graf n-kocka, u oznaci Q_n, je jednostavan graf čiji je skup vrhova $V = \{0,1\}^n$, a dva su vrha $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ spojena bridom ako i samo ako se razlikuju u točnoj jednoj koordinati. Pokažite:

i) Q_n *je* n*-regularan i bipartitan,*

ii) $|V(Q_n)| = 2^n, |E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$.

Osnove teorije grafova

Definicija 10

Komplementaran graf G^c jednostavnog grafa G je jednostavan graf s istim skupom vrhova kao i G, a dva vrha u G^c su spojena bridom akko nisu spojeni u G. Ako je $G \cong G^c$, kažemo da je G samokomplementaran.

Zadatak 9

Neka je G graf sa 6 vrhova. Dokažite da barem jedan od grafova G i G^c mora sadržavati trokut.

Osnove teorije grafova

Definicija 10

Komplementaran graf G^c jednostavnog grafa G je jednostavan graf s istim skupom vrhova kao i G, a dva vrha u G^c su spojena bridom akko nisu spojeni u G. Ako je $G \cong G^c$, kažemo da je G samokomplementaran.

Zadatak 9

Neka je G graf sa 6 vrhova. Dokažite da barem jedan od grafova G i G^c mora sadržavati trokut.

Osnove teorije grafova

Definicija 11

Niz stupnjeva grafa G je niz stupnjeva $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ svih vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pri čemu $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.

- izomorfni grafovi imaju iste nizove stupnjeva, odnosno dva grafa s različitim nizovima stupnjeva su neizomorfna
- grafovi s istim nizovima stupnjeva ne moraju biti izomorfni

Definicija 12

*Niz stupnjeva $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$,$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ je **grafički** ako postoji jednostavan graf čiji je niz stupnjeva d.*

Osnove teorije grafova

Definicija 11

Niz stupnjeva grafa G je niz stupnjeva $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ svih vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pri čemu $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.

- izomorfni grafovi imaju iste nizove stupnjeva, odnosno dva grafa s različitim nizovima stupnjeva su neizomorfna
- grafovi s istim nizovima stupnjeva ne moraju biti izomorfni

Definicija 12

*Niz stupnjeva $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$,$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ je **grafički** ako postoji jednostavan graf čiji je niz stupnjeva d.*

Osnove teorije grafova

Definicija 11

Niz stupnjeva grafa G je niz stupnjeva $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ svih vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pri čemu $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.

- izomorfni grafovi imaju iste nizove stupnjeva, odnosno dva grafa s različitim nizovima stupnjeva su neizomorfna
- grafovi s istim nizovima stupnjeva ne moraju biti izomorfni

Definicija 12

Niz stupnjeva $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$,$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ je ***grafički*** *ako postoji jednostavan graf čiji je niz stupnjeva d.*

Osnove teorije grafova

Definicija 11

Niz stupnjeva grafa G je niz stupnjeva $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ svih vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pri čemu $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.

- izomorfni grafovi imaju iste nizove stupnjeva, odnosno dva grafa s različitim nizovima stupnjeva su neizomorfna
- grafovi s istim nizovima stupnjeva ne moraju biti izomorfni

Definicija 12

Niz stupnjeva $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$,$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ je ***grafički*** *ako postoji jednostavan graf čiji je niz stupnjeva d.*

Osnove teorije grafova

Definicija 11

Niz stupnjeva grafa G je niz stupnjeva $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ svih vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pri čemu $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.

- izomorfni grafovi imaju iste nizove stupnjeva, odnosno dva grafa s različitim nizovima stupnjeva su neizomorfna
- grafovi s istim nizovima stupnjeva ne moraju biti izomorfni

Definicija 12

Niz stupnjeva $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$,$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ je ***grafički*** *ako postoji jednostavan graf čiji je niz stupnjeva d.*

Osnove teorije grafova

Propozicija 13

Niz $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *,* $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n, n \geq 2$ *je grafički akko je niz* $d' = (d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$ *grafički gdje je:*

$$d'_i = \begin{cases} d_i - 1, & 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i, & i > d_1 + 1 \end{cases}$$

Osnove teorije grafova

Zadatak 10

Dokažite da niz:

a) $(5, 5, 4, 3, 2, 1)$,

b) $(9, 8, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 1, 1)$

nije grafički.

Osnove teorije grafova

Zadatak 11

Postoji li jednostavan graf u kojemu svaka dva vrha imaju međusobno različite stupnjeve?

Zadatak 12

Neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skup od n točaka u ravnini takav da su svake dvije točke na udaljenosti barem 1. Dokažite da postoji najviše $3n$ parova točaka na udaljenosti točno 1.

Osnove teorije grafova

Zadatak 11

Postoji li jednostavan graf u kojemu svaka dva vrha imaju međusobno različite stupnjeve?

Zadatak 12

Neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *skup od* n *točaka u ravnini takav da su svake dvije točke na udaljenosti barem 1. Dokažite da postoji najviše* $3n$ *parova točaka na udaljenosti točno 1.*