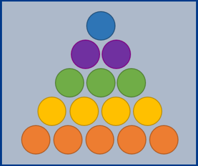

M102 Kombinatorna i diskretna matematika

Vježbe 11

22.05.2018

predavač: Snježana Majstorović | asistent: SM

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 1

Šetnja u grafu G je niz $W := v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$ čiji članovi su naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $1 \leq i \leq k$.

- u jednostavnom grafu šetnja je potpuno određena nizom svojih vrhova $v_0v_1 \dots v_k$
- v_0 je početak, a v_k kraj šetnje W, $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ unutarnji vrhovi šetnje, a broj k se zove duljina šetnje W

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 1

Šetnja u grafu G je niz $W := v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ čiji članovi su naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $1 \leq i \leq k$.

- u jednostavnom grafu šetnja je potpuno određena nizom svojih vrhova $v_0 v_1 \ldots v_k$
- v_0 je početak, a v_k kraj šetnje W, $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ unutarnji vrhovi šetnje, a broj k se zove duljina šetnje W

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 1

Šetnja u grafu G je niz $W := v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ čiji članovi su naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $1 \leq i \leq k$.

- u jednostavnom grafu šetnja je potpuno određena nizom svojih vrhova $v_0 v_1 \dots v_k$
- v_0 je početak, a v_k kraj šetnje W, $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ unutarnji vrhovi šetnje, a broj k se zove duljina šetnje W

Šetnje putevi i povezanost grafova

- ako je $W = v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$ i $W' = v_ke_{k+1} \dots e_lv_l$, tada je WW' šetnja dobivena nadovezivanjem
- inverzna šetnja W^{-1} se dobije obrnutim redoslijedom obilaska tj. $W^{-1} = v_ke_k \dots e_1v_0$
- W je zatvorena šetnja ako je $v_0 = v_k$

Definicija 2

Ako su bridovi $e_1, e_2, \dots, e_k$ šetnje W međusobno različiti tada se W zove ***staza****, a ako su na stazi i svi vrhovi $v_0, v_1, \dots, v_k$ međusobno različiti zove se* ***put****.*

- zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi, osim krajeva, međusobno različiti, zove se **ciklus**

Šetnje putevi i povezanost grafova

- ako je $W = v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ i $W' = v_k e_{k+1} \dots e_l v_l$, tada je WW' šetnja dobivena nadovezivanjem
- inverzna šetnja W^{-1} se dobije obrnutim redoslijedom obilaska tj. $W^{-1} = v_k e_k \dots e_1 v_0$
- W je zatvorena šetnja ako je $v_0 = v_k$

Definicija 2

*Ako su bridovi $e_1, e_2, \dots, e_k$ šetnje W međusobno različiti tada se W zove **staza**, a ako su na stazi i svi vrhovi $v_0, v_1, \dots, v_k$ međusobno različiti zove se **put**.*

- zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi, osim krajeva, međusobno različiti, zove se **ciklus**

Šetnje putevi i povezanost grafova

- ako je $W = v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$ i $W' = v_k e_{k+1} \ldots e_l v_l$, tada je WW' šetnja dobivena nadovezivanjem
- inverzna šetnja W^{-1} se dobije obrnutim redoslijedom obilaska tj. $W^{-1} = v_k e_k \ldots e_1 v_0$
- W je zatvorena šetnja ako je $v_0 = v_k$

Definicija 2

*Ako su bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ šetnje W međusobno različiti tada se W zove **staza**, a ako su na stazi i svi vrhovi $v_0, v_1, \ldots, v_k$ međusobno različiti zove se **put**.*

- zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi, osim krajeva, međusobno različiti, zove se **ciklus**

Šetnje putevi i povezanost grafova

- ako je $W = v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$ i $W' = v_k e_{k+1} \ldots e_l v_l$, tada je WW' šetnja dobivena nadovezivanjem
- inverzna šetnja W^{-1} se dobije obrnutim redoslijedom obilaska tj. $W^{-1} = v_k e_k \ldots e_1 v_0$
- W je zatvorena šetnja ako je $v_0 = v_k$

Definicija 2

*Ako su bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ šetnje W međusobno različiti tada se W zove **staza**, a ako su na stazi i svi vrhovi $v_0, v_1, \ldots, v_k$ međusobno različiti zove se **put**.*

- zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi, osim krajeva, međusobno različiti, zove se **ciklus**

Šetnje putevi i povezanost grafova

- ako je $W = v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ i $W' = v_k e_{k+1} \dots e_l v_l$, tada je WW' šetnja dobivena nadovezivanjem
- inverzna šetnja W^{-1} se dobije obrnutim redoslijedom obilaska tj. $W^{-1} = v_k e_k \dots e_1 v_0$
- W je zatvorena šetnja ako je $v_0 = v_k$

Definicija 2

*Ako su bridovi $e_1, e_2, \dots, e_k$ šetnje W međusobno različiti tada se W zove **staza**, a ako su na stazi i svi vrhovi $v_0, v_1, \dots, v_k$ međusobno različiti zove se **put**.*

- zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi, osim krajeva, međusobno različiti, zove se **ciklus**

Šetnje putevi i povezanost grafova

- ako je $W = v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$ i $W' = v_k e_{k+1} \ldots e_l v_l$, tada je WW' šetnja dobivena nadovezivanjem
- inverzna šetnja W^{-1} se dobije obrnutim redoslijedom obilaska tj. $W^{-1} = v_k e_k \ldots e_1 v_0$
- W je zatvorena šetnja ako je $v_0 = v_k$

Definicija 2

*Ako su bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ šetnje W međusobno različiti tada se W zove **staza**, a ako su na stazi i svi vrhovi $v_0, v_1, \ldots, v_k$ međusobno različiti zove se **put**.*

- zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi, osim krajeva, međusobno različiti, zove se **ciklus**

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 3

Dva vrha u i v grafa G su povezana ako postoji (u, v)- put u G.

- smatramo da uvijek imamo trivijalan (u, u)- put

Definicija 4

Udaljenost $d(u, v)$ dvaju vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg (u, v)- puta u G.

- ako nema puta u G koji spaja u i v stavljamo $d(u, v) = \infty$.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 3

Dva vrha u i v grafa G su povezana ako postoji (u, v)- put u G.

- smatramo da uvijek imamo trivijalan (u, u)- put

Definicija 4

Udaljenost $d(u, v)$ dvaju vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg (u, v)- puta u G.

- ako nema puta u G koji spaja u i v stavljamo $d(u, v) = \infty$.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 3

Dva vrha u i v grafa G su povezana ako postoji (u, v)- put u G.

- smatramo da uvijek imamo trivijalan (u, u)- put

Definicija 4

Udaljenost $d(u, v)$ dvaju vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg (u, v)- puta u G.

- ako nema puta u G koji spaja u i v stavljamo $d(u, v) = \infty$.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 3

Dva vrha u i v grafa G su povezana ako postoji (u, v)- put u G.

- smatramo da uvijek imamo trivijalan (u, u)- put

Definicija 4

Udaljenost $d(u, v)$ dvaju vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg (u, v)- puta u G.

- ako nema puta u G koji spaja u i v stavljamo $d(u, v) = \infty$.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 3

Dva vrha u i v grafa G su povezana ako postoji (u, v)- put u G.

- smatramo da uvijek imamo trivijalan (u, u)- put

Definicija 4

Udaljenost $d(u, v)$ dvaju vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg (u, v)- puta u G.

- ako nema puta u G koji spaja u i v stavljamo $d(u, v) = \infty$.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 5

Dijametar grafa G u oznaci $\mathrm{diam}\, G$ je maksimalna udaljenost među njegovim bridovima, tj. to je duljina puta maksimalne duljine u G.

Definicija 6

Struk je duljina najkraćeg ciklusa u grafu.

- ciklus je paran ako je parne duljine, a inače je neparan

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 5

Dijametar grafa G u oznaci $\mathrm{diam}\, G$ je maksimalna udaljenost među njegovim bridovima, tj. to je duljina puta maksimalne duljine u G.

Definicija 6

Struk je duljina najkraćeg ciklusa u grafu.

- ciklus je paran ako je parne duljine, a inače je neparan

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 5

Dijametar grafa G u oznaci $\operatorname{diam} G$ je maksimalna udaljenost među njegovim bridovima, tj. to je duljina puta maksimalne duljine u G.

Definicija 6

Struk je duljina najkraćeg ciklusa u grafu.

- ciklus je paran ako je parne duljine, a inače je neparan

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 1

Neka je G jednostavan graf dijametra 2, takav da vrijedi $\Delta(G) = |V(G)| - 2$. Dokažite da je tada $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 4$.

Zadatak 2

Neka je G k-regularan graf struka 4. Tada je $|V(G)| \geq 2k$ i postoji (do na izomorfizam) točno jedan takav graf s $2k$ vrhova.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 1

Neka je G jednostavan graf dijametra 2, takav da vrijedi $\Delta(G) = |V(G)| - 2$. Dokažite da je tada $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 4$.

Zadatak 2

Neka je G k-regularan graf struka 4. Tada je $|V(G)| \geq 2k$ i postoji (do na izomorfizam) točno jedan takav graf s $2k$ vrhova.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 7

Graf G je povezan ako su mu svaka dva vrha povezana putom. Komponenta povezanosti grafa G je maksimalan povezan podgraf od G.

- povezanost je relacija ekvivalencije među vrhovima: klase su komponente povezanosti
- ako graf ima samo jednu komponentu povezanosti od G, onda je povezan (inače je nepovezan)
- broj komponenti povezanosti od G označavamo s $c(G)$

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 7

Graf G je povezan ako su mu svaka dva vrha povezana putom. Komponenta povezanosti grafa G je maksimalan povezan podgraf od G.

- povezanost je relacija ekvivalencije među vrhovima: klase su komponente povezanosti
- ako graf ima samo jednu komponentu povezanosti od G, onda je povezan (inače je nepovezan)
- broj komponenti povezanosti od G označavamo s $c(G)$

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 7

Graf G je povezan ako su mu svaka dva vrha povezana putom. Komponenta povezanosti grafa G je maksimalan povezan podgraf od G.

- povezanost je relacija ekvivalencije među vrhovima: klase su komponente povezanosti
- ako graf ima samo jednu komponentu povezanosti od G, onda je povezan (inače je nepovezan)
- broj komponenti povezanosti od G označavamo s $c(G)$

Šetnje putevi i povezanost grafova

Definicija 7

Graf G je povezan ako su mu svaka dva vrha povezana putom.
Komponenta povezanosti grafa G je maksimalan povezan podgraf od G.

- povezanost je relacija ekvivalencije među vrhovima: klase su komponente povezanosti
- ako graf ima samo jednu komponentu povezanosti od G, onda je povezan (inače je nepovezan)
- broj komponenti povezanosti od G označavamo s $c(G)$

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 3

Dokažite da je $c(G) + |E(G)| \geq |V(G)|$.

Zadatak 4

Ako je G nepovezan graf, onda je G^C *povezan. Dokažite!*

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 3

Dokažite da je $c(G) + |E(G)| \geq |V(G)|$.

Zadatak 4

Ako je G nepovezan graf, onda je G^C *povezan. Dokažite!*

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 5

Pokažite: ako je G jednostavan graf i $|E(G)| > \binom{|V(G)|-1}{2}$, *tada je G povezan.*

Zadatak 6

Dokažite: ako je G jednostavan graf i $\delta(G) > \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor - 1$, *onda je on i povezan.*

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 5

Pokažite: ako je G jednostavan graf i $|E(G)| > \binom{|V(G)|-1}{2}$*, tada je G povezan.*

Zadatak 6

Dokažite: ako je G jednostavan graf i $\delta(G) > \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor - 1$*, onda je on i povezan.*

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 7

Neka je G povezan graf. Dokažite da bilo koja dva puta maksimalne duljine u G imaju barem jedan zajednički vrh.

Šetnje putevi i povezanost grafova

Propozicija 8

Neka je $A = [a_{ij}]$ *matrica susjedstva grafa* G. *Tada je* (i, j)*-ti član* l*-te potencije* A^l *jednak broju* (v_i, v_j) *šetnji u* G *duljine* l. *Stoga je broj svih šetnji na* G *duljine* l *jednak sumi svih članova od* A^l.

- Uočimo: $d(v_i, v_j) = \min\left\{k \in \mathbb{N} : a_{ij}^{(k)} \neq 0\right\}$

Šetnje putevi i povezanost grafova

Propozicija 8

Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa G. Tada je (i, j)-ti član l-te potencije A^l jednak broju (v_i, v_j) šetnji u G duljine l. Stoga je broj svih šetnji na G duljine l jednak sumi svih članova od A^l.

- Uočimo: $d(v_i, v_j) = \min\left\{k \in \mathbb{N} : a_{ij}^{(k)\neq 0}\right\}$

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 8

Odredite sve grafove sa n vrhova kojima je matrica susjedstva A nilpotentna tj. $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Zadatak 9

a) *Dokažite da za svaku šumu G vrijedi $|E(G)|-|V(G)|+c(G) = 0$.*

b) *Ako za graf G vrijedi $|E(G)| \geq |V(G)|$, onda graf sadrži ciklus. Dokažite.*

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 8

Odredite sve grafove sa n vrhova kojima je matrica susjedstva A nilpotentna tj. $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Zadatak 9

a) *Dokažite da za svaku šumu G vrijedi $|E(G)| - |V(G)| + c(G) = 0$.*

b) *Ako za graf G vrijedi $|E(G)| \geq |V(G)|$, onda graf sadrži ciklus. Dokažite.*

Šetnje putevi i povezanost grafova

Zadatak 8

Odredite sve grafove sa n vrhova kojima je matrica susjedstva A nilpotentna tj. $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Zadatak 9

a) *Dokažite da za svaku šumu G vrijedi $|E(G)| - |V(G)| + c(G) = 0$.*

b) *Ako za graf G vrijedi $|E(G)| \geq |V(G)|$, onda graf sadrži ciklus. Dokažite.*