

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
25. rujna 2018.

Pismeni ispit iz Kombinatorne i diskretne matematike

Zadatak 1. (20 bodova)

Neka je a_1, a_2, \dots, a_n niz prvih n prirodnih brojeva u proizvoljnom poretku. Dokažite da ako je n neparan, tada je $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ paran broj.

Zadatak 2. (20 bodova)

Deset se putnika raspoređuje u pet redova od kojih svaki ima dva mjesta, jedno do prozora i jedno uz prolaz. Na koliko načina se mogu rasporediti ako četvorica žele sjediti uz prozor, trojica uz prolaz, a preostaloj trojici je svejedno gdje sjede ?

Zadatak 3. (20 bodova)

- Koliko je dijagonalnih matrica reda n koje na glavnoj dijagonali sadrže nenegativne cijele brojeve, a čiji je trag jednak $4n$?
- Koliko je dijagonalnih matrica reda n kojima je točno k dijagonalnih elemenata jednako nula, ostali dijagonalni elementi su prirodni brojevi, a trag matrice je $4n$?

Zadatak 4. (20 bodova)

Riješite rekurziju:

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 2^n, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Zadatak 5. (20 bodova)

Neka je G jednostavan graf s $n \geq 3$ vrhova i neka u njemu vrijedi da suma stupnjeva svaka dva nesusjedna vrha iznosi najmanje $n - 1$. Dokažite da je G povezan!