

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
27. lipnja 2018.

Pismeni ispit iz Kombinatorne i diskretne matematike

Zadatak 1. (20 bodova)

Neka je S skup od n proizvoljno odabranih prirodnih brojeva. Pokažite da postoji podskup od S takav da mu je suma elemenata višekratnik od n .

Zadatak 2. (20 bodova)

Zrakoplov Airbus A380 iskrcao je 55×10 putnika u jednoj zračnoj luci koristeći samohodne stepenice. Po izlasku iz zrakoplova, putnici se trebaju rasporediti u 7 autobusa kao bi sigurno stigli u putničku zgradu. Odredite funkciju izvodnicu za broj načina na koji se putnici mogu smjestiti u autobuse ako u jedan autobus stane najviše 8×10 putnika, u drugi stane najviše 9×10 putnika, a u ostalih pet se može smjestiti najviše 10×10 putnika. Pretpostavimo da će u svakom autobusu biti smješteno najmanje 6×10 putnika. Pri rješavanju zadatka, a radi jednostavnosti, koristite *br. putnika* $\times 10$.

Zadatak 3. (20 bodova)

Riješite rekurziju:

$$a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 3^n, \quad a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$$

Zadatak 4. (20 bodova)

Dokažite ili opovrgnite:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{3^k} = n \cdot 4^{n-2} \cdot 3^{1-n} \cdot \left(\frac{n}{3} + 1\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 5. (20 bodova)

a) Nacrtajte graf G čija je matrica susjedstva

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Grafu G odredite niz stupnjeva, dijametar i struk.

b) Dokažite da G nije bipartitan, a zatim uklonite najmanji broj bridova tako da novi graf bude bipartitan te ga nacrtajte.

c) Dokažite da grafu G ne možemo odrediti komplement, a zatim uklonite najmanji broj bridova tako da dobijete novi graf H kojemu možete odrediti komplement. Nacrtajte graf H i njegov komplement.