

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku  
20. rujna 2016.

**Pismeni ispit iz Kombinatorne i diskretne matematike**  
Ak. god. 2015./2016.

**Zadatak 1** [20b]

Neka je  $G$  jednostavan graf s  $n$  vrhova. Ako svaki vrh u  $G$  ima stupanj barem  $\frac{n-1}{2}$ , onda je  $G$  povezan. Dokažite!

**Zadatak 2** [20b]

Koliko je matrica dimenzije  $m \times n$  popunjenih brojevima 0 i 1 koje u svakom retku i stupcu imaju paran broj jedinica?

**Zadatak 3** [20b]

Odredite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 123,$$

pri čemu je  $x_1 \geq 3$ ,  $1 \leq x_2 \leq 10$ , a  $x_3$  je nenegativan i paran.

**Zadatak 4** [20b] Dokažite da za sve prirodne brojeve  $m < n$  vrijedi jednakost

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0.$$

**Zadatak 5** [20b]

a) Koju rekursivnu relaciju (uz zadane početne uvjete) moraju zadovoljavati brojevi  $a_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , da bi red potencija  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  bio razvoj funkcije izvodnice

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}?$$

b) Riješite rekurziju

$$a_n a_{n-3} = a_{n-2} a_{n-1}$$

uz početne uvjete  $a_0 = a_1 = 1$  i  $a_2 = 2$ .