

Prva kontrolna zadaća iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Ak. god. 2016./2017.

Zadatak 1 (15 bodova) U blizini kopnene naftne bušotine na jednom slavonskom polju došlo je do onečišćenja tla. Rub onečišćenog dijela polja može se aproksimirati krivuljom

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0.$$

Dežurni zaposlenik odlučio je ograditi taj dio polja kako bi zaštitio divlje životinje od trovanja. Planira napraviti kružnu ogradu sa središtem u točki $(1, 1)$. Odredite polumjer najmanje kružne ograde koja će obuhvatiti onečišćeni dio polja.

Zadatak 2 (15 bodova) Proizvođač tableta planira plasirati na tržište svoj najnoviji model po cijeni od 850 kuna, te procjenjuje da ako utroši y tisuća kuna na proizvodnju, a x tisuća kuna na promociju, moći će prodati otprilike

$$60x^{1/3}y^{2/3}$$

komada. Trošak proizvodnje je 250 kuna po komadu. Ako proizvođač planira potrošiti 120000 kn na proizvodnju i promociju, kako će rasporediti taj novac kako bi ostvario maksimalan profit?

Zadatak 3 (15 bodova) Je li ravnu pločicu čiji je rub elipsa $x^2 + 4y^2 = 16$ teže okretati oko osi OY ili oko osi OX ako joj je gustoća u proizvoljnoj točki proporcionalna sumi konstantne vrijednosti 3 i kvadrata udaljenosti do osi OX ? Dokažite svoju tvrdnju!

Zadatak 4 (10 bodova) Koristeći cilindričke koordinate napišite formule (tj. postavite integrale) za računanje centra mase $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tijela omeđenog valjkom $x^2 + y^2 = 1$, odozdo ravninom $z = 0$, a odozgo plohom $z = 4 - x^2 - y^2$. Gustoća tijela zadana je funkcijom

$$\rho(x, y, z) = e^{x^4 + y^4}.$$

Možete li bez računanja zaključiti nešto o vrijednostima određenih koordinata točke centra mase?

Zadatak 5 (15 bodova) Godine 2016. Lukas Irmeler hodao je po žici iznad Rheinfallsa, najvećeg vodopada u Europi koji se nalazi u Švicarskoj. Prilikom tog pothvata, Lukas je bio izložen djelovanju sile \vec{F} koja je nastala kao rezultat djelovanja gravitacijske sile i sile otpora zraka, a zadana je s

$$\vec{F} = \sin x \vec{i} + \cos y \vec{j} + (z - 10) \vec{k}.$$

a) Izračunajte rad koji je utrošio Lukas hodajući po žici zadanoj parametarski s

$$\vec{r}(t) = 5t \vec{i} + t \vec{j} + \left(30 - \frac{\sin t}{10}\right) \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

b) Postavite integral za računanje duljine žice \vec{r} .

c) Ukoliko bi Lukas bio izložen djelovanju nešto drugačije sile, zadane s

$$\vec{G} = (y - \sin x) \vec{i} + (2z + \cos y) \vec{j} + (z - 10) \vec{k},$$

bi li mu bilo lakše hodati po žici u odnosu na hod pod djelovanjem sile \vec{F} ?

Prva kontrolna zadaća iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II
Ak. god. 2016./2017.

Zadatak 1 (15 bodova) *Mirko planira izgraditi okrugli bazen u dvorištu svoje kuće. Obzirom da velik dio dvorišta zauzima ukrasni vrt, sjenica i roštilj, Mirku je na raspolaganju dio čiji se rub može aproksimirati krivuljom*

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 8 = 0.$$

Zbog činjenice da je najdulje izložen suncu onaj dio slobodne površine koji se nalazi oko točke (2, 0), Mirko želi da središte bazena bude upravo u toj točki. Koliki je polumjer najvećeg mogućeg bazena koji Mirko može izgraditi u svom dvorištu?

Zadatak 2 (15 bodova) *Proizvođač laserskih pisaača planira plasirati na tržište svoj najnoviji model po cijeni od 850 kuna, te procjenjuje da ako utroši x tisuća kuna na proizvodnju, a y tisuća kuna na promociju svog proizvoda, moći će prodati otprilike*

$$\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$$

komada printera. Trošak proizvodnje je 150 kuna po komadu. Ako proizvođač planira potrošiti 50000 kn na proizvodnju i promociju, kako će rasporediti taj novac kako bi ostvario maksimalan profit?

Zadatak 3 (15 bodova) *Odredite masu ravne pločice u obliku kruga $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ako joj je gustoća u svim točkama za koje je $x < 0$ proporcionalna udaljenosti od pravca $x = -2$, a u svim ostalim točkama je proporcionalna udaljenosti od pravca $x = 4$.*

Zadatak 4 (10 bodova) *Koristeći cilindričke koordinate napišite formule (tj. postavite sve integrale) za koordinate centra mase $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tijela omeđenog valjkom $x^2 + y^2 = 4$, odozdo ravninom $z = 0$, a odozgo plohom $z - 1 = x^2 + y^2$. Gustoća tijela zadana je funkcijom*

$$\rho(x, y, z) = 2^{x^2 y^2}.$$

Možete li bez računanja zaključiti nešto o vrijednostima određenih koordinata točke centra mase?

Zadatak 5 (15 bodova) *Brzina vjetra na Srednjem Jadranu opisana je vektorskim poljem*

$$\vec{v} = e^x \vec{i} + e^y \vec{j}.$$

Jedrilica plovi iz točke $(-3, -1)$ prema točki $(3, -1)$ po putu koji je zadan parametarski s

$$\vec{r}_1(t) = (-3 \cos t - \sin(2t))\vec{i} + (2 \sin t + 2 \cos(4t) - 3)\vec{j}.$$

Druga jedrilica plovi od točke $(-3, 0)$ prema točki $(3, 0)$ po putu koji je zadan parametarski s

$$\vec{r}_2(t) = -3 \cos t \vec{i} + 2 \sin(3t) \vec{j}.$$

- Postavite integral za računanje duljine puta \vec{r}_1 .*
- Koliko energije, odnosno rada će utrošiti jedna, a koliko druga jedrilica za plovidbu po danim putevima i koji put zahtijeva više energije, \vec{r}_1 ili \vec{r}_2 ?*
- Ako pretpostavimo da je brzina vjetra na putu \vec{r}_2 opisana poljem*

$$\vec{w} = (y+1)\vec{i},$$

hoće li jedrilica koja plovi po tom putu trebati manje ili više energije za plovidbu u odnosu na prvobitnu brzinu vjetra?