Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
03. prosinca 2015.

1. kontrolna zadaća iz Kombinatorike i diskretne matematike
Ak. god. 2015./2016.

Zadatak 1 [20b] *Neka je* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$ *skup od* 5 *prirodnih brojeva. Pokažite da za proizvoljnu permutaciju* $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}a_{i_5}$ *skupa* A *produkt*

$$(a_{i_1} - a_1)(a_{i_2} - a_2)(a_{i_3} - a_3)(a_{i_4} - a_4)(a_{i_5} - a_5)$$

je uvijek paran broj!

Zadatak 2 [20b]
a) Koliko je 4*-znamenkastih prirodnih brojeva kojima je prva znamenka strogo manja od preostale tri znamenke?*
b) Koliko je 6*-znamenkastih prirodnih brojeva koji imaju iste znamenke kao i broj* 324516 *te se sa njim podudaraju jedino u zadnjoj znamenki?*

Zadatak 3 [20b] 35 *redovitih studenata,* 6 *studenata ponavljača i* 9 *izvanrednih studenata pristupilo je pismenom ispitu. Obzirom da dvorana u kojoj studenti trebaju pisati ispit ima* 40 *sjededećih mjesta,* 10 *redova sa po* 4 *mjesta u svakom redu, dežurni profesor odlučio je ustupiti svoje sjedeće mjesto jednom studentu, a preostalih* 9 *studenata rasporediti u sobu za sastanke gdje se nalazi okrugli stol sa* 9 *sjedećih mjesta.*
Na koliko se načina studenti mogu rasporediti u dvije dvorane ako:
a) nema nikakvih dodatnih uvjeta
b) svi izvanredni studenti trebaju sjesti za okrugli stol, a jedan od ponavljača mora sjesti na profesorovo mjesto
c) izvanredni studenti trebaju sjesti u prva dva reda dvorane i na profesorovo mjesto, a ponavljači trebaju sjesti za okrugli stol jedan do drugoga?

Zadatak 4 [20b] *Neka je* $n \geq 3$ *prirodan broj. Označimo s* $\mathcal{M}_n$ *familiju svih cjelobrojnih dijagonalnih matrica reda* n *čiji je trag jednak* n^2.
a) Koliko je matrica iz $\mathcal{M}_n$ *kojima su svi dijagonalni elementi pozitivni?*
b) Koliko je matrica iz $\mathcal{M}_n$ *kojima su svi dijagonalni elementi nenegativni pri čemu je prvi i zadnji dijagonalni element veći od* 2*?*
c) Koliko je dijagonalnih matrica iz $\mathcal{M}_n$ *kojima je prvih* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *dijagonalnih elemenata pozitivno, a svi ostali dijagonalni elementi su jednaki nuli?*

Zadatak 5 [20b] *Dokažite da vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \cdot 2^{k+3} = 16 \cdot n \cdot 3^{n-1}.$$

Zadatak 6 [20b] *DODATNI ZADATAK:*
Zadan je skup A *s* $2n$ *elemenata,* $n \geq 1$*. Sparivanje je particija skupa* A *na dvočlane podskupove. Odredite koliko ima različitih sparivanja skupa* A *koji sadrži* $2n$ *elemenata?*

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
03. prosinca 2015.

1. kontrolna zadaća iz Kombinatorike i diskretne matematike
Ak. god. 2015./2016.

Zadatak 1 [20b] *Zadano je* 10 *složenih brojeva manjih od* 840*. Dokažite da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta!*

Zadatak 2 [20b]
a) Koliko je prirodnih brojeva strogo manjih od 10^n, $n \geq 1$, *koji sadrže barem jednu znamenku* 4 *?*
b) Koliko je 7*-znamenkastih prirodnih brojeva koji imaju iste znamenke kao i broj* 4913285 *i s njim se podudaraju jedino u središnjoj znamenci?*

Zadatak 3 [20b] *U dvorani za poslovne sastanke nalaze se dva okrugla stola, jedan sa* 4*, a drugi sa* 6 *sjedećih mjesta, dok se preostalih* 8 *sjedećih mjesta nalaze u nizu uz jedan zid dvorane.*
Na koliko načina u takvu dvoranu možemo smjestiti 11 *političara,* 6 *političarki i jednog zapisničara ako:*
a) nema nikakvih dodatnih uvjeta
b) za okruglim stolovima političari i političarke alterniraju
c) zapisničar mora sjesti uz zid, a za najvećim stolom moraju sjediti samo političari?

Zadatak 4 [20b] *U Kartezijevom koordinatnom sustavu prikazana je parabola* $y = x^2$*. Promatramo one tipove translacija zadane parabole prilikom kojih joj se tjeme preslika u neku točku iz skupa*

$$\{(2,0), (-2,2), (0,4), (1,1), (0,-2)\}.$$

Pretpostavimo da je ukupan broj dozvoljenih translacija jednak 25*. Na koliko načina možemo realizirati svih* 25 *translacija ako:*
a) slika barem jedne translacije mora biti parabola $y = (x-1)^2 + 1$
b) svi tipovi translacija realizirani su barem jednom
c) dozvoljene su samo translacije u vertikalnom smjeru?

Zadatak 5 [20b] *Dokažite da vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^{k+1} = 3^{n+1} - 1.$$

Zadatak 6 [20b] *DODATNI ZADATAK:*
Zadan je skup A *s* $2n$ *elemenata,* $n \geq 1$*. Sparivanje je particija skupa* A *na dvočlane podskupove. Odredite koliko ima različitih sparivanja skupa* A *koji sadrži* $2n$ *elemenata?*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$