Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
21. lipnja 2018.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. [20 bodova]
Temperatura okrugle ploče $x^2 + y^2 \leq 1$ opisana je funkcijom $T(x, y) = 16x^2 + 24x + 40y^2$. Odredite vrijednosti temperature u najhladnijim i najtoplijim točkama ploče. Jesu li te točke jedinstvene?

Zadatak 2. [15 bodova]
Odredite centar mase tijela omeđenog s $z = 2 - x^2 - y^2$ i $z = x^2 + y^2$, a čija je gustoća zadana s $\rho(x, y, z) = \pi$.

Zadatak 3. [15 bodova]
Izračunajte rad što ga obavlja sila $\vec{F}(x, y) = y^2\vec{i} + (\ln(x^2+y^2)+y^3)\vec{j}$ pomičući česticu po rubu polukružnog vijenca koji se nalazi iznad x-osi, a omeđen je s $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$. Pomicanje čestice po rubu je takvo da je područje uvijek s lijeve strane.

Zadatak 4. [10 bodova]
Postavite integral za računanje mase plohe $z = 2(x^2 + y^2)$ koja je odsječena ravninom $z = 8$, nalazi se u prvom oktantu, a gustoća joj je zadana funkcijom $\rho(x, y) = \frac{z+1}{x^2+y^2+1}$.

Zadatak 5. [15 bodova]
Riješite Dirichletov rubni problem

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \text{ na } & D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{3}x\} \\ u(x, y) = \pi, & y = \sqrt{3}x. \end{cases}$$

Zadatak 6. [15 bodova]
Znanstvenici promatraju populaciju zebri na staništu čiji je maksimalni kapacitet 800. Poznato je da je brzina rasta populacije zebri u nekom trenutku proporcionalna produktu broja zebri i razlike kapaciteta i broja zebri u tom trenutku. Na početku promatranja, znanstvenici su izbrojali ukupno 230 zebri, a 10 godina kasnije taj se broj udvostručio. Odredite koliko zebri će živjeti na tom staništu nakon 15 godina.

Zadatak 7. [10 bodova]
Izvedite jednadžbe prigušenih slobodnih oscilacija i obrazložite njihovu ovisnost o vremenu kada ono teži u beskonačno.