

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
28. siječnja 2019.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. [15 bodova]

Kojih dimenzija treba biti pravokutna kutija volumena 32 dm^3 da utrošak materijala za njenu konstrukciju bude minimalan ako je poznato da se kutija radi od tri različita materijala: cijena materijala za strane je $1 \text{ kn po } m^2$, za dno $3 \text{ kn po } m^2$, a za vrh $5 \text{ kn po } m^2$?

Zadatak 2. [15 bodova]

Matterhorn je planina u planinskom lancu Alpa na granici između Švicarske i Italije. Pretpostavimo da se visina te planine može opisati funkcijom $f(x, y) = 4000 - x^2 - y^2$ u prikladnim mjernim jedinicama. Tvrtno se nakon višesatnog planinarenja želi odmoriti pa se smjestio na visini $f(-10, 10)$ planine, a zatim želi krenuti dalje rutom koja se nalazi strogo jugoistočno od njegove trenutne pozicije. Hoće li se u tom smjeru Tvrtno početi penjati ili spuštati po planini?

Odredite vektor smjera najbržeg spusta s planine obzirom na trenutnu poziciju Tvrtna. Prema kojoj (glavnoj ili sporednoj) strani svijeta pokazuje taj vektor?

Zadatak 3. [15 bodova]

Homogena čelična žica savijena je u obliku krivulje $y = \frac{x^4}{4} + 1$ između točaka $x = 1$ i $x = 2$. Izračunajte moment tromosti žice obzirom na os OY .

Zadatak 4. [10 bodova]

Zadano je vektorsko polje $\vec{F}(x, y, z) = (yz + y \cos(xy))\vec{i} + (xz + x \cos(xy) + \frac{1}{y})\vec{j} + (xy + \frac{1}{z})\vec{k}$.

a) Ispitajte potencijalnost polja \vec{F} .

b) Kolika je divergencija polja \vec{F} u točki $(\pi, 1/2, 1)$?

Zadatak 5. [15 bodova]

Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - x - 1} dx.$$

Zadatak 6. [20 bodova]

Strujni krug sadrži kondenzator kapaciteta $C = 0.02F$, otpornik jakosti $R = 10 \Omega$ te generator koji proizvodi varijabilan napon $E(t) = t^2 e^{-5t} \text{ V}$. Količina naboja u trenutku $t = 0$ je nula. Odredite količinu naboja nakon 2 sekunde. Čemu će težiti količina naboja kada vrijeme ide u beskonačnost?

Sjetite se da u strujnom krugu s otporom R , količinom naboja Q , kapacitetom C i naponom E vrijedi Kirchhoffov zakon

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = E(t).$$

Zadatak 7. [10 bodova]

Izvedite rješenje jednadžbe prigušenih slobodnih oscilacija jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora.

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x^2} + x) + C.$$