

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
05. srpnja 2017.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. (15 bodova)

Tvrtko se nalazi u pustinji u točki $A = (-1, 1)$ potpuno iznemogao i dehidriran. Želi što prije stići do ostalih članova njegove ekspedicijske ekipe koja se nalazi u zaštićenom području pustinje u točki $B = (1, 1)$. Voda mu je prijeko potrebna i bez nje ne može doći do željenog odredišta. Stoga mora najprije doći do oaze u kojoj se nalazi malo jezerce čiji se rub može aproksimirati krivuljom $x^2 + 2y^2 = 1$. Količina napora koji Tvrtko mora uložiti da bi stigao od točke (x, y) do točke (u, v) može se mjeriti funkcijom $f(x, y) = (x - u)^2 + (y - v)^2$.

Nađite najmanje zahtjevan put od točke A do točke B preko točke $X = (x, y)$, koja se nalazi u oazi odmah uz jezero, tako da Tvrtko preživi svoj put do ostatka ekipe!

Zadatak 2. (15 bodova)

Visina planine opisana je funkcijom $f(x, y) = 100 - 0.4x^2 - 0.3y^2$.

a) Skijaš se nalazi na planini u točki $(1, 1)$. U kojem smjeru $\vec{v} = (a, b)$ se treba kretati ako želi skijati po putu najveće strmine?

b) Planinar se također nalazi u točki $(1, 1)$ i želi se spustiti niz planinu po putu čiji je smjer određen vektorom \vec{w} koji sa vektorom \vec{v} određenim u slučaju a) zatvara kut θ . Kolika je veličina kuta θ ako apsolutna vrijednost nagiba puta (usmjerene derivacije) nije veća od 0.5 ?

Zadatak 3. (15 bodova)

Fluid gustoće 870 kg/m^3 teče brzinom $\vec{v} = z\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$, pri čemu x, y i z mjerimo u metrima, a komponente brzine \vec{v} mjerimo u metrima po sekundi. Odredite tok fluida kroz valjkastu plohu $x^2 + y^2 = 4$, pri čemu $0 \leq z \leq 1$. Fluid teče "iznutra prema van".

Zadatak 4. (15 bodova)

Žica je savijena u obliku krivulje $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ između $x = 1$ i $x = 2$.

a) Odredite duljinu žice.

b) Kolika je masa žice ako joj je gustoća zadana funkcijom $\rho(x, y) = \frac{x}{2} + y$?

c) Kolika je prosječna gustoća žice?

Zadatak 5. (15 bodova)

Izvedite jednadžbu prisilnih neprigušenih oscilacija harmonijskog oscilatora uz uvjet da je frekvencija vanjske sile različita od vlastite frekvencije sustava.

Zadatak 6. (15 bodova)

Posuda sadrži 40 galona ($\approx 3,785 \text{ L}$) otopine koja sadrži 90 % vode i 10 % alkohola. Nova otopina sa jednakim udjelom vode i alkohola utječe u spremnik brzinom od 4 galona po minuti, miješa se sa postojećom otopinom i odmah izljuje istom brzinom. Odredite količinu alkohola izraženu u galonima koja se nalazi u posudi nakon 10 minuta.

Zadatak 7. (10 bodova)

Dokažite da Joukowski preslikavanje definirano s $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ preslikava kružnice sa središtem u ishodištu u elipse.