Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
05. srpnja 2016.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II
Ak. god. 2015./2016.

Zadatak 1 (15bod) *Tlocrt jednog malenog sela može se aproksimirati kvadratom površine* $4\,km^2$. *Ako pretpostavimo da je kvadrat smješten u ravnini tako da mu se središte podudara sa ishodištem Kartezijevog koordinatnog sustava, onda je nadmorska visina sela opisana funkcijom* $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$. *Odredite točke u kojima nadmorska visina sela dostiže ekstremne vrijednosti.*

Zadatak 2 (15bod) *Odredite srednju gustoću tijela koje je omeđeno valjkom* $x^2 + y^2 = 1$, *paraboloidom* $z = 1 - x^2 - y^2$ *i ravninom* $z = 4$. *Gustoća tijela u svakoj točki proporcionalna je udaljenosti te točke od osi valjka.*

Zadatak 3 (10 bod) *Rastavite vektorsko polje* $\vec{a} = xy^3\vec{i} + z^3y\vec{j} + z\vec{k}$ *na potencijalno i solenoidalno!*

Zadatak 4 (10 bod) *Pretpostavimo da je nadmorska visina brda dana funkcijom*

$$f(x,y) = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2.$$

Ako se planinar nalazi u točki $(60, 100)$, *u kojem smjeru će se najbrže spuštati niz brdo? Hoće li se u smjeru vektora* $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ *spuštati ili penjati ako se počne kretati iz točke* $(30, 50)$?

Zadatak 5 (10 bod) *Izvedite jednadžbu kontinuiteta za nestacionaran tok fluida brzine* $\vec{v}$ *i gustoće mase* ρ!

Zadatak 6 (15 bod) *Izračunajte* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4}\,dx.$

Zadatak 7 (10 bod)
a) Dokažite da ako funkcija P *zadovoljava logističku jednadžbu*

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right),$$

tada vrijedi

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right).$$

b) Dokažite da populacija najbrže raste kada dosegne polovicu svog biološkog maksimuma.

Zadatak 8 (15 bod) *Odredite količinu naboja u proizvoljnom trenutku* t *strujnog kruga ako je* $R = 40\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 16\cdot 10^{-4}\,F$, $E(t) = 100\cos(10t)$. *U trenutku* $t = 0$ *količina naboja jednaka je 0. Kirchhoffov zakon glasi*

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$