

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
09. lipnja 2017.

Drugi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II
Ak. god. 2016./2017.

Zadatak 1 (15 bodova) *Mirko planira izgraditi modernu nadstrešnicu za svoj novi automobil. Za pokrov nadstrešnice želi naručiti punu polikarbonatnu ploču koja će imati oblik plohe $z = 4 + x + y$ odsječene valjkom $x^2 + y^2 = 4$, a čija se gustoća može opisati funkcijom $\rho(x, y, z) = x^2z + y^2z$, mjerenoj u kg/m^3 . Obzirom da Mirko posjeduje materijal za izradu nosive konstrukcije nadstrešnice, te zna da takva konstrukcija može podnijeti jedino teret mase do $30\sqrt{3}\pi$ kg, ima li smisla naručiti ploču kakvu je zamislio?*

Zadatak 2 (10 bodova) *Kompleksni potencijal idealnog fluida zadan je s*

$$\omega(z) = \frac{a}{2}z^2 + az, \quad a > 0.$$

- (a) *Odredite kompleksnu brzinu $\vec{v}(z)$ te njen iznos u $z_0 = 2 + i$.*
(b) *Odredite potencijal i funkciju toka idealnog fluida.*
(c) *Odredite jednadžbe ekvipotencijalnih linija i strujnica te skicirajte nekoliko parova takvih krivulja za slučaj $a = 1$.*

Zadatak 3 (20 bodova) *Riješite Dirichletov rubni problem*

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \\ u(x, 0) = 2, & x < -2 \\ u(x, 0) = 0, & |x| < 2 \\ u(x, 0) = 1, & x > 2. \end{cases}$$

Zadatak 4 (15 bodova) *Populacija od 20 vukova smještena je u ograđeni dio šume Nacionalnog parka Plitvička jezera. Biolozi procjenjuju da na tom prostoru može obitavati najviše 200 vukova. Nakon 3 godine broj vukova se udvostručio. Ako znamo da je rast populacije vukova opisan Gompertzovim modelom*

$$\frac{dP}{dt} = c \cdot P \cdot \ln\left(\frac{M}{P}\right),$$

koliko vukova će biti nastanjeno na tom prostoru nakon 10 godina?

Zadatak 5 (10 bodova) *Ako na vertikalno pozicioniranu elastičnu oprugu s ugrađenim prigušivačem, čiji je koeficijent prigušenja jednak $200 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, objesimo tijelo mase 25 kg , opruga se rastegne za $2,5 \text{ m}$. Ako tijelo gurnemo iz ravnotežnog položaja početnom brzinom koja iznosi $\sqrt{12} \text{ m/s}$, kako izgleda funkcija pomaka tog tijela u ovisnosti o vremenu t ? Objasnite značenje svih parametara koji se pojavljuju u toj funkciji. Hoće li se tijelo s vremenom prestati gibati? Objasnite odgovor!*
NAPOMENA: Za gravitacijsku konstantu uzmite 10 m/s^2 .

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
09. lipnja 2017.

Drugi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II
Ak. god. 2016./2017.

Zadatak 1 (15 bodova) *Tvrtko želi naručiti modernu viseću fotelju, objesiti je o stablo u svom dvorištu i u njoj se povremeno odmoriti. Trgovac mu nudi fotelju izrađenu od tvrde plastike u obliku plohe $y = x^2 + z^2$ odsječene valjkom $x^2 + z^2 = 4$, a čija se gustoća može opisati funkcijom $\rho(x, y, z) = \frac{x+5}{5\sqrt{1+4y}}$, mjerenoj u kg/m^3 . Grana stabla može podnijeti teret mase najviše 120 kg, pri čemu je masa Tvrtka jednaka 100 kg. Je li fotelja koju mu nudi trgovac prikladna za Tvrtka?*

Zadatak 2 (10 bodova) *Kompleksni potencijal idealnog fluida zadan je s*

$$\omega(z) = z^2 + 2az, \quad a > 0.$$

- (a) *Odredite kompleksnu brzinu $\vec{v}(z)$ te njen iznos u $z_0 = 1 + i$.*
(b) *Odredite potencijal i funkciju toka idealnog fluida.*
(c) *Odredite jednadžbe ekvipotencijalnih linija i strujnica te skicirajte nekoliko parova takvih krivulja za slučaj $a = 1$.*

Zadatak 3 (20 bodova) *Riješite Dirichletov rubni problem*

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \\ u(0, y) = 4, & y < -1 \\ u(0, y) = 0, & |y| < 1 \\ u(0, y) = 1, & y > 2. \end{cases}$$

Zadatak 4 (15 bodova) *Nađite jakost struje u strujnom krugu nakon 0.1 minute ako baterija generira napon koji je zadan s $E(t) = 40 \sin(60t)$, induktivitet je konstantan i iznosi 1 H, a otpornik ima jakost 20 Ω . Prekidač je aktiviran u nultoj minuti. Jakost struje opisana je jednadžbom*

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$

Kolika je granična vrijednost struje kada vrijeme teži u beskonačnost?

Zadatak 5 (10 bodova) *Ako na vertikalno pozicioniranu elastičnu oprugu objesimo tijelo mase 0,1 kg, opruga se rastegne za 10 cm. Ako isto tijelo izvučemo za 6 cm od ravnotežnog položaja i pustimo ga nultom brzinom, kako izgleda funkcija pomaka tog tijela u ovisnosti o vremenu t ? Hoće li se tijelo s vremenom prestati gibati? Objasnite odgovor!*

NAPOMENA: Za gravitacijsku konstantu uzmite 10 m/s^2 .