Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
21. lipnja 2017.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. (15 bodova)
Svakoj točki $T = (x, y)$ u XOY ravnini možemo pridružiti trokut sa vrhovima $A = (0, 0)$, $B = (x, y)$ i $C = (y - 6x, 2x^2)$. Nađite sve točke ravnine čiji pridruženi trokut ima maksimalnu površinu. Koliko iznosi ta površina?

UPUTA: Površinu trokuta kao funkciju od x i y odredite pomoću formule

$$P = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||.$$

Zadatak 2. (15 bodova)
Neka su $\vec{F}$ i $\vec{G}$ vektorska polja klase C^1 nad $\mathbb{R}^3$. Dokažite ili opovrgnite:

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{G}).$$

Zadatak 3. (15 bodova)
Mirko naporno radi. Kada se vrati kući s posla, želi se odmoriti tako da se ponekad bezbrižno smjesti u ležaljku u svom dvorištu, zaštićen od jakog sunca i kiše. Mirko ne želi graditi terasu ili kupovati sjenicu, već traži neko jednostavnije rješenje. Stoga je na tavanu kuće pronašao dva platna, P_1 i P_2, jednakih dimenzija. Oba platna su četverokutnog oblika, izrađena su od više različitih tkanina i obojena sa više različitih boja pa nemaju jednolike gustoće. Mirko želi izabrati platno manje mase, raširiti ga iznad odabranog dijela dvorišta tako što će mu povezati sva četiri vrha za najčvršće grane stabla koje je zasađeno u neposrednoj blizini. U takvom položaju platno se može aproksimirati plohom $z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$, a natkriva pravokutno područje dimenzije $[1, 4]_x \times [2, 4]_y$. Ako je gustoća platna P_1 opisana funkcijom $\rho_1(x, y, z) = \sqrt{1 - \frac{y}{x + y + 1}}$, a gustoća platna P_2 s $\rho_2(x, y, z) = \sqrt{1 + \frac{1 - x}{x + y + 1}}$, koje platno će Mirko odabrati?

Zadatak 4. (15 bodova)
Odredite centar mase čeličnog užeta savijenog u obliku krivulje $y = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$. Gustoća užeta u svakoj njegovoj točki proporcionalna je udaljenosti od pravca $y = 3$.

Zadatak 5. (15 bodova)
U genetici hibridni model selekcije opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dy}{dt} = ky(1-y)(a-by),$$

pri čemu je y udio populacije koji ima određeno svojstvo, dok je t vrijeme mjereno u generacijama. Konstante k, a i b ovise o genetičkom svojstvu kojeg proučavamo.

Pretpostavimo da proučavamo populaciju bubamara i da nas zanima kako brzo se svojstvo X prenosi s jedne generacije na drugu. Na početku studije smo ustanovili da pola populacije bubamara ima svojstvo X, a nakon 4 generacije 80 % populacije je imalo to svojstvo. Ako uzmemo da je $a = 2$ i $b = 1$, nakon koliko generacija će 96 % populacije imati svojstvo X ?

Zadatak 6. (15 bodova)
Izvedite jednadžbu slobodnih prigušenih oscilacija harmonijskog oscilatora!

Zadatak 7. (10 bodova)
Riješite Dirichletov rubni problem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \text{ na} & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \\ \\ u(x,0) = 1, & x > 1 \\ u(x,0) = -x, & |x| < 1 \\ u(x,0) = 0, & x < -1. \end{cases}$$