

Odjel za matematiku, Sveučilite u Osijeku.
20. rujna 2017.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. (15 bodova)

Električni potencijal V u svakoj točki (x, y) ravne ploče u obliku područja omeđenog s $0 \leq x \leq 1$ i $0 \leq y \leq 1$ opisan je funkcijom

$$V(x, y) = 6xy - 4x^3 - 3x^2,$$

dok je gustoća ploče ρ zadana s

$$\rho(x, y) = x^2 + y^2 - xy.$$

Odredite ekstremne vrijednosti potencijala ploče. U kojoj točki je gustoća ploče najmanja?

Zadatak 2. (15 bodova)

Neka je temperatura T u točki $P = (x, y, z)$ prostora zadana s $T(x, y, z) = 30(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

- a) Kako brzo se temperatura mijenja u točki $P_0 = (2, 1, -2)$, a u smjeru točke $P_1 = (4, 3, 0)$?
b) Odredite smjerove i iznose najvećeg rasta i pada temperature T u točki $P_2 = (1, 2, 1)$.

Zadatak 3. (15 bodova)

Kockasto tijelo rotira oko jednog svog brida. Gustoća tijela u svakoj točki proporcionalna je kvadratu udaljenosti do donjeg vrha tog istog brida. Odredite moment tromosti tijela ako mu je duljina brida jednaka $1 m$.

Zadatak 4. (15 bodova)

Izvedite jednadžbu oscilacija žice iz zakona o sačuvanju količine gibanja.

Zadatak 5. (10 bodova)

Pri nekoj kemijskoj reakciji tvar A se pretvara u tvar B tako da je proces pretvorbe od A proporcionalan kvadratu količine tvari A . Ako je početna količina tvari A jednaka $60 g$, nakon jednog sata preostaje samo $10 g$ nepretvorene tvari A , koliko će tvari A ostati nepretvoreno nakon dva sata?

Zadatak 6. (15 bodova)

Tijelo mase $m = 2 kg$ obješeno je za oprugu konstante elastičnosti $k = 4$. U sustav je dodan prigušivač s koeficijentom prigušenja $c = 4$. Odredite jednadžbu gibanja tijela ako na sustav djeluje sila $f(t) = 3 \sin(2t)$, početni otklon tijela je $2 m$, a tijelo je iz tog položaja gurnuto brzinom $1 m/s$.

Zadatak 7. (15 bodova)

Riješite Dirichletov rubni problem

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\} \\ u(x, y) = 2, & y = x. \end{cases}$$