Postupak za rješavanje linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

$\diamond$ Linearna homogena rekurzivna relacija s konstantnim koeficijentima je relacija oblika

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_{r-1} a_{n-r+1} + c_r a_{n-r} = 0, \tag{1}$$

pri čemu vrijedi $c_i \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$, $c_r \neq 0$, $1 \leq r \leq n$.

Rješavamo ju tako da ju supstitucijom $a_i = x^i$ prevedemo u karakterističnu jednadžbu

$$\begin{aligned} c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_r x^{n-r} &= 0 \ / : x^{n-r} \\ c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_{r-1} x + c_r &= 0. \end{aligned}$$

1° Svi korjeni $x_1, x_2, \ldots, x_r$ karakteristične jednadžbe su međusobno različiti.
Tada je

$$a_n = A_1 (x_1)^n + A_2 (x_2)^n + A_3 (x_3)^n + \ldots + A_r (x_r)^n$$

opće rješenje rekurzivne relacije (1), pri čemu $A_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, r,$.

2° Korjeni karakteristične jednadžbe nisu svi međusobno različiti.
Neka su $x_1, \ldots, x_k$, $1 \leq k < r$, međusobno različiti korjeni karakteristične jednadžbe redom sa kratnostima $m_1, \ldots, m_k$, $1 \leq m_i \leq r$. Tada je

$$\begin{aligned} a_n \ = \ & (A_{11} + A_{12} n + A_{13} n^2 + \ldots A_{1m_1} n^{m_1 - 1})(x_1)^n \\ & + (A_{21} + A_{22} n + A_{23} n^2 + \ldots A_{2m_2} n^{m_2 - 1})(x_2)^n \\ & + \ldots \\ & + (A_{k1} + A_{k2} n + A_{k3} n^2 + \ldots A_{km_k} n^{m_k - 1})(x_k)^n, \end{aligned}$$

opće rješenje rekurzivne relacije (1), pri čemu $A_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, k,$.

$\diamond$ Ukoliko su zadani početni uvjeti $a_1 = \beta_1$, $a_2 = \beta_2$, $\ldots$, $a_r = \beta_r$, rekurzivne relacije (1), onda pomoću njih izračunavamo neodređene koeficijente A_i (A_{ij}).

Postupak za rješavanje linearne nehomogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

⋄ Linearna nehomogena rekurzivna relacija s konstantnim koeficijentima je relacija oblika

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_{r-1} a_{n-r+1} + c_r a_{n-r} = f(n), \tag{2}$$

pri čemu vrijedi $c_i \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$, $c_r \neq 0$, $1 \leq r \leq n$.

Koraci rješavanja:

1. Odredimo opće rješenje a_n^H pripadne homogene rekurzivne relacije

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_{r-1} a_{n-r+1} + c_r a_{n-r} = 0, \tag{3}$$

ali ne računamo neodređene koeficijente.

2. Odredimo opći oblik partikularnog rješenja a_n^P (očitamo iz tablice obzirom na tip funkcije f) nehomogene relacije.

3. Uvrstimo u rekurziju partikularno rješenje a_n^P kako bismo odredili neodređene koeficijente u a_n^P.

4. Opće rješenje rekurzije (2) je $a_n = a_n^H + a_n^P$.

5. Pomoću početnih uvjeta odredimo neodređene koeficijente koji se nalaze u a_n^H.

⋄ Tablica za nalaženje partikularnih rješenja

tip funkcije f	partikularno rješenje a_n^p
$C \cdot b^n$	• b nije korjen karakteristične jednadžbe $\Rightarrow a_n^P = A \cdot b^n$ • b je korjen karakteristične jednadžbe kratnosti $k \Rightarrow a_n^P = A \cdot n^k \cdot b^n$
polinom stupnja m	• 1 nije korjen karakteristične jednadžbe $\Rightarrow a_n^P = p(n)$ polinom stupnja m • 1 je korjen karakteristične jednadžbe kratnosti $k \Rightarrow a_n^P = n^k \cdot p(n)$, $p(n)$ polinom stupnja m
$C \cdot n^m \cdot b^n$	• b nije korjen karakteristične jednadžbe $\Rightarrow a_n^P = p(n) \cdot b^n$ polinom stupnja m • b je korjen karakteristične jednadžbe kratnosti $k \Rightarrow a_n^P = n^k \cdot p(n) \cdot b^n$, $p(n)$ polinom stupnja m