Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Rješenja 1. kolokvija iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II
Ak. god. 2014./2015.
Grupa A

Zadatak 1 (10bod) *Marko je vlasnik poduzeća koje svoje poslovnice ima na tri lokacije. On želi kupiti stan tako da zbroj kvadrata udaljenosti do sve tri lokacije bude što manji. Ako se pretpostavi da se poslovnice nalaze u točkama $A(2,10)$, $B(0,0)$ i $C(16,1)$ odredite točku T lokacije na kojoj bi Marko trebao kupiti stan.*

Rješenje 1

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-10)^2 + x^2 + y^2 + (x-16)^2 + (y-1)^2$$
$$f(x,y) = 3y^2 - 22y + 3x^2 - 36x + 361$$

Tražimo stacionarnu točku:

$$\partial_x f = 6x - 36 = 0$$
$$\partial_y f = 6y - 22 = 0$$

Rješenje sustava je točka $S\left(6, \dfrac{11}{3}\right)$.

Izračunamo li druge parcijalne derivacije, imamo da je Hesseova matrica dana s:

$H = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Budući da su oba glavna minora strogo veća od nule, funkcija f u točki S postiže strogi lokalni minimum.

Zadatak 2 (10bod) *Točka $S(0,0)$ je stacionarna točka funkcije $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. Ispitajte da li je to točka lokalnog minimuma, lokalnog maksimuma ili sedlasta točka dane funkcije.*

Rješenje 2 *Kako bi to ispitali, moramo izračunati prve i druge parcijalne derivacije.*

$$\partial_x f = 2y - 6x = 0$$
$$\partial_y f = -4y + 2x = 0$$

Izračunamo li druge parcijalne derivacije, imamo da je Hesseova matrica dana s:

$H = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Kako je $\Delta_1 = -6 < 0$, te $\Delta_2 = 20 > 0$, ovo je točka strogog lokalnog maksimuma.

Zadatak 3 (15bod) *Među svim kvadrima istog volumena, nađite onog koji ima najmanje oplošje.*

Rješenje 3 *Ukoliko uzmemo da su svi kvadri volumena V, Lagrangeova funkcija za pripadni problem je dana kao:*

$$L(x,y,z) = 2(xy + yz + xz) + \lambda(xyz - V).$$

Tražimo stacionarne točke:

$$\partial_x L(x,y,z) = 2y + 2z + \lambda yz = 0$$
$$\partial_y L(x,y,z) = 2x + 2z + \lambda xz = 0$$
$$\partial_z L(x,y,z) = 2x + 2z + \lambda xy = 0$$
$$xyz = V$$

Riješavamo sustav i dobijemo da je $x = y = z$, iz čega slijedi da je $S = (\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$.

Zadatak 4 (10bod) *Neka su* $S_1(a,a)$ *i* $S_2(-a,-a)$ *stacionarne točke funkcije* $f(x,y) = xy$ *uz uvjet* $x^2 + y^2 = 2a^2$. *Ispitajte da li su to točke uvjetnog minimuma ili uvjetnog maksimuma dane funkcije.*

Rješenje 4

$$L(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2a^2).$$

$$\partial_x L(x,y) = y + 2\lambda x = 0$$

$$\partial_y L(x,y) = x + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$$

Imamo izračunate stacionarne točke, te je preostalo izračunati λ. *Lako se dobije da je* $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Druge parcijalne derivacije:

$$\partial^2_{xx} L(x,y) = 2\lambda = -1$$

$$\partial^2_{yy} L(x,y) = 2\lambda = -1$$

$$\partial^2_{xy} L(x,y) = 1$$

Diferenciranjem uvjeta imamo da je $dx = -dy$.
Iz ovoga slijedi da je drugi diferencijal

$$d^2 L(x,y) = -4dy^2 < 0,$$

pa su točke S_1 *i* S_2 *točke uvjetnog maksimuma.*

Zadatak 5 (10bod) *Izračunajte moment tromosti ravne ploče omeđene parabolom* $y^2 = 4x+4$ *i pravcem* $y = 2 - x$ *obzirom na os* x, *pri čemu je* $\mu(x,y) = 1$.

Rješenje 5 *Treba nam formula za računanje momenta tromosti obzirom na os* x:

$$M_x = \int\int x^2 \mu(x,y) dA.$$

$$M_x = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} y^2 \cdot 1 dx = \frac{768}{5}.$$

Zadatak 6 (15bod) *Prijelazom na sferne koordinate postavite integral za računanje mase tijela omeđenog s* $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ *i* $x^2 + y^2 + z^2 = y$, *ako je gustoća dana s* $\mu(x,y,z) = z$. *Odgovarajuće sferne koordinate su dane s* $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\cos\vartheta$, $z = r\sin\varphi\sin\vartheta$.

Rješenje 6 *Uvrštavanjem supstitucije za* x, y *i* z *u jednadžbe koje imamo, dobije se* r *i* ϑ. *Iz jednadžbe sfere*

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta = r\cos\vartheta$$

imamo da je $r = \cos\vartheta$.

Iz jednadžbe kružnog stožca imamo

$$r\cos\vartheta = \sqrt{r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}$$

da je $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} r\sin\varphi\sin\vartheta r^2 \sin\vartheta dr$$

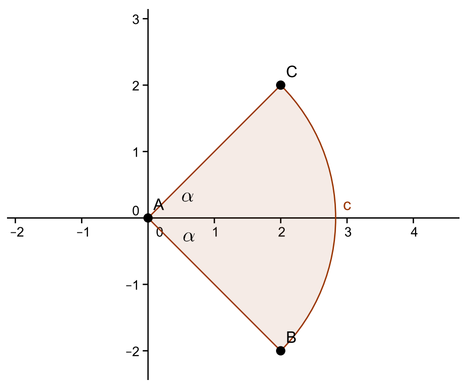
Zadatak 7 (15bod) *Nađite koordinate težišta kružnog isječka radijusa* a *sa središnjim kutom* 2α, *pri čemu je* $\mu(x,y) = 1$.

Rješenje 7 *Sa Slike 1 je očito da je* $y_T = 0$.

$$x_T = \frac{M_y}{m}$$

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2a^3 \sin\alpha}{3}$$

$$m = \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi \int_0^a r dr = a^2\alpha.$$



Slika 1: Kružni isječak.

Zadatak 8 (15bod) *Izračunajte masu presječnice ploha* $y = x^2$ *i* $y + z = 3$ *od točke* $T_1(1, 1, 2)$ *do točke* $T_2(\sqrt{3}, 3, 0)$, *pri čemu je gustoća dana s* $\mu(x, y, z) = \frac{1}{4y^2}$.

Rješenje 8 *Smatramo li y parametrom, imamo:*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y} \\ y &= y \\ z &= 3 - y \end{aligned}$$

Bitno je primijetiti da je x svuda pozitivan, te zato nismo morali brinuti oko predznaka u prvoj jednakosti. Diferencijal luka je dan s

$$ds = \sqrt{2 + \frac{1}{4y}} dy.$$

Iz ovoga se vidi da je

$$m = \int_1^3 4y^2 \sqrt{2 + \frac{1}{4y}} dy.$$

Uzmemo li supstituciju $t = 2 + \frac{1}{4y}$, *lako se dobije masa presječnica ovih ploha.*