Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Rješenja 1. kolokvija iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II
Ak. god. 2015./2016.
Grupa A

Zadatak 1 (20 bodova) *Temperatura T u svakoj točki (x, y) zatvorenog područja*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 2\,,\, x - 2 \leq y \leq 2 - x\}$$

zadana je funkcijom $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$. Dokažite da T ima globalne ekstreme na D, a zatim ih odredite!
Kolika je prosječna vrijednost temperature na D?

Rješenje 1
♦ *Zatvoreno područje D je kompaktan skup. Prema pretpostavci D je zatvoren, a obzirom da ga možemo smjestiti u otvoreni krug $K(P, 3)$ radijusa 3 sa središtem u točki $P = (0, 0)$, slijedi da je D omeđen pa onda i kompaktan. Funkcija temperature T je polinom dviju varijabli pa je neprekidna funkcija na cijelom $\mathbb{R}^2$, specijalno na kompaktu D. Prema Weierstrassovom teoremu, T postiže globalne ekstreme na D. Esktreme najprije tražimo u unutrašnjosti $IntD$ područja D tako da rješavamo problem bezuvjetne optimizacije funkcije T ispitujući karakter jedino onih stacionarnih točaka od T koje pripadaju $IntD$.*

Stacionarnu točku funkcije

$$T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$$

dobivamo iz sustava jednadžbi:

$$\partial_x T = 2x - 2 = 0$$

$$\partial_y T = 2y = 0.$$

Rješenje sustava je točka $S_1 = (1, 0)$.
Primijetimo da u proizvoljnoj točki $P \in \mathbb{R}^2$ Hesseova matrica funkcije T izgleda ovako: $HT(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Svi vodeći glavni minori matrice $HT(S)$ su strogo pozitivni pa je S_1 točka lokalnog minimuma i $T(S_1) = -1$.
Sada treba ispitati ponašanje funkcije T na rubu ∂D. Jasno je da T na rubu ∂D mora imati globalni maksimum, no, još ništa ne znamo o globalnom minimumu.
Rub područja D je po dijelovima glatka krivulja (kontura trokuta) koja se sastoji od pravaca $x = 0$, $y = 2 - x$ i $y = x - 2$, pa imamo tri problema uvjetne optimizacije. Zbog jednostavnosti funkcije T i funkcijâ uvjeta, ne moramo koristiti metodu Lagrangeovih mutiplikatora (iako su svi uvjeti za primjenu te metode ispunjeni). Dovoljno je uvrstiti uvjet u funkciju T i time svesti problem uvjetne optimizacije na problem bezuvjetne optimizacije funkcije T sa varijablom manje.

- *Za $x = 0$ imamo $T(y) = y^2$ pa se odmah ustanovi da je $S_2 = (0, 0)$ točka uvjetnog lokalnog minimuma i $T(S_2) = 0$.*
- *Za $y = 2 - x$ imamo $T(x) = 2x^2 - 6x + 4$. Slijedi $S_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ točka uvjetnog lokalnog minimuma i $T(S_3) = -\frac{1}{2}$.*
- *Za $y = x - 2$ imamo $T(x) = 2x^2 - 6x + 4$. Slijedi $S_4 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ točka uvjetnog lokalnog minimuma i*

$T(S_4) = -\dfrac{1}{2}.$

Sada je jasno da T mora imati globalni maksimum u barem jednom špicu od D, tj. u barem jednom od vrhova $(0,-2)$, $(0,2)$ i $(2,0)$. Imamo $T(0,-2) = T(0,2) = 4$ i $T(2,0) = 0$.
Zaključujemo da je točka $(1,0)$ točka globalnog minimuma, a točke $(0,-2)$ i $(0,2)$ točke globalnog maksimuma funkcije T na D.

Napomena: T je konveksna funkcija na D pa je svaki lokalni minimum na D ujedno i globalni minimum. Stoga smo odmah mogli zaključiti da je $(1,0)$ točka globalnog minimuma.
(M.Avriel, Nonlinear Programming: Analysis and Methods 2ed., Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2003).
Još: T je jako konveksna funkcija klase $C^\infty(D)$ pa na D ima jedinstvenu točku, $(1,0)$, globalnog minimuma.

♦ *Prosječnu vrijednost $\bar{T}$ temperature T na D računamo prema formuli:*

$$\bar{T} = \frac{\iint_D T(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \,dx\,dy}.$$

Dobivamo

$$\bar{T} = \frac{\int_0^2 \,dx \int_{x-2}^{2-x} (x^2+y^2-2x)\,dy}{\int_0^2 \,dx \int_{x-2}^{2-x} \,dy} = 0.$$

Zadatak 2 (15 bodova) *U ravnini $x - y + z = 1$ odredite sve točke koje su najbliže ishodištu, a leže na valjku $x^2 + y^2 = 1$. Kolika je udaljenost tih točaka do ishodišta?*
Pomoć: Svaka točka koja ispunjava zadane uvjete ima cjelobrojne koordinate!

Rješenje 2 *Udaljenost točke $T = (x,y,z)$ do ishodišta računamo funkcijom $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Obzirom da je korjen monotona funkcija, funkcije f i f^2 će u istim točkama postizati ekstremne vrijednosti pa je lakše tražiti ekstreme funkcije $f^2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.*
Treba minimizirati funkciju $f^2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ po svim točkama koje istovremeno leže u ravnini $x - y + z = 1$ i na valjku $x^2 + y^2 = 1$. Pripadna Lagrangeova funkcija izgleda ovako:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x-y+z-1)+\mu(x^2+y^2-1)$$

Stacionarne točke računamo iz sustava:

$$\partial_x L = 2x + \lambda + 2\mu x = 0$$

$$\partial_y L = 2y - \lambda + 2\mu y = 0$$

$$\partial_z L = 2z + \lambda = 0$$

$$\partial_\lambda L = x - y + z - 1 = 0$$

$$\partial_\mu L = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Dobivamo 4 stacionarne točke: $S_1 = (1,0,0)$, $S_2 = (0,-1,0)$, $S_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$ i $S_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$.
Zbog upute zadatka uzimamo u obzir samo točke S_1 i S_2.
Ispitati karakter točaka S_1 i S_2 možemo na više načina, no, to je nepotrebno. Presjek zadanog pravca i zadanog valjka je elipsa, dakle, kompaktan skup. Štoviše, radi se o glatkoj krivulji. Funkcija koju promatramo je neprekidna pa na elipsi svakako postiže globalne ekstreme. Zato je dovoljno izračunati i usporediti vrijednosti funkcije f^2 u zadanim točkama. Imamo $f^2(S_1) = f^2(S_2) = 1$ pa u S_1 i S_2 funkcija f^2, a onda i f postiže globalni minimum, a udaljenost tih točaka do ishodišta je jedan.

Zadatak 3 (20 bodova) *Izračunajte moment tromosti obzirom na ishodište ravne kvadratne ploče s vrhovima* $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ *i* $(0,1)$. *Gustoća mase ploče zadana je funkcijom* $\rho(x,y) = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$.

Rješenje 3 *Moment tromosti ploče* D *obzirom na ishodište računamo prema formuli:*

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Funkcija gustoće nema jednostavno pravilo pridruživanja pa ćemo napraviti zamjenu varijabli

$$u = x+y, \quad v = x-y$$

iz čega dobivamo

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

Odgovarajuća apsolutna vrijednost Jacobijana je $|J| = \frac{1}{2}$. *Ovakvom supstitucijom područje* D *u* XOY *ravnini preslikavamo u područje* D' *u* UOV *ravnini koje je također kvadrat, ali s vrhovima* $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ *i* $(1,-1)$. *Rješavamo integral u novim koordinatama:*

$$I_O = \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} \left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)\left(\frac{v}{u}\right)^2 dv = \frac{2}{15}.$$

Zadatak 4 (7 bodova) *Koristeći polarne koordinate napišite formule za računanje centra mase žice koja je savijena u obliku polukružnice* $x^2+y^2=4$, $x \geq 0$. *Gustoća žice proporcionalna je udaljenosti od pravca* $x=2$.

Rješenje 4 *Centar mase žice* C *računamo po formuli:*

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{\int_C x\rho(x,y)ds}{\int_C \rho(x,y)ds}, \frac{\int_C y\rho(x,y)ds}{\int_C \rho(x,y)ds}\right).$$

Parametarska jednadžba zadane polukružnice je $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Udaljenost proizvoljne točke žice (x,y) *i pravca* $x=2$ *jednaka je* $2-x$ *pa je gustoća žice zadana formulom* $\rho(x,y) = k(2-x)$, *pri čemu je* $k>0$ *koeficijent proporcionalnosti. Centar mase žice zapisan u polarnim koordinatama izgleda ovako:*

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t(1-\cos t)\,dt}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)\,dt}, \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(1-\cos t)\,dt}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)\,dt}\right).$$

Napomena: Primijetimo da je funkcija gustoće žice simetrična obzirom na os OX, *a kako je i žica simetrična obzirom na istu os, statički moment* M_x *jednak je nuli pa je* $\bar{y} = 0$.

Zadatak 5 *Površina jezera zauzima područje* XOY *ravnine tako da je dubina u točki* (x,y) *zadana funkcijom*

$$T(x,y) = 300 - 2x^2 - 3y^2.$$

Dječak pluta na površini jezera i nalazi se u točki $P = (4,2)$.
a) [**3 boda**] *Hoće li dubina jezera ispod dječaka biti manja ili veća ako dječak pliva iz točke* P *prema točki*
$Q = (2,1)$?
b) [**3 boda**] *U kojem smjeru iz* P *dječak mora plivati tako da što prije stigne do 'plićaka'?*
c) [**2 boda**] *U kojem smjeru iz* P *se dubina jezera neće mijenjati?*

Rješenje 5

a) Zanima nas predznak derivacije funkcije T u točki P, a u smjeru vektora $\vec{u} = \dfrac{\vec{PQ}}{||\vec{PQ}||}$:

$$D_{\vec{u}}T(4,2) = \nabla T(4,2) \cdot \vec{u} = \frac{44}{\sqrt{5}} > 0.$$

Zaključujemo da će uz sve zadane uvjete dubina jezera ispod dječaka rasti.
b) Dječak mora plivati u smjeru $-\nabla T(4,2) = 16\vec{i} + 12\vec{j}$ jer je to smjer najbržeg pada dubine jezera opisane funkcijom T.
c) Dubina se neće mijenjati u smjeru onog jediničnog vektora $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$ za koji vrijedi $D_{\vec{u}}T(4,2) = 0$.

$$D_{\vec{u}}T(4,2) = \nabla T(4,2) \cdot \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow 4u_x = -3u_y.$$

Dodatno vrijedi $u_x^2 + u_y^2 = 1$ pa dobivamo sustav s dvije jednadžbe čija rješenja daju vektore

$$\vec{u}_1 = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

i $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1$.

Rješenja 1. kolokvija iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II
Ak. god. 2015./2016.
Grupa B

Zadatak 1 (15 bodova) *Električni potencijal V u svakoj točki (x, y) zatvorenog područja*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 3\,,\, 0 \leq y \leq 2\}$$

zadan je funkcijom $V(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$. Dokažite da V ima globalne ekstreme na D, a zatim ih odredite!
Kolika je prosječna vrijednost električnog potencijala na D?

Rješenje 1
♦ *Zatvoreno područje D je kompaktan skup. Prema pretpostavci D je zatvoren, a obzirom da ga možemo smjestiti u otvoreni krug $K(P, 5)$ radijusa 5 sa središtem u točki $P = (0, 0)$, slijedi da je D omeđen pa onda i kompaktan. Funkcija električnog potencijala V je polinom dviju varijabli pa je neprekidna funkcija na cijelom $\mathbb{R}^2$, specijalno na kompaktu D. Prema Weierstrassovom teoremu, V postiže globalne ekstreme na D.*
Esktreme najprije tražimo u unutrašnjosti $IntD$ područja D tako da rješavamo problem bezuvjetne optimizacije funkcije V ispitujući karakter jedino onih stacionarnih točaka od V koje pripadaju $IntD$.

Stacionarnu točku funkcije

$$V(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

dobivamo iz sustava jednadžbi:

$$\partial_x V = 2x - 2y = 0$$

$$\partial_y V = 2 - 2x = 0.$$

Rješenje sustava je točka $S_1 = (1, 1)$.
Primijetimo da je u proizvoljnoj točki $P \in \mathbb{R}^2$ Hesseova matrica funkcije V indefinitna jer izgleda ovako: $HV(P) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. *Slijedi da je S_1 sedlasta točka pa V nema lokalnih ekstrema (pa onda ni globalnih) u unutrašnjosti od D.*
Sada treba ispitati ponašanje funkcije V na rubu ∂D.
Rub područja D je po dijelovima glatka krivulja (kontura pravokutnika) koja se sastoji od pravaca $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ i $y = 2$, pa imamo četiri problema uvjetne optimizacije. Zbog jednostavnosti funkcije V i funkcijâ uvjeta, ne moramo koristiti metodu Lagrangeovih mutiplikatora (iako su svi uvjeti za primjenu te metode ispunjeni). Dovoljno je uvrstiti uvjet u funkciju V i time svesti problem uvjetne optimizacije na problem bezuvjetne optimizacije funkcije V sa varijablom manje.

- *Za $x = 0$ imamo $V(y) = 2y$ pa V nema stacionarnih točaka na pravcu $x = 0$.*
- *Za $x = 3$ imamo $V(y) = 9 - 4y$ pa V nema stacionarnih točaka ni na pravcu $x = 3$.*
- *Za $y = 0$ imamo $V(x) = x^2$. Slijedi $S_2 = (0, 0)$ je točka uvjetnog lokalnog minimuma i $V(S_2) = 0$.*
- *Za $y = 2$ imamo $V(x) = (x - 2)^2$. Slijedi $S_3 = (2, 2)$ je točka uvjetnog lokalnog minimuma i $V(S_3) = 0$.*

Sada je jasno da V mora imati globalni maksimum u barem jednom špicu od D osim u $(0, 0)$, tj. u barem jednom od vrhova $(3, 0)$, $(0, 2)$ i $(3, 2)$. Imamo $V(3, 0) = 9$, $V(3, 2) = 1$ i $V(0, 2) = 4$.
Zaključujemo da su točke $(0, 0)$ i $(2, 2)$ točke globalnog minimuma, a točka $(3, 0)$ točka globalnog maksimuma funkcije V na D.

♦ *Prosječnu vrijednost $\bar{V}$ električnog potencijala V na D računamo prema formuli:*

$$\bar{V} = \frac{\iint_D V(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \,dx\,dy}.$$

Dobivamo

$$\bar{V} = \frac{\int_0^3 \,dx \int_0^2 (x^2 - 2xy + 2y)\,dy}{\int_0^3 \,dx \int_0^2 \,dy} = 2.$$

Zadatak 2 (15 bodova) *U ravnini $y-x+1=0$ odredite sve točke koje su najviše udaljene od ishodišta, a leže na valjku $y^2+z^2=4$. Kolika je udaljenost tih točaka do ishodišta?*
Pomoć: Svaka točka koja ispunjava zadane uvjete ima cjelobrojne koordinate!

Rješenje 2 *Udaljenost točke $T=(x,y,z)$ do ishodišta računamo funkcijom $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Obzirom da je korjen monotona funkcija, funkcije f i f^2 će u istim točkama postizati ekstremne vrijednosti pa je lakše tražiti ekstreme funkcije $f^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.*
Treba maksimizirati funkciju $f^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ po svim točkama koje istovremeno leže u ravnini $y-x+1=0$ i na valjku $y^2+z^2=4$. Pripadna Lagrangeova funkcija izgleda ovako:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(y-x+1)+\mu(y^2+z^2-4).$$

Stacionarne točke računamo iz sustava:

$$\partial_x L = 2x - \lambda = 0$$

$$\partial_y L = 2y + \lambda + 2\mu y = 0$$

$$\partial_z L = 2z + 2\mu z = 0$$

$$\partial_\lambda L = y - x + 1 = 0$$

$$\partial_\mu L = y^2 + z^2 - 4 = 0$$

Dobivamo 4 stacionarne točke: $S_1=(3,2,0)$, $S_2=(-1,-2,0)$, $S_3=(0,-1,-\sqrt{3})$ i $S_4=(0,-1,\sqrt{3})$. Zbog upute zadatka uzimamo u obzir samo točke S_1 i S_2.
Ispitati karakter točaka S_1 i S_2 možemo na više načina, no, to je nepotrebno. Presjek zadanog pravca i zadanog valjka je elipsa, dakle, kompaktan skup. Štoviše, radi se o glatkoj krivulji. Funkcija koju promatramo je neprekidna pa na elipsi svakako postiže globalne ekstreme. Zato je dovoljno izračunati i usporediti vrijednosti funkcije f^2 u zadanim točkama. Imamo $f^2(S_1)=13$ i $f^2(S_2)=5$. U S_1 funkcija f^2, a onda i f postiže globalni maksimum. Udaljenost točke S_1 do ishodišta iznosi $\sqrt{13}$.

Zadatak 3 (20 bodova) *Izračunajte količinu naboja ravne ploče u obliku trapeza s vrhovima $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ i $(0,2)$. Gustoća naboja na ploči zadana je funkcijom $\rho(x,y)=\cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)+2$.*

Rješenje 3 *Količinu naboja zadane ploče D računamo prema formuli:*

$$Q = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Funkcija gustoće nema jednostavno pravilo pridruživanja pa ćemo napraviti zamjenu varijabli

$$u = y - x, \quad v = y + x$$

iz čega dobivamo

$$x = \frac{1}{2}(v-u), \quad y = \frac{1}{2}(v+u).$$

Odgovarajuća apsolutna vrijednost Jacobijana je $|J| = \frac{1}{2}$.
Ovakvom supstitucijom područje D *u* XOY *ravnini preslikavamo u područje* D' *u* UOV *ravnini koje je također trapez, ali s vrhovima* $(1,1)$, $(2,2)$, $(-1,1)$ *i* $(-2,2)$. *Rješavamo integral u novim koordinatama:*

$$Q = \int_1^2 dv \int_{-v}^{v} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{u}{v}\right) + 2\right) du = 3 + \frac{3}{2}\sin 1.$$

Zadatak 4 (7 bodova) *Koristeći polarne koordinate napišite formule za centar mase žice koja je savijena u obliku polukružnice* $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. *Gustoća žice proporcionalna je udaljenosti od pravca* $y = 1$.

Rješenje 4 *Centar mase žice* C *računamo po formuli:*

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\int_C x\rho(x,y)ds}{\int_C \rho(x,y)ds}, \frac{\int_C y\rho(x,y)ds}{\int_C \rho(x,y)ds} \right).$$

Parametarska jednadžba zadane polukružnice je $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. *Udaljenost proizvoljne točke žice* (x,y) *i pravca* $y = 1$ *jednaka je* $1 - y$ *pa je gustoća žice zadana formulom* $\rho(x,y) = k(1-y)$, *pri čemu je* $k > 0$ *koeficijent proporcionalnosti. Centar mase žice zapisan u polarnim koordinatama izgleda ovako:*

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\int_0^\pi \cos t(1 - \sin t)\, dt}{\int_0^\pi (1 - \sin t)\, dt}, \frac{\int_0^\pi \sin t(1 - \sin t)\, dt}{\int_0^\pi (1 - \sin t)\, dt} \right).$$

Napomena: Primijetimo da je funkcija gustoće simetrična obzirom na os OY, *a kako je i žica simetrična obzirom na istu os, statički moment* M_y *jednak je nuli pa je* $\bar{x} = 0$.

Zadatak 5 *Vruća metalna ploča smješena je u* XOY *ravnini tako da je temperatura u točki* (x,y) *ploče zadana funkcijom*

$$T(x,y) = xy + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

a) [**3 boda**] *Odredite brzinu promjene temperature* T *u točki* $P = (3,4)$ *u smjeru vektora* $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.
b) [**3 boda**] *U kojem smjeru temperatura najbrže raste u* P *i koliko iznosi maksimalna brzina rasta?*
c) [**2 boda**] *U kojem smjeru nema promjene temperature u točki* P*?*

Rješenje 5

a) Zanima nas derivacija funkcije T *u točki* P, *a u smjeru vektora* $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$:

$$D_{\vec{u}}T(3,4) = \nabla T(3,4) \cdot \vec{u} = \left(\frac{23}{5}\vec{i} + \frac{19}{5}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = \frac{21\sqrt{2}}{5}.$$

b) Temperatura najbrže raste u smjeru $\nabla T(3,4)$ *pa je maksimalna brzina rasta jednaka* $||\nabla T(3,4)|| = \sqrt{\frac{178}{5}}$.
c) Nema promjene temperature u točki P *u smjeru onog vektora koji je okomit na* $\nabla T(3,4)$, *odnosno, u smjeru jediničnog vektora* $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$ *za koji vrijedi* $D_{\vec{u}}T(3,4) = 0$.
Imamo

$$D_{\vec{u}}T(3,4) = \nabla T(3,4) \cdot \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow 23u_x = -19u_y.$$

Dodatno vrijedi $u_x^2 + u_y^2 = 1$ *pa dobivamo sustav s dvije jednadžbe čija rješenja daju vektore*

$$\vec{u}_1 = -\frac{19}{\sqrt{890}}\vec{i} + \frac{23}{\sqrt{890}}\vec{j}$$

i $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1$.