M102 Kombinatorna i diskretna matematika

Vježbe 7

12.04.2018

predavač: Snježana Majstorović

asistent: SM

Formula uključivanja-isključivanja

- koristi se u problemima prebrojavanja konačnih skupova kad je lakše prebrojati elemente indirektno nego direktno

Primjer 1

Koliko je prirodnih brojeva iz segmenta $[1, 1000]$ *koji nisu djeljivi s* 6*?*

Formula uključivanja-isključivanja

- koristi se u problemima prebrojavanja konačnih skupova kad je lakše prebrojati elemente indirektno nego direktno

Primjer 1

Koliko je prirodnih brojeva iz segmenta $[1, 1000]$ *koji nisu djeljivi s* 6*?*

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 2

U nekom razredu od 30 *učenika njih* 12 *voli matematiku,* 14 *voli fiziku,* 13 *kemiju,* 5 *učenika voli matematiku i fiziku,* 7 *voli fiziku i kemiju,* 4 *učenika vole matematiku i kemiju, a* 3 *voli sva tri predmeta. Koliko učenika ne voli niti jedan od ta tri predmeta?*

Zadatak 3

Koliko je prirodnih brojeva iz segmenta $[1, 1000]$ *koji nisu djeljivi ni s* 2 *ni s* 3 *ni s* 5 *?*

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 2

U nekom razredu od 30 učenika njih 12 voli matematiku, 14 voli fiziku, 13 kemiju, 5 učenika voli matematiku i fiziku, 7 voli fiziku i kemiju, 4 učenika vole matematiku i kemiju, a 3 voli sva tri predmeta. Koliko učenika ne voli niti jedan od ta tri predmeta?

Zadatak 3

Koliko je prirodnih brojeva iz segmenta $[1, 1000]$ koji nisu djeljivi ni s 2 ni s 3 ni s 5 ?

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 4

Kolika je površina presjeka krugova polumjera a čija su središta u vrhovima jednakostraničnog trokuta s duljinom stranice a?

Formula uključivanja-isključivanja

Teorem 1

Neka je S konačan skup, a $A_1, A_2, \dots A_n \subseteq S$, $\overline{A_i} = S \setminus A_i, i = 1, 2, \dots, n$. Tada je

$$\begin{aligned}
\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{\{i,j\}} |A_i \cap A_j| \\
- \sum_{\{i,j,k\}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|
\end{aligned}$$

Formula uključivanja-isključivanja

Teorem 2

Neka je S konačan skup, a $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq S$. Tada vrijedi

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{\{i,j\}} |A_i \cap A_j| + \sum_{\{i,j,k\}} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 5

Koliko je prirodnih brojeva iz segmenta $[1, 1000]$ *koji su djeljivi s* 3*, a nisu djeljivi niti s jednim od brojeva* 2*,* 5 *i* 7 *?*

Zadatak 6

Izračunajte broj permutacija skupa $\{x, y, z, w, u\}$ *u kojima se niti jedan element ne pojavljuje na istom mjestu kao u permutaciji xyzwu?*

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 5

Koliko je prirodnih brojeva iz segmenta $[1, 1000]$ *koji su djeljivi s* 3*, a nisu djeljivi niti s jednim od brojeva* 2*,* 5 *i* 7 *?*

Zadatak 6

Izračunajte broj permutacija skupa $\{x, y, z, w, u\}$ *u kojima se niti jedan element ne pojavljuje na istom mjestu kao u permutaciji xyzwu?*

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 7

Marko ima 4 sadnice jabuka, 6 sadnica smokvi i 5 sadnica trešanja (sve sadnice su različite.) Na koliko načina Marko može posaditi te sadnice u niz ako sadnice barem jedne vrste moraju biti jedna do druge?

Zadatak 8

8 jabuka, 10 krušaka i 7 naranči dijelimo na četvero djece. Koliko je podjela u kojima svako dijete dobije barem jedno voće?

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 7

Marko ima 4 sadnice jabuka, 6 sadnica smokvi i 5 sadnica trešanja (sve sadnice su različite.) Na koliko načina Marko može posaditi te sadnice u niz ako sadnice barem jedne vrste moraju biti jedna do druge?

Zadatak 8

8 jabuka, 10 krušaka i 7 naranči dijelimo na četvero djece. Koliko je podjela u kojima svako dijete dobije barem jedno voće?

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 9

Na koliko se načina se brojevi $-n, -n+1, -n+2, \ldots, -1, 1, 2, 3, \ldots, n$ *mogu rasporediti na vrhove konveksnog* $2n$*-terokuta tako da* k *i* $-k$ *ne budu susjedi ni za jedno* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$*?*

Zadatak 10

Izračunajte broj svih 5*-znamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu osmicu i barem jednu devetku.*

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 9

Na koliko se načina se brojevi $-n, -n+1, -n+2, \ldots, -1, 1, 2, 3, \ldots, n$ *mogu rasporediti na vrhove konveksnog* $2n$*-terokuta tako da* k *i* $-k$ *ne budu susjedi ni za jedno* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$*?*

Zadatak 10

Izračunajte broj svih 5*-znamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu osmicu i barem jednu devetku.*

Formula uključivanja-isključivanja

Zadatak 11

Pustinjom putuje karavana od 9 deva, jedna iza druge. U oazi treba promijeniti raspored deva tako da niti jedna deva ne gleda ispred sebe onu devu koju je gledala do oaze. Na koliko načina je to moguće učiniti?