

I. kolokvij iz Integralnog računa

A

1. [20 bod.] Zadana je funkcija $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ formulom $f(x) = x^2 - x + 1$. Neka je $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, niz subdivizija segmenta $[1, 4]$ zadanih s

$$x_i = 1 + \frac{3}{n}i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$, gdje je $S(f, P_n)$ gornja Darbouxova suma funkcije f definirana subdivizijom P_n .

2. Ispitajte (bez računanja integrala) jesu li sljedeće funkcije integrabilne, te obrazložite svoje tvrdnje:

a) [5 bod.] $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$.

b) [10 bod.] $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & 1 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x < 3 \\ x + 2, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$.

c) [5 bod.] $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1, 3] \setminus \{2\} \\ 1, & x = 2 \end{cases}$.

3. Riješite sljedeće integrale:

a) [10 bod.] $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}} dx$

b) [10 bod.] $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x} - x \cdot \sin x}{3x} dx$

c) [10 bod.] $\int \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx$

d) [10 bod.] $\int x \cdot \sin 2x dx$

e) [10 bod.] $\int_0^2 \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx$

f) [10 bod.] $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.