Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
10. srpnja 2015.

Pismeni ispit iz Kompleksne analize

1. i) [10 bod.] Dokažite, ako je $|z_0| = 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$, onda za svaki $z \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$ vrijedi

$$\left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z} z_0} \right| = 1$$

   ii) [15 bod.] Dokažite:

$$\text{Arcsin } z = -i\text{Ln } i(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

2. [15 bod.] Funkcijom $f(z) = e^z$ preslikati područje $G_1 \cap G_2$, ako je

$$\begin{aligned} G_1 &= \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < 2\pi\}, \\ G_2 &= \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } z < 1\}. \end{aligned}$$

3. i) [14 bod.] Funkciju

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{(z-1)^{10}(z^2+1)}$$

   razviti u Laurentov red oko točke $z_0 = 1$ u području D koje sadrži točku 2. Skicirati područje konvergencije D.

   ii) [8 bod.] Odredite radijus konvergencije za red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n$.

4. [18 bod.] Izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx\,, \quad a, b > 0\,.$$

5. [20 bod.] Neka je C zatoverna pozitivno orjentirana krivulja prikazana na slici. Izračunajte

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 - 1}\,.$$