

I. kolokvij iz Integralnog računa

Grupa A

1. a) [10 bod.] Skicirajte područje

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x(x+3) \geq 0 \text{ i } y \geq x+3\}$$

i izračunajte njegovu površinu.

- b) [10 bod.] Napišite koje ste svojstvo određenog integrala za računanje površine određene zadanim krivuljama koristili kako biste postavili i izračunali traženu površinu.

2. [10 bod.] Neka je funkcija $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$. Primijenite i objasnite teorem srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije na tako definiranoj funkciji f .
3. [10 bod.] Neka je $a < b \leq 0$ i $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dana sa $f(x) = x^2 + 1$. Nadalje, neka je za $n \in \mathbb{N}$ particija Q_n segmenta $[a, b]$ dana sa

$$Q_n = \left\{ a + \frac{k}{n}(b-a) : k = 0, \dots, n \right\}.$$

Izračunajte integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

kao graničnu vrijednost donje Darbouxove sume.

4. Koristeći definiciju primitivne funkcije na intervalu, odredite barem jednu primitivnu funkciju sljedećih funkcija:

a) [10 bod.] $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

b) [10 bod.] $g : [5, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

(Uputa: Potrebno je odrediti samo primitivnu funkciju, bez računanja određenog integrala.)

5. Riješite sljedeće integrale:

a) [10 bod.] $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$ b) [10 bod.] $\int \frac{x-1}{(x+2)(x+1)} dx$

c) [10 bod.] $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10} dx$ d) [10 bod.] $\int e^x \cos 3x dx$.