Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku

I. kolokvij iz Integralnog računa

Grupa B

1. a) [**10 bod.**] Skicirajte područje

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x(x+4) \geq 0 \ \text{ i } \ y \geq x + 4\}$$

i izračunajte njegovu površinu.

b) [**10 bod.**] Napišite koje ste svojstvo određenog integrala za računanje površine određene zadanim krivuljama koristili kako biste postavili i izračunali traženu površinu.

2. [**10 bod.**] Neka je funkcija $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^2}$. Primijenite i objasnite teorem srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije na tako definiranoj funkciji f.

3. [**10 bod.**] Neka je $0 \leq a < b$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dana sa $f(x) = x^2 + 2$. Nadalje, neka je za $n \in \mathbb{N}$ particija P_n segmenta $[a, b]$ dana sa

$$P_n = \left\{ a + \frac{k}{n}(b-a) \, : \, k = 0, \ldots, n \right\}.$$

Izračunajte integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

kao graničnu vrijednost gornje Darbouxove sume.

4. Koristeći definiciju primitivne funkcije na intervalu, odredite barem jednu primitivnu funkciju sljedećih funkcija:

a) [**10 bod.**] $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + x}$;

b) [**10 bod.**] $g : [5, 7] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}\,$.

(Uputa: Potrebno je odrediti samo primitivnu funkciju, bez računanja određenog integrala.)

5. Riješite sljedeće integrale:

a) [**10 bod.**] $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} \mathrm{d}x$ b) [**10 bod.**] $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} \mathrm{d}x$

c) [**10 bod.**] $\displaystyle\int e^x \cos 4x \, \mathrm{d}x$ d) [**10 bod.**] $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2 - 4x + 10} \, \mathrm{d}x\,.$